ഗണിതം

ഭാഗം – 2

സ്റ്റാൻഡേർഡ്

IX

കേരളസർക്കാർ
പൊതുവിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

തയ്യാറാക്കിയത്
സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT), കേരളം

2024

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണ്ണവും വൈവിധ്യപൂർണ്ണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

ഗണിതം

9

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in
e-mail : scertkerala@gmail.com, Phone : 0471 - 2341883,
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2024
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of General Education, Government of Kerala

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

ലോകത്തെ മനസ്സിലാക്കുന്നതിനും സവിശേഷതകൾ തിരിച്ചറിയുന്നതിനും മനുഷ്യർക്ക് പലതരം അളവുകളും അവയുടെ പരസ്പരബന്ധവും അനിവാര്യമായിരുന്നു. ഇത്തരത്തിൽ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ഭിന്നസംഖ്യകളും രൂപപ്പെടുന്നതും അവ ഉപയോഗിച്ചുള്ള ക്രിയകളുടെ പ്രത്യേകതകളും കഴിഞ്ഞ ക്ലാസുകളിലെ ഗണിതപഠനത്തിൽ നാം മനസ്സിലാക്കി.
എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ടോ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കൊണ്ടോ സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയാത്ത അളവുകളെയും അവ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിനുള്ള പുതിയ രീതികളെക്കുറിച്ചും ഇവിടെ പരിചയപ്പെടാം.
ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള പഠനവും ഇവിടെ തുടരുന്നു. സമാന്തരവരകളും സദൃശത്രികോണങ്ങളും അവ തമ്മിലുള്ള പരസ്പര ബന്ധവും ഈ പുസ്തകത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.
പ്രക്രിയകളെക്കുറിച്ചുള്ള ചിന്തയ്ക്ക് ഊന്നൽ നൽകുന്ന ഗണനചിന്തയാണ് ഗണിതപഠനത്തിന്റെ പുതിയ കാഴ്ചപ്പാട്. പലതരം ക്രിയാരീതികൾ പഠിക്കുകയും അവ നിശ്ചിത സന്ദർഭങ്ങളിൽ പ്രയോഗിക്കുകയും ചെയ്യുന്നതിനേക്കാൾ പ്രധാനം അവ എങ്ങനെ പ്രവർത്തിക്കുന്നു എന്ന് മനസ്സിലാക്കുകയും അവ കൂടുതൽ കാര്യക്ഷമമാക്കാൻ വ്യത്യസ്ത രീതികൾ പ്രയോജനപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യുന്നതാണ്.
ഇതാണ് ഗണനചിന്തകൊണ്ട് അർഥമാക്കുന്നത്.
ജ്യാമിതിയെ ചലനാത്മകമായി ഉപയോഗിച്ച് കൂടുതൽ ആശയഗ്രഹണം സാധ്യമാക്കുന്നതിന് അനുയോജ്യമായ ജിയോജിബ്ര എന്ന കമ്പ്യൂട്ടർ പ്രോഗ്രാമിന്റെ സാധ്യതകളും വിശദീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്.

സ്നേഹാശംസകളോടെ,

ഡോ. ജയപ്രകാശ് ആർ.കെ.
ഡയറക്ടർ
എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി., കേരളം

പാഠപുസ്തകരചനാസമിതി

അഡ്വൈസർ

ഡോ. ഈ. കൃഷ്ണൻ,
ഗണിതവിഭാഗം മേധാവി (റിട്ട.),
യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്, തിരുവനന്തപുരം

ചെയർപേഴ്സൺ

ഡോ. പി. രമേശ് കുമാർ
ഗണിതവിഭാഗം (റിട്ട.), യൂണിവേഴ്സിറ്റി ഓഫ് കേരള
കാര്യവട്ടം, തിരുവനന്തപുരം

വിദഗ്ധർ

ഡോ. ഷിഖി എം.
അസോസ്സിയേറ്റ് പ്രൊഫസർ,
കോളേജ് ഓഫ് എഞ്ചിനിയറിംഗ്
തിരുവനന്തപുരം

മധു ബി.
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫസർ
റീജിയണൽ ഇൻസ്റ്റിറ്റ്യൂട്ട് ഓഫ്
എഡ്യുക്കേഷൻ, മൈസൂർ

എ. സുകേഷ്
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫസർ,
ഗവൺമെന്റ് കോളേജ് ഓഫ്
എഞ്ചിനിയറിംഗ്, കണ്ണൂർ

അംഗങ്ങൾ

ആർ. രാമാനുജം
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
എം.എൻ.കെ.എം.
ഗവ: ഹയർസെക്കന്ററി സ്കൂൾ
പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്

വിജയകുമാരൻ ടി. കെ.
എച്ച് എസ് എസ് ടി (റിട്ട.),
ജി.എം.ആർ.എച്ച്.എസ്.എസ്.
ഫോർ ഗേൾസ്, പരവനടുക്കം,
കാസറഗോഡ്

സി. ടി. ഫിറോസ് ബാബു
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.ജി.വി.എച്ച്.എസ്.എസ്.
വണ്ടൂർ, മലപ്പുറം

ഉണ്ണികൃഷ്ണൻ എം. വി.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.എച്ച്.എസ്. കുറ്റിയേരി
പി.ഒ കുറ്റിയേരി, കണ്ണൂർ

നന്ദകുമാർ സി.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ചോതാവൂർ ഹയർ
സെക്കൻഡറി സ്കൂൾ
ചമ്പാട്, കണ്ണൂർ

ശ്രീജിത്ത് മുറിയമ്പത്ത്
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. ചോറോട്,
കുരിക്കിലാട്, വടകര, കോഴിക്കോട്

പത്മപ്രസാദ് കെ.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
പന്തല്ലൂർ എച്ച്.എസ്.എസ്.,
കടമ്പോട് പോസ്റ്റ്, മലപ്പുറം

ഉബൈദുള്ള കെ.സി.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം
എസ്.ഒ.എച്ച്.എസ്., അരീക്കോട്,
മലപ്പുറം

ഫിറോസ മൊയ്തു
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
കാലിക്കറ്റ് ഗേൾസ് വി.എച്ച്.എസ്.
എസ്., കുണ്ടുങ്ങൽ, കല്ലായി,
കോഴിക്കോട്

പ്രിയ രാജ്
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
എം. ജി. ഡി. ഹൈസ്കൂൾ
പുതുശ്ശേരി,
പുതുശ്ശേരി സൗത്ത് പി.ഒ,
പത്തനംതിട്ട

ധനേശൻ എം. വി.
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. ഇംഗ്ലീഷ്,
ജി.എഫ്.എച്ച്.എസ്.എസ്.
പടന്നക്കടപ്പുറം, കാസറഗോഡ്

ജിയോമി എൻ ജോർജ്ജ്
ചിന മീഡിയ, ഷൊർണ്ണൂർ

അക്കാദമിക് കോഡിനേറ്റർ

ഡോ. അനിൽകുമാർ എ.കെ.
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT)
വിദ്യാഭവൻ, പൂജപ്പുര, തിരുവനന്തപുരം 695 012

ഉള്ളടക്കം

8	വൃത്തങ്ങളുടെ അളവുകൾ	151
9	രേഖീയസംഖ്യകൾ	165
10	ബഹുപദങ്ങൾ	177
11	വൃത്തഭാഗങ്ങൾ	185
12	സ്തംഭങ്ങൾ	195
13	ബഹുപദചിത്രങ്ങൾ	209
14	അനുപാതം	223
15	സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക്	233

ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി
ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു

കണക്കു ചെയ്തു നോക്കാം

ഗവേഷണം

ഐ.സി.റ്റി. സാധ്യത

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ആമുഖം

ഭാരതത്തിലെ ജനങ്ങളായ നാം ഭാരതത്തെ ഒരു [1]**[പരമാധികാര സ്ഥിതിസമത്വ മതേതര ജനാധിപത്യ റിപ്പബ്ലിക്കായി]** സംവിധാനം ചെയ്യുവാനും അതിലെ പൗരന്മാർക്കെല്ലാം:

സാമൂഹ്യവും സാമ്പത്തികവും രാഷ്ട്രീയവും ആയ **നീതിയും;**

ചിന്തയ്ക്കും ആശയപ്രകടനത്തിനും വിശ്വാസത്തിനും മതനിഷ്ഠയ്ക്കും ആരാധനയ്ക്കും ഉള്ള **സ്വാതന്ത്ര്യവും;**

പദവിയിലും അവസരത്തിലും **സമത്വവും;** സംപ്രാപ്തമാക്കുവാനും;

അവർക്കെല്ലാമിടയിൽ

വ്യക്തിയുടെ അന്തസ്സും [2][രാഷ്ട്രത്തിന്റെ ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും] ഉറപ്പുവരുത്തിക്കൊണ്ട് **സാഹോദര്യം** പുലർത്തുവാനും;

സഗൗരവം തീരുമാനിച്ചിരിക്കയാൽ;

നമ്മുടെ ഭരണഘടനാനിർമ്മാണസഭയിൽ ഈ 1949 നവംബർ ഇരുപത്താറാം ദിവസം **ഇതിനാൽ ഈ ഭരണഘടനയെ സ്വീകരിക്കുകയും നിയമമാക്കുകയും നമുക്കുതന്നെ പ്രദാനം ചെയ്യുകയും ചെയ്യുന്നു.**

---

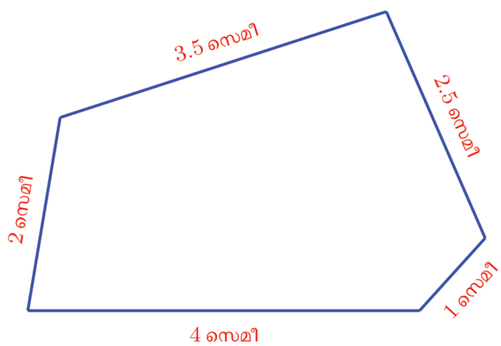
1. 1976 - ലെ ഭരണഘടന (നാല്പത്തിരണ്ടാം ഭേദഗതി) ആക്റ്റ് 2-ാം വകുപ്പു പ്രകാരം "പരമാധികാര ജനാധിപത്യ റിപ്പബ്ലിക്" എന്നതിന് പകരം ചേർത്തത് (3.1.1977 മുതൽ പ്രാബല്യം).
2. മേല്പറഞ്ഞ ആക്റ്റ് 2-ാം വകുപ്പു പ്രകാരം "രാഷ്ട്രത്തിന്റെ ഐക്യം" എന്നതിനു പകരം ചേർത്തത് (3.1.1977 മുതൽ പ്രാബല്യം).

8

വൃത്തങ്ങളുടെ അളവുകൾ

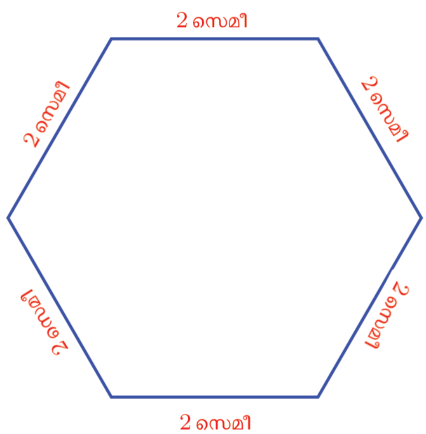
വ്യാസവും ചുറ്റളവും

ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. വശങ്ങളുടെ നീളം കൂട്ടിയാൽ മതി:



ചുറ്റളവ് $4 + 1 + 2.5 + 3.5 + 2 = 13$ സെന്റിമീറ്റർ

സമബഹുഭുജമാണെങ്കിൽ, വളരെ എളുപ്പമായി:



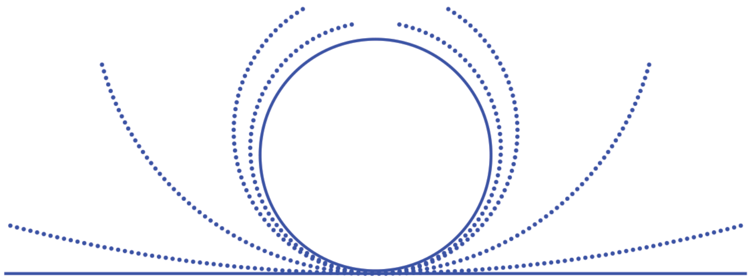
ചുറ്റളവ് $6 \times 2 = 12$ സെന്റിമീറ്റർ

വൃത്തമായാലോ?

നൂലോ ചരടോ വച്ച് അളന്നെടുക്കാം. പക്ഷേ അങ്ങനെ സാധിക്കാത്ത സന്ദർഭങ്ങളും ഉണ്ടല്ലോ. ഉദാഹരണമായി ഈ കണക്കു നോക്കുക:

ഒരു കമ്പി വളച്ച്, 5 സെന്റിമീറ്റർ വ്യാസമുള്ള വൃത്തമുണ്ടാക്കണം. എത്ര നീളമുള്ള കമ്പിയാണ് വളയ്ക്കേണ്ടത് ?

കമ്പി വളച്ച് വൃത്തമാക്കുമ്പോൾ, കമ്പിയുടെ നീളം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവാകുമല്ലോ.



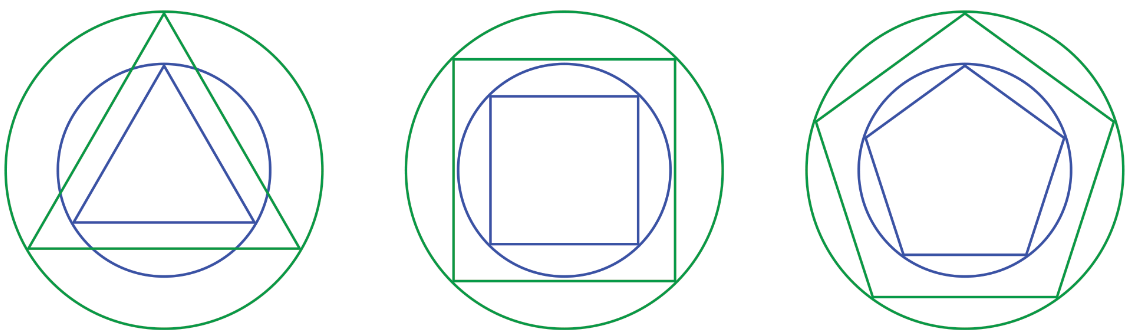
അപ്പോൾ മുകളിൽപ്പറഞ്ഞ കണക്കു ചെയ്യാൻ, വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും ചുറ്റളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം അറിയണം.

വ്യാസം വലുതാകുമ്പോൾ, ചുറ്റളവും വലുതാകും; ഈ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണോ എന്നതാണ് അടുത്ത അന്വേഷണം; അതായത്, വ്യാസത്തെ നിശ്ചിത ഭാഗമോ മടങ്ങോ ആക്കി മാറ്റിയാൽ, ചുറ്റളവും അതേ ഭാഗമോ മടങ്ങോ ആയാണോ മാറുന്നത് ?

പല വ്യാസമുള്ള വൃത്തങ്ങൾക്കുള്ളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ മാറുന്നത്, വ്യാസം മാറുന്നതിന്റെ അതേ തോതിലാണെന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല.

ഇത്തരം സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ വശത്തിന്റെ നീളം മാറുന്നത്, ആരം മാറുന്ന അതേ തോതിൽ ത്തന്നെയാണെന്ന് **സദൃശത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



ഒരു വൃത്തത്തിനുള്ളിലും, അതിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങ് ആരമുള്ള വൃത്തത്തിനുള്ളിലും പല സമബഹുഭുജങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഓരോ ചിത്രത്തിലും വലിയ ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശം, ചെറിയ ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങു തന്നെയാണ്.

വ്യാസം, ആരത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങായതിനാൽ, ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങുതന്നെയാണ് വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം.

അതുപോലെ ബഹുഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ നിശ്ചിത മടങ്ങായതിനാൽ (ചിത്രങ്ങളിൽ മൂന്നു മടങ്ങും, നാലു മടങ്ങും, അഞ്ചു മടങ്ങും) ചെറിയ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങു തന്നെയാണ്, വലിയ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവ്.

അപ്പോൾ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവ് മാറുന്നത്, വ്യാസം മാറുന്നതിന്റെ തോതിലാണ്.

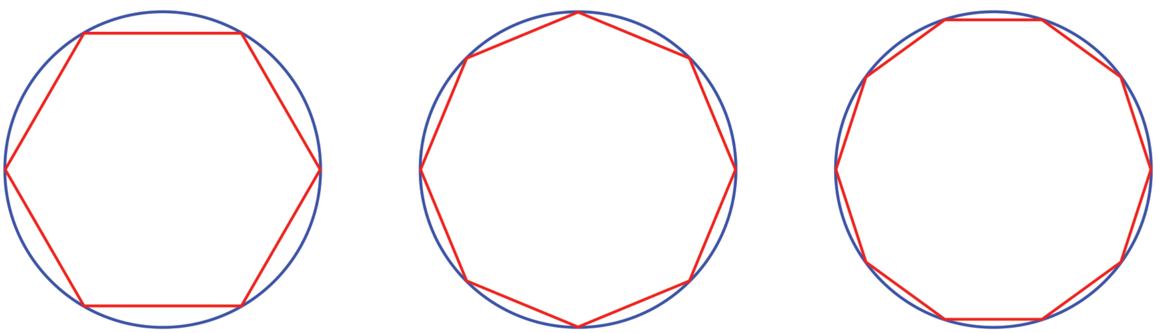
അതുകൊണ്ട്, വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവും വ്യാസങ്ങളുടെ തോതിലാണ് മാറുന്നത് എന്നു പറയാമോ ?

ഉദാഹരണമായി, വ്യാസം രണ്ടു മടങ്ങാക്കിയാൽ, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും രണ്ടു മടങ്ങാകുമോ ?

> ജിയോജിബ്രയിൽ *A* എന്ന ഒരു ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിൽ മറ്റൊരു ബിന്ദു *B* അടയാളപ്പെടുത്തുക. Min = 3, Max = 200 ആകത്തക്ക വിധം ഒരു *Integer slider 'n'* നിർമിക്കുക. *Angle with given size* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് *B* യിലും തുടർന്ന് *A* യിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവ് $(360/n)°$ എന്ന് നൽകുക. *Regular Polygon* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് *B* യിലും *B'* ലും ക്ലിക്കു ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ ബഹുഭുജത്തിന്റെ മൂലകളുടെ എണ്ണം *n* എന്ന് നൽകിയാൽ വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ *n* വശങ്ങളുള്ള ഒരു ബഹുഭുജം ലഭിക്കും. വശങ്ങളുടെ എണ്ണം വർദ്ധിപ്പിച്ചു നോക്കൂ, ബഹുഭുജത്തിന് എന്തു സംഭവിക്കുന്നു ?

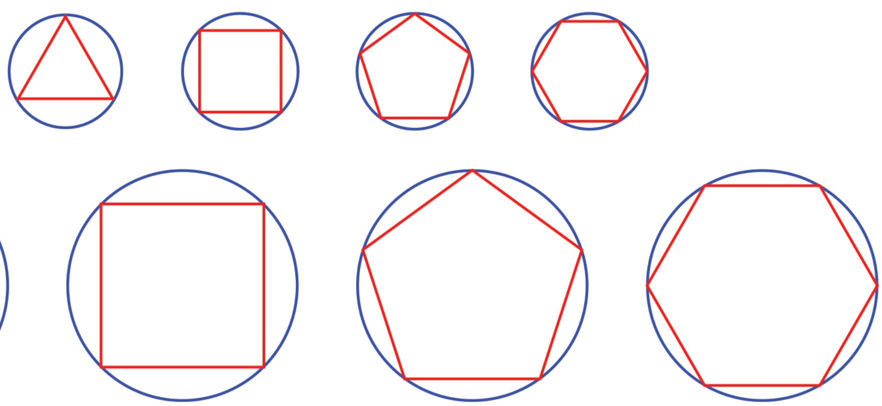
അതിന് മറ്റൊരു കാര്യംകൂടി ശ്രദ്ധിക്കണം: വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ വരയ്ക്കുന്ന ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുംതോറും, അത് വൃത്തത്തിനോട് കൂടുതൽ അടുക്കും.

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



6 വശം　　8 വശം　　10 വശം

ഇനി ഒരു വൃത്തത്തിലും, വ്യാസം രണ്ടു മടങ്ങായ വൃത്തത്തിലും, ബഹുഭുജങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നു എന്നു കരുതുക:



വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം രണ്ടു മടങ്ങായതിനാൽ, അതിലെ ബഹുഭുജങ്ങളുടെയെല്ലാം ചുറ്റളവ്, ചെറിയ വൃത്തത്തിലെ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്.

രണ്ടു വൃത്തത്തിലെയും ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ, അതതു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിലേക്കാണ് നീങ്ങുന്നത്.

അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കൂടുതൽ വ്യക്തമാകാൻ അല്പം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കാം.

- വലിയ വൃത്തത്തിലെ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ, ചെറിയ വൃത്തത്തിലെ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകളുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്.
    - ♦ ചെറിയ വൃത്തത്തിനുള്ളിലെ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് p_1, സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് p_2, സമപഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $p_3, \dots$ എന്നിങ്ങനെ എടുക്കാം
    - ♦ വലിയ വൃത്തത്തിലെ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ $2p_1, 2p_2, 2p_3, \dots$ എന്നിങ്ങനെയാണ്
- ചെറിയ വൃത്തത്തിലെ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ, ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.
    - ♦ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് c എന്നെടുക്കാം.
    - ♦ $p_1, p_2, p_3, \dots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ c എന്ന സംഖ്യയോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു
- വലിയ വൃത്തത്തിലെ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.
    - ♦ വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് d എന്നെടുക്കാം.
    - ♦ $2p_1, 2p_2, 2p_3, \dots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ d എന്ന സംഖ്യയോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു

മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന കാര്യങ്ങളിൽ, ചുവന്ന ചതുരങ്ങൾ കൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്തിയ രണ്ടെണ്ണം നോക്കൂ.

ഇതിൽ ആദ്യത്തേത് പറയുന്നത് $p_1, p_2, p_3, \dots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ c എന്ന സംഖ്യയോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു എന്നാണ്.

അതനുസരിച്ച്, $2p_1, 2p_2, 2p_3, \dots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ $2c$ എന്ന സംഖ്യയോട് അടുത്തടുത്തു വരണം.

പക്ഷേ, അടയാളപ്പെടുത്തിയ രണ്ടാമത്തെ കാര്യം പറയുന്നത്, $2p_1$, $2p_2$, $2p_3$, ... എന്നീ സംഖ്യകൾ d എന്ന സംഖ്യയോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു എന്നാണ്.

അപ്പോൾ $d = 2c$ ആകണമല്ലോ.

അതായത്, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്. രണ്ടാമത്തെ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം രണ്ടു മടങ്ങിനു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആണെങ്കിലും, ചുറ്റളവ് അതേ തോതിൽ മാറുമെന്ന് ഇതുപോലെ കാണാം.

ജിയോജിബ്രയിൽ Min = 0, Max = 10 ആകത്തക്ക വിധം d എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമ്മിക്കുക. ഇനി വ്യാസം d ആയ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കണം. ഇതിനായി *Circle : Centre & Radius* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ആരം $\frac{d}{2}$ ആയ ഒരു വൃത്തം വരച്ചാൽ മതി. *Distance or Length* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തത്തിൽ ക്ലിക്കുചെയ്താൽ അതിന്റെ ചുറ്റളവ് കാണാൻ കഴിയും. ഇത് *Algebra view* വിലും കാണാം. അവിടെ നിന്ന് അതിൽ *right click* ചെയ്ത് *Rename* എന്നതെടുത്ത് പേര് *'c'* എന്നാക്കി മാറ്റുക. സ്ലൈഡർ ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം മാറ്റിനോക്കൂ. ചുറ്റളവ് മാറുന്നത് വ്യാസത്തിന്റെ തോതിൽത്തന്നെയാണോ? $\frac{c}{d}$ എന്ന് *Input bar* ൽ നൽകിയാൽ ചുറ്റളവിനെ വ്യാസംകൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന സംഖ്യ *Algebra view* ൽ ലഭിക്കും. വ്യാസം മാറ്റുമ്പോൾ ഈ സംഖ്യയ്ക്ക് മാറ്റം വരുന്നുണ്ടോ ?

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ,

വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ മാറുന്നത്, വ്യാസങ്ങൾ മാറുന്ന അതേ തോതിലാണ്

അപ്പോൾ, വ്യാസം 1 ആയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണ്ടുപിടിച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ, ഏതു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കാനും ഈ സംഖ്യയെ വ്യാസംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി.

അതു ചെയ്യുന്നതിനു മുമ്പ്, ഇപ്പോൾ കണ്ട കാര്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചില കണക്കുകൾ ചെയ്യാം:

(1) വ്യാസം 2 മീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് ഏകദേശം 6.28 മീറ്ററാണെന്നു അളന്നു കണ്ടുപിടിച്ചു.

- (i) വ്യാസം 4 മീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവെത്രയാണെന്ന് അളക്കാതെ എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?
- (ii) വ്യാസം 1 മീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവോ ?
- (iii) വ്യാസം 3 മീറ്ററായാലോ ?

(2) ഒരു കമ്പി വളച്ച് 4 സെന്റിമീറ്റർ വ്യാസമുള്ള വൃത്തമുണ്ടാക്കി. ഇതിന്റെ പകുതി നീളമുള്ള കമ്പി വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമെന്തായിരിക്കും ?

പുതിയൊരു സംഖ്യ

വശത്തിന്റെ നീളം 1 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം പോലെ, വശത്തിന്റെ നീളം 2 ആയ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം പോലെ, വ്യാസം 1 ആയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയായി എഴുതാൻ കഴിയില്ല.

മറ്റ് അളവുകളെപ്പോലെ ഇതു തെളിയിക്കുക അത്ര എളുപ്പമല്ല; പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ് ഒരു തെളിവ് കണ്ടുപിടിച്ചത്.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}+\sqrt{3}$ പോലുള്ള സംഖ്യകളിൽനിന്ന് ഈ സംഖ്യയ്ക്ക് ഒരു പ്രധാന വ്യത്യാസമുണ്ട്; ഇതിനെ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയോ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെയോ മൂലങ്ങളോ അവയുടെ ക്രിയകളോ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാൻ കഴിയില്ല. ഗണിതത്തിൽ ഈ സംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഒരു പ്രത്യേക ചിഹ്നമുണ്ട്: π

ഗ്രീക്ക് ഭാഷയിലെ "പൈ" (pi) എന്ന അക്ഷരമാണിത്.

ഭിന്നസംഖ്യ അല്ലാത്തതിനാൽ π യോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാനേ കഴിയൂ. നാലു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ എടുത്താൽ

$$\pi \approx 3.1416$$

വ്യാസം 1 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് π സെന്റിമീറ്റർ; വ്യാസം 2 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 2π സെന്റിമീറ്റർ; വ്യാസം $1\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $\frac{3}{2}\pi$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെയാണ്. ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, അതിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ π മടങ്ങാണ്.

പലപ്പോഴും വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നത് നിശ്ചിത ആരത്തിൽ ആയതിനാൽ ഇക്കാര്യം ആരത്തിന്റെ കണക്കായാണ് സാധാരണയായി പറയുന്നത്:

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, അതിന്റെ ആരത്തിന്റെ 2π മടങ്ങാണ്.

ബി.സി.ഇ. മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടിൽ, ഗ്രീസിലെ ആർക്കിമീഡീസ് 96 വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജമുപയോഗിച്ച്, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വ്യാസത്തിന്റെ $3\frac{10}{71}$ നേക്കാൾ കൂടുതലും വ്യാസത്തിന്റെ $3\frac{1}{7}$ നേക്കാൾ കുറവുമാണെന്ന് കണക്കാക്കി. ഇന്നത്തെ രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, നാലു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ

$$3.1408 < \pi < 3.1428$$

(ആർക്കിമീഡീസിന്റെ $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ ആണ്, ഏറെക്കാലം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്).

സി.ഇ. പതിനാലാം നൂറ്റാണ്ടിൽ കേരളത്തിലെ മാധവൻ, എത്ര കൃത്യതയിലും π കണക്കാക്കാൻ, ജ്യാമിതി ഉപയോഗിക്കാതെ തികച്ചും സംഖ്യാപരമായ ഒരു മാർഗം കണ്ടുപിടിച്ചു. ഇതുപയോഗിച്ച്

$$\pi = 3.1415926535\ldots$$

എന്നെല്ലാം കണക്കാക്കാം.

ഇന്ന് കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച്, കോടിക്കണക്കിന് ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ കൃത്യമായി π കണക്കാക്കാൻ കഴിയും.

പ്രായോഗികപ്രശ്നങ്ങളിൽ സാധാരണയായി നാലു ദശാംശം വരെ മാത്രമേ π ഉപയോഗിക്കേണ്ടി വരാറുള്ളൂ. ഉദാഹരണമായി, ആരം 5 മീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കിയാൽ

$$\pi \times 2 \times 5 = 10\pi = 10 \times 3.1416 = 31.416 \text{ മീറ്റർ}$$

ജിയോജിബ്രയിൽ വ്യാസം 1 ആയ വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ് ? Options → Rounding → 15 Decimal Places എന്ന രീതിയിൽ 15 ദശാംശ സ്ഥാനം വരെ π കാണാൻ കഴിയും.

ചരിത്രത്തിലൂടെ π

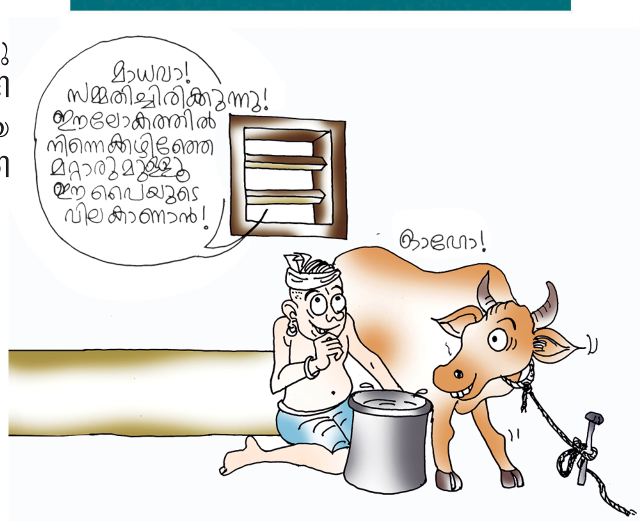
വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും കണക്കാക്കാനുള്ള മാർഗങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള ചിന്തകൾക്ക് നാലായിരത്തോളം ആണ്ടുകളുടെ പഴക്കമുണ്ട്. ഇന്നത്തെ ഭാഷയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഇവയെല്ലാം π എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ശ്രമങ്ങളായി വ്യാഖ്യാനിക്കാം.

പുരാതന ഈജിപ്തിൽ നിന്നുള്ള ആഹ്മോസ് പപ്പൈറസിൽ ഒരു കണക്കു ചെയ്തിരിക്കുന്ന രീതി നോക്കിയാൽ $\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3.16$ എന്നു കിട്ടും, ഏതാണ്ട് ഇക്കാലത്തുതന്നെയുള്ള (ബി.സി.ഇ. 1500) ബാബിലോണിയയിലെ ഒരു കളിമൺ പലകയിൽനിന്ന്, $\pi \approx \frac{25}{8} = 3.125$ എന്നു കണക്കാക്കാം. ബി.സി.ഇ. ഏഴാം നൂറ്റാണ്ടിലേതെന്നു കരുതപ്പെടുന്ന, ഇന്ത്യയിലെ ശതപഥബ്രാഹ്മണമെന്ന കൃതിയിൽ, ഇത് $\frac{339}{108} \approx 3.139$ ആണ്.

വൃത്തത്തിനകത്തും പുറത്തും 96 വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജം വരച്ച്, ആർക്കിമീഡീസ് കണ്ടുപിടിച്ചത്, $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ എന്നാണെന്ന് കണ്ടല്ലോ. അതായത് $3.1408 < \pi < 3.1428$

സി.ഇ 180 ൽ ചൈനയിലെ സു ചോങ്ഴി, ഈ രീതിയിൽ 12288 വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജങ്ങളുപയോഗിച്ച് $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ എന്നു കണ്ടുപിടിച്ചു.

ഇതിലെ ചെറിയ സംഖ്യ ഏഴു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ ശരിയാണ്. ഏതാണ്ട് ആയിരം കൊല്ലങ്ങൾക്കുശേഷമാണ് ഇതിനേക്കാൾ മെച്ചപ്പെട്ട വിലകൾ കണ്ടുപിടിച്ചത്.

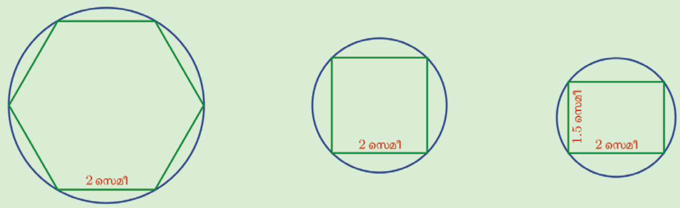


5 സെന്റിമീറ്റർ വ്യാസമുള്ള വൃത്തം വളച്ചുണ്ടാക്കാൻ, 5π സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള കമ്പി വേണം; അതായത് ഏകദേശം $5 \times 3.14 = 15.7$ സെന്റിമീറ്റർ.

ഇപ്പോൾ പാഠത്തിന്റെ തുടക്കത്തിലുള്ള ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരമായല്ലോ ?

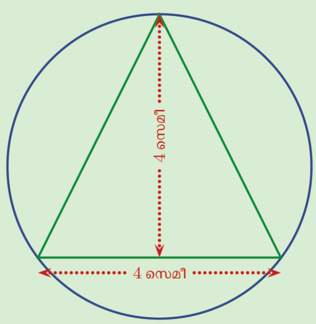
ഇനി ചുവടെയുള്ള കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ. ഇവയിലെല്ലാം അളവുകൾ π ഉപയോഗിച്ചുതന്നെ എഴുതിയാൽ മതി. ദശാംശരൂപം എഴുതി, ഏകദേശം തുല്യമായ അളവുകൾ കണക്കാക്കേണ്ടതില്ല.

(1) ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെയെല്ലാം ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.

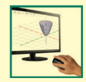


(2) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും 4 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ഞാണിന്റെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററാണ്. വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.

(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ, വൃത്തത്തിലെ മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ മൂലകളായി പാദവും ഉയരവും 4 സെന്റിമീറ്ററായ സമപാർശ്വത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.



ആരം $\frac{1}{2\pi}$ ആയ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ് ? ഇത്തരം ഒരു വൃത്തം ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കാൻ *Circle : Centre & Radius* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ക്ലിക്കു ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ ആരം 1/(2pi) എന്ന് നൽകിയാൽ മതി. ഇനി ചുറ്റളവ് 25 ആയ ഒരു വൃത്തം വരച്ചുനോക്കൂ.

π കേരളത്തിൽ

പതിനാലാം നൂറ്റാണ്ടിൽ കേരളത്തിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന, ജ്യോതിശാസ്ത്രജ്ഞനും ഗണിതകാരനുമായിരുന്നു മാധവൻ (ഇദ്ദേഹം സംഗമഗ്രാമ മാധവൻ എന്നാണ് ഇന്നറിയപ്പെടുന്നത്). π യുടെ അടുത്തുവരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ മാധവൻ ഉപയോഗിച്ച മാർഗം ഗണിതചരിത്രത്തിലെ ഒരു വഴിത്തിരിവാണ്. അതുവരെ ഉപയോഗിച്ചിരുന്ന ജ്യാമിതീയ മാർഗങ്ങളിൽനിന്നു വ്യത്യസ്തമായി, സംഖ്യാപരമായ മാർഗങ്ങളാണ് അദ്ദേഹം ഉപയോഗിച്ചത്.

$1, \quad 1-\frac{1}{3}, \quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}, \quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$

എന്നിങ്ങനെ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ വ്യൂൽക്രമങ്ങൾ കുറച്ചും കൂട്ടിയും തുടർന്നാൽ $\frac{\pi}{4}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്ന് അദ്ദേഹം കണ്ടുപിടിച്ചു.

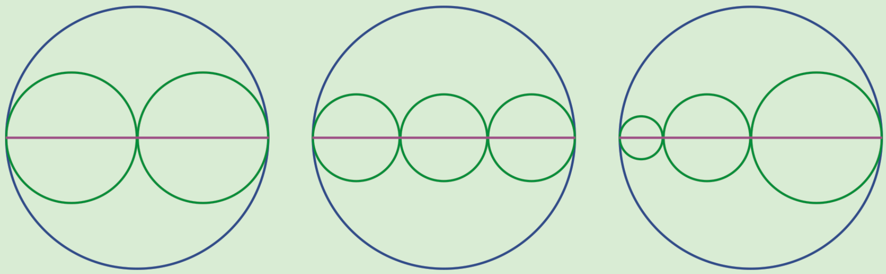
പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ സ്കോട്ട്ലാൻഡിലെ ഗ്രിഗറി, ജർമ്മനിയിലെ ലൈബ്നിറ്റ്സ് എന്നിവർ ഇതേ വസ്തുതതന്നെ അവരുടേതായ രീതികളിൽ വീണ്ടും കണ്ടുപിടിക്കുകയുണ്ടായി.

ഈ രീതിയിൽക്കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ വളരെ പതുക്കെയാണ് $\frac{\pi}{4}$ നെ സമീപിക്കുന്നത് എന്നൊരു പോരായ്മയുണ്ട്. ആർക്കിമീഡീസ് കണ്ടുപിടിച്ച സംഖ്യ കിട്ടാൻ ഏതാണ്ട് 4000 സംഖ്യകളുടെ ഇത്തരത്തിലുള്ള തുക വേണ്ടിവരും. എന്നാൽ മാധവൻ തന്നെ മറ്റൊരു രീതി ഉപയോഗിച്ച്

$$\pi \approx 3.14159265359$$

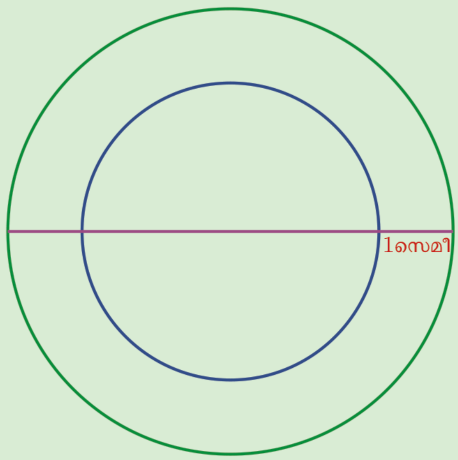
എന്നു കണ്ടുപിടിച്ചു.

(4) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിലെല്ലാം, വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ ഒരേ വരയിലാണ്. ആദ്യത്തെ രണ്ടു ചിത്രങ്ങളിൽ, ചെറിയ വൃത്തങ്ങൾക്ക് ഒരേ വ്യാസമാണ്.



എല്ലാ ചിത്രങ്ങളിലും, ചെറിയ വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകളുടെ തുകയാണ് വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എന്നു തെളിയിക്കുക.

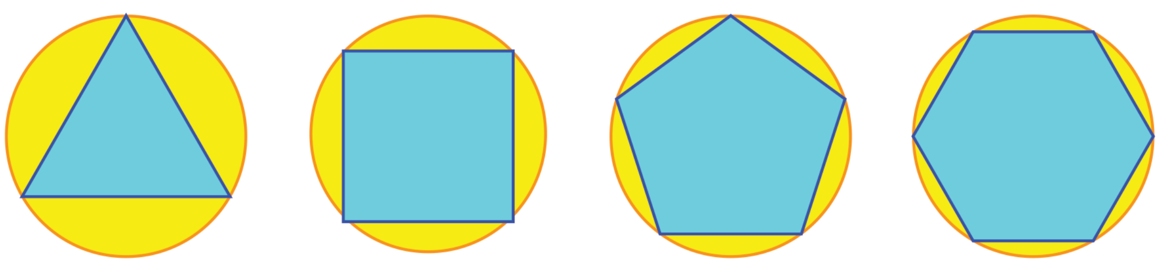
(5) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ, ഒരേ കേന്ദ്രമായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.



വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ് ?

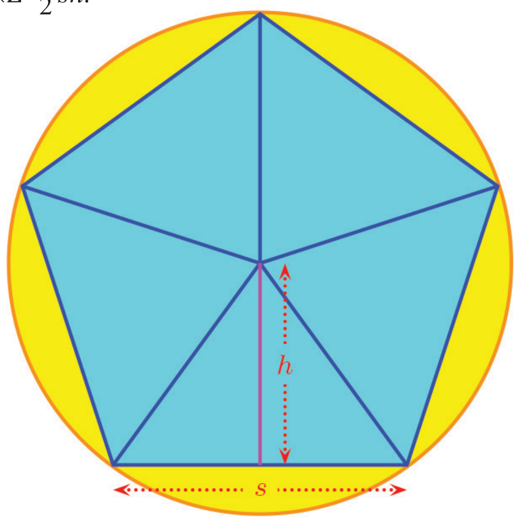
പരപ്പളവ്

വൃത്തത്തിനകത്തെ സമബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതനുസരിച്ച് അതിന്റെ ചുറ്റളവ് വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനോട് അടുക്കുന്നതുപോലെ, അതിന്റെ പരപ്പളവ് വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിനോടും അടുക്കും:



വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ, അതിനുള്ളിലെ സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കൂടുന്നു എന്നു കണക്കാക്കിയാൽ മതി. വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ബഹുഭുജത്തിന്റെ മൂലകളും യോജിപ്പിച്ച്, ബഹുഭുജത്തിനെ തുല്യത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കാം. ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടിയാൽ ബഹുഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കിട്ടും:

ഉദാഹരണമായി, വൃത്തത്തിനുള്ളിലെ പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം s എന്നും, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശത്തേയ്ക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ നീളം h എന്നുമെടുത്താൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}sh$.

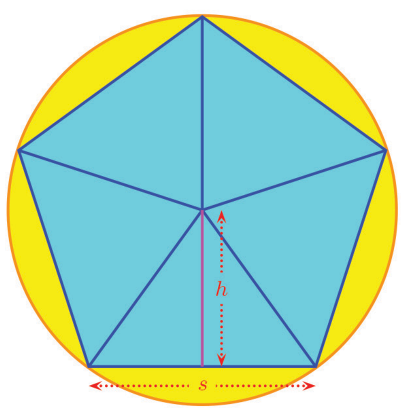


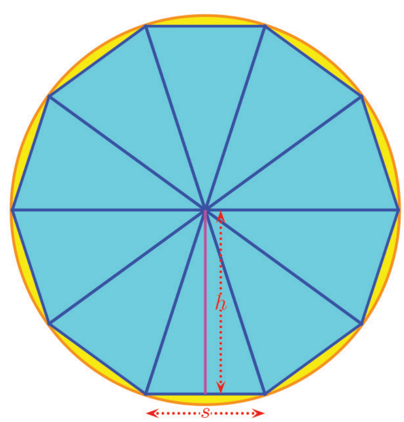
ഇത്തരം അഞ്ചു ത്രികോണങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് പഞ്ചഭുജം; അതിന്റെ മൊത്തം പരപ്പളവ്

$$5 \times \frac{1}{2}sh = \frac{1}{2} \times 5s \times h$$

ഇതിലെ s എന്നത് പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമായതിനാൽ, $5s$ എന്നത് പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണ്; ഇതിനെ p എന്നെടുത്താൽ, പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $\frac{1}{2}ph$.

പഞ്ചഭുജത്തിനു പകരം, വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ ഏതു സമബഹുഭുജമെടുത്താലും അതിന്റെ പരപ്പളവ്, ഇതുപോലെ ചുറ്റളവിന്റെയും കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള ലംബനീളത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണെന്നു കാണാം. വൃത്തത്തിനുള്ളിലെ ബഹുഭുജം മാറുമ്പോൾ, ചുറ്റളവും, ഈ ലംബനീളവും മാറും:





ചുറ്റളവിന്റെ കാര്യത്തിൽ എന്നപോലെ, ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് ഇതെല്ലാം എഴുതിനോക്കാം:

- വൃത്തത്തിനുള്ളിലെ സമഭുജത്രികോണം, സമചതുരം, സമപഞ്ചഭുജം, ... ഇവയുടെ ചുറ്റളവുകൾ $p_1, p_2, p_3, \dots$ എന്നും, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരു വശത്തേക്കുള്ള ലംബങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ $h_1, h_2, h_3, \dots$ എന്നും എടുക്കാം.
- വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നും, ചുറ്റളവ് c എന്നും എടുക്കാം.
    - $h_1, h_2, h_3, \dots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ r എന്ന സംഖ്യയുടെ അടുത്തടുത്തു വരും.
    - $p_1, p_2, p_3, \dots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ c എന്ന സംഖ്യയുടെ അടുത്തടുത്തു വരും.
- $\frac{1}{2}p_1h_1, \frac{1}{2}p_2h_2, \frac{1}{2}p_3h_3, \dots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ $\frac{1}{2}cr$ എന്ന സംഖ്യയോട് അടുത്തടുത്തുവരും.
    - $\frac{1}{2}p_1h_1, \frac{1}{2}p_2h_2, \frac{1}{2}p_3h_3, \dots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളാണ്.
    - ബഹുഭുജങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ അടുത്തടുത്തു വരും.
    - വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് a എന്നെടുക്കാം.
- $\frac{1}{2}p_1h_1, \frac{1}{2}p_2h_2, \frac{1}{2}p_3h_3, \dots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ a എന്ന സംഖ്യയോട് അടുത്തടുത്തുവരും.

മുകളിലെഴുതിയിരിക്കുന്നവയിൽ, ചുവന്ന ചതുരത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ രണ്ടു കാര്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$a = \frac{1}{2}cr$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതായത്,

വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, അതിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെയും ആരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നെടുത്താൽ ചുറ്റളവ് $2\pi r$, എന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

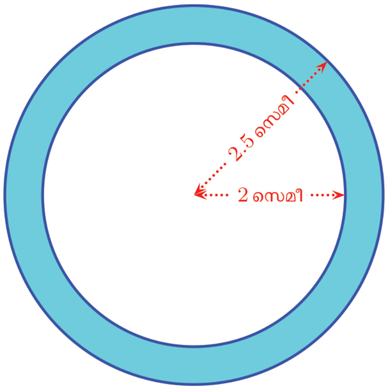
$$\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$$

വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ആരവർഗത്തിന്റെ π മടങ്ങാണ്.

ഉദാഹരണമായി, ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 25π ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

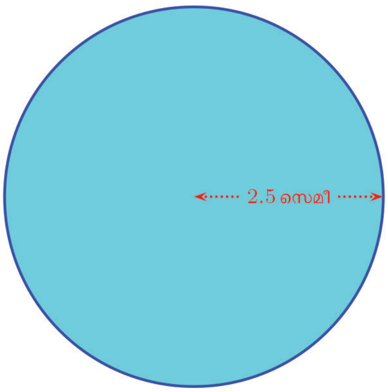
ഇനി ഇതുപയോഗിച്ചുള്ള മറ്റു ചില കണക്കുകൾ നോക്കാം.

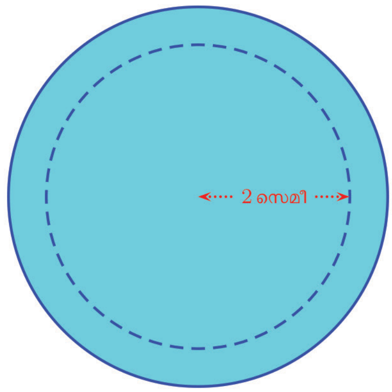
ഈ ചിത്രത്തിലെ വൃത്തവലയത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?



ആരം $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$ ആയ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്താണ്? ഇത്തരം ഒരു വൃത്തം ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കാൻ *Circle : Centre & Radius* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ക്ലിക്കു ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ ആരം sqrt (10/pi) എന്ന് നൽകിയാൽ മതി. Area ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തത്തിൽ ക്ലിക്കു ചെയ്താൽ പരപ്പളവ് കാണാൻ സാധിക്കും. ഇനി പരപ്പളവ് 25 ആയ ഒരു വൃത്തം വരച്ചുനോക്കൂ.

ഒരു വലിയ വൃത്തത്തിൽനിന്ന് ഒരു ചെറിയ വൃത്തം മുറിച്ചു മാറ്റിയതായി ഇതിനെ കാണാമല്ലോ.

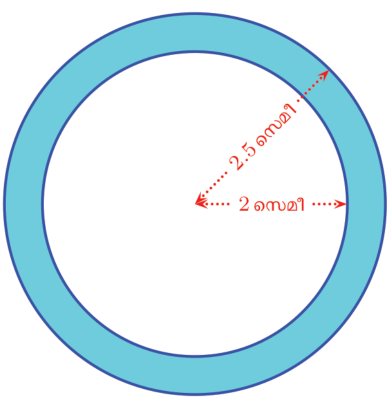


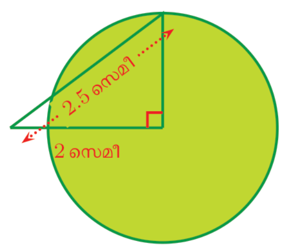


അപ്പോൾ വലയത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$6.25\pi - 4\pi = 2.25\pi \text{ ചസെമീ}$$

ഇനി ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ ഒരു മട്ടത്രികോണവും ഒരു വൃത്തവും വരച്ചാലോ?

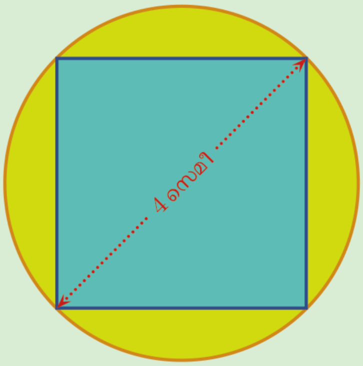


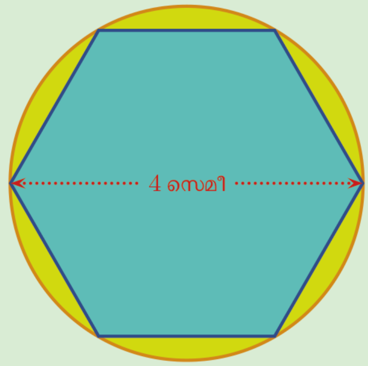


പച്ചവൃത്തത്തിന്റെയും നീലവലയത്തിന്റെയും പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?

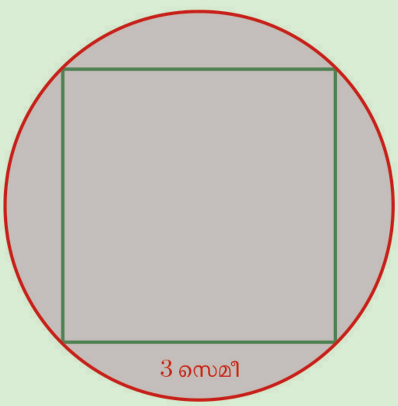
(1) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ഞാണിന്റെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററാണ്. വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

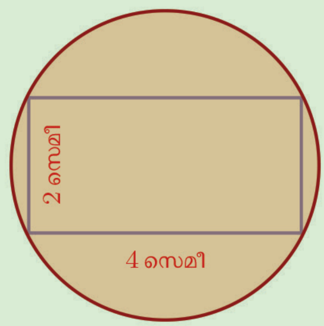
(2) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ, വൃത്തത്തിന്റെയും സമബഹുഭുജത്തിന്റെയും പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ കണക്കാക്കുക:





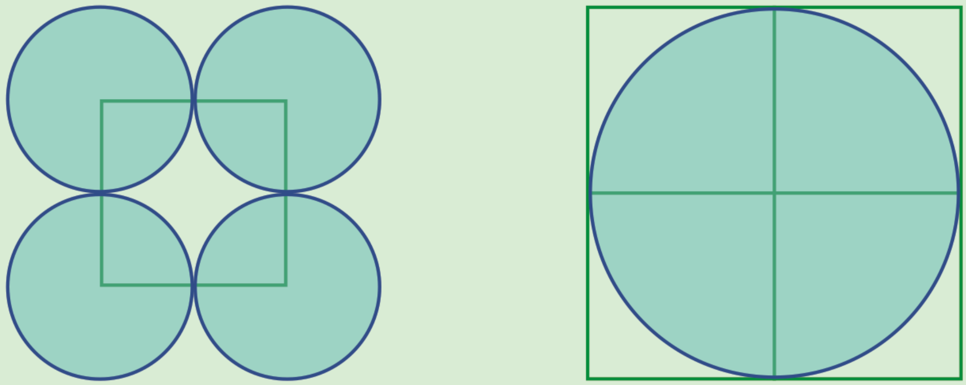
(3) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും, ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചത് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു:





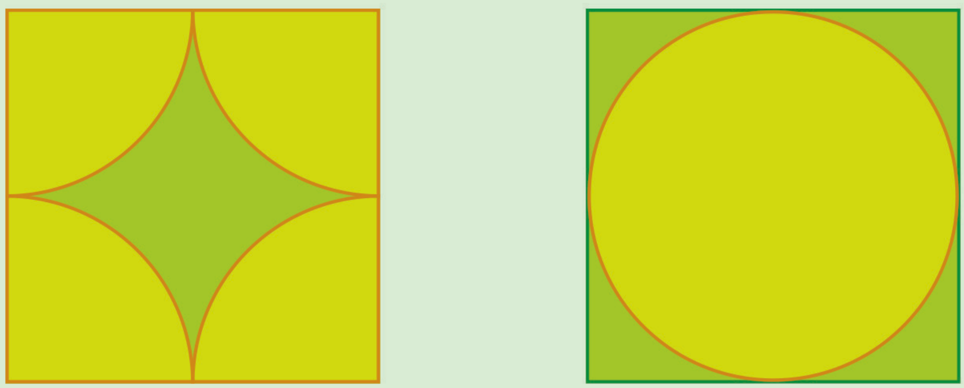
രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(4) ഒരു സമചതുരം വരച്ച്, അതിന്റെ നാലു മൂലകൾ കേന്ദ്രമായും, വശത്തിന്റെ പകുതി ആരമായും വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ അതേ വലുപ്പമുള്ള നാലു സമചതുരങ്ങൾ ചേർന്ന സമചതുരം വരച്ച്, അതിനുള്ളിൽ കൃത്യമായി ചേർന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുക:

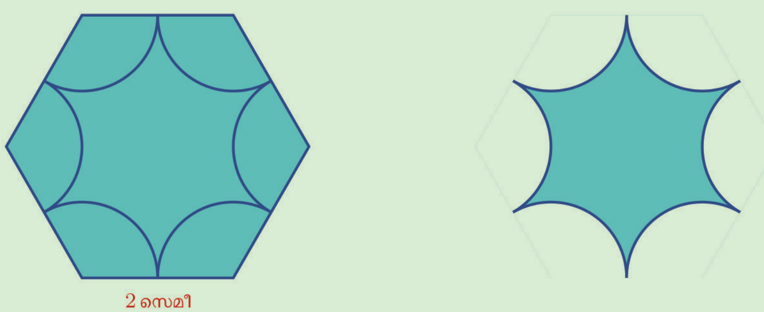


വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, നാലു ചെറുവൃത്തങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകളുടെ തുക യാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(5) ചുവടെയുള്ള രണ്ട് ചിത്രങ്ങളിലെയും സമചതുരങ്ങൾക്ക് ഒരേ വലുപ്പമാണ്. ചിത്രങ്ങളിലെ പച്ച ഭാഗങ്ങൾക്ക് ഒരേ പരപ്പളവാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

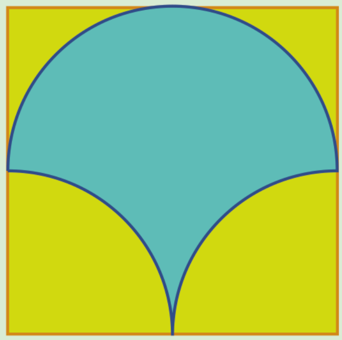


(6) ഒരു സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ മൂലകൾ കേന്ദ്രമായി വൃത്തഭാഗങ്ങൾ വരച്ച്, ചുവടെക്കാണുന്ന രൂപം വെട്ടിയെടുക്കുന്നു:



മുറിച്ചെടുത്ത രൂപത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(7) ഒരു സമചതുരത്തിനുള്ളിൽ, ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ വൃത്തഭാഗങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നു.



ചിത്രത്തിൽ നീലനിറം കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ പകുതിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

9

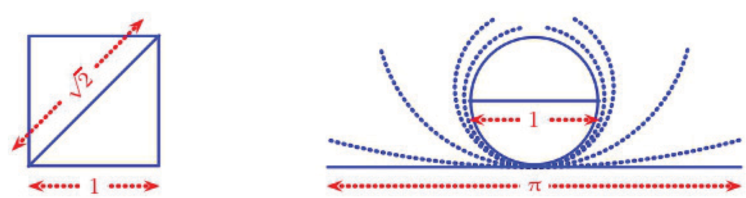
രേഖീയസംഖ്യകൾ

അളവുകളും സംഖ്യകളും

വരകളുടെ നീളങ്ങളെ സംഖ്യകളായി പറയുന്നതെങ്ങനെയാണ്? ഏതെങ്കിലും ഒരു നിശ്ചിത നീളം 1 എന്നെടുത്താൽ, അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് നീളം 2 എന്നും, പകുതി നീളത്തെ $\frac{1}{2}$ എന്നും, അതിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങ് നീളത്തെ $1\frac{1}{2}$ എന്നുമൊക്കെ പറയാം:

ഇങ്ങനെ 1 എന്നെടുക്കുന്ന നീളത്തെ, നീളത്തിന്റെ ഒരു ഏകകം (unit of length) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇത്തരമൊരു ഏകകം നിശ്ചയിക്കുന്നതോടെ, മറ്റു പല നീളങ്ങളെയും ഇപ്പോൾ കണ്ടതുപോലെ എണ്ണൽസംഖ്യകളായും ഭിന്നസംഖ്യകളായും പറയാം.

പക്ഷേ ഈ ഏകകത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഇങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകളായോ, ഭിന്നസംഖ്യകളായോ പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങളുമുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, വശത്തിന്റെ നീളം ഈ ഏകകമായ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണം, ഈ ഏകകം വ്യാസമായ വൃത്തം നിവർത്തിയ വരയുടെ നീളം:



അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളും കേവലസംഖ്യകളുടെ ക്രിയാബന്ധങ്ങളുമെല്ലാം ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളാക്കുമ്പോൾ സൗകര്യത്തിനായി ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട് (**ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠം). അപ്പോൾ, $\sqrt{2}$, π പോലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ന്യൂനമായ $-\sqrt{2}$, $-\pi$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകളും ആവശ്യമുണ്ട്.

എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കും, ഭിന്നസംഖ്യകൾക്കും അവയുടെ ന്യൂനങ്ങൾക്കും പൂജ്യത്തിനുമെല്ലാം പൊതുവായി **ഭിന്നകസംഖ്യകൾ (rational numbers)** എന്നാണ് പേര്; ഭിന്നകമായി പറയാൻ കഴിയാത്ത സംഖ്യകളെയെല്ലാം **അഭിന്നകസംഖ്യകൾ (irrational numbers)** എന്നും പറയുന്നു.

എണ്ണൽസംഖ്യകളെയും ഭിന്നരൂപത്തിൽ എഴുതാമല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, 5നെ $\frac{5}{1}$ എന്നോ, $\frac{10}{2}$ എന്നോ പലതരത്തിൽ എഴുതാം. അംശമോ ഛേദമോ ന്യൂന എണ്ണൽസംഖ്യയായെടുത്ത്, എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ന്യൂനങ്ങളെയും ഭിന്നരൂപത്തിലെഴുതാം. പൂജ്യത്തിനെയും ഭിന്നരൂപമായി $\frac{0}{1}, \frac{0}{2}$ എന്നിങ്ങനെയെല്ലാം എഴുതാം.

അപ്പോൾ ഭിന്നകങ്ങൾക്കെല്ലാം പൊതുവായ ഒരു രൂപമുണ്ട്: x, y എണ്ണൽസംഖ്യകളോ അവയുടെ ന്യൂനങ്ങളോ ആയ $\frac{x}{y}$; ഇതിൽ x പൂജ്യവും ആകാം.

എന്നാൽ അഭിന്നകങ്ങളിൽ $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ പോലെയുള്ള വർഗമൂലങ്ങളും, ഭിന്നകങ്ങളുടെ ക്രിയകളായൊന്നും പറയാൻ കഴിയാത്ത π പോലുള്ള സംഖ്യകളും എല്ലാമുണ്ട്; നിയതമായ ഒരു പൊതു രൂപത്തിലും അവയെ തളയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല.

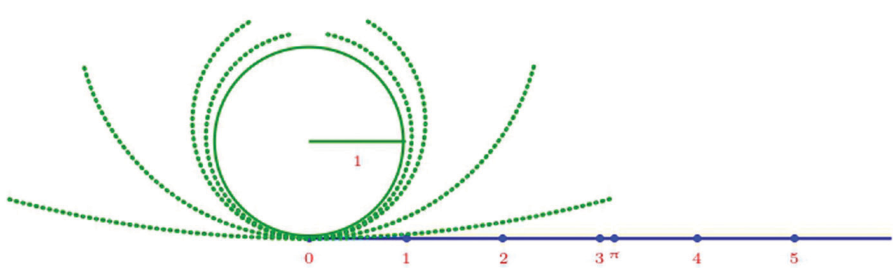
സംഖ്യകളും ജ്യാമിതിയും

ഏത് അധിസംഖ്യയെയും ഒരു നീളമായി കാണാമല്ലോ. ഈ നീളങ്ങളെല്ലാം ഒരു സ്ഥാനത്തുനിന്നു തുടങ്ങുന്നതായി കരുതിയാലോ ?

ഇതു കുറേക്കൂടി വ്യക്തമാകാൻ, ഒരു വരയും അതിന്റെ ഇടത്തെ അറ്റത്ത് ഒരു ബിന്ദുവും, അതിന്റെ വലതു വശത്ത് മറ്റൊരു ബിന്ദുവും സങ്കല്പിക്കുക.

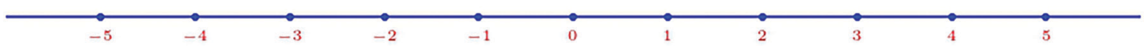
ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം 1 (ഏകകം) ആയി എടുത്ത്, വലതു വശത്തുള്ള പല ബിന്ദുക്കളുടെയും അകലം സംഖ്യകളായി എഴുതാമല്ലോ.

എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും അകലം അടയാളപ്പെടുത്തണമെങ്കിൽ, അഭിന്നക സംഖ്യകളും വേണ്ടിവരും.



ഈ വര 0 എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് ഇടത്തോട്ടും നീട്ടാമല്ലോ; ആ ഭാഗത്തെ ബിന്ദുക്കളെ എങ്ങനെ സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്തും ?

അതിന് വലതുവശത്തെ സംഖ്യകളുടെ ന്യൂനങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം. **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **സ്ഥാനവും സംഖ്യയും** എന്ന ഭാഗത്തിൽ ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്തിയത് ഓർക്കുക:



ഭിന്നകസംഖ്യകളെയും അഭിന്നകസംഖ്യകളെയും എല്ലാം ഈ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളായി സങ്കല്പിക്കാം; മറിച്ച്, ഈ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളെയെല്ലാം ഇത്തരം സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നതായും സങ്കല്പിക്കാം.

ഇങ്ങനെ ഒരു വരയിലെ ബിന്ദുക്കളായി കാണാം എന്നതിനാൽ, ഭിന്നകങ്ങളും, അഭിന്നകങ്ങളും ആയ എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും പൊതുവായി **രേഖീയസംഖ്യകൾ (real numbers)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. മറിച്ച്, ബിന്ദുക്കളെയെല്ലാം പൂജ്യത്തിൽനിന്നുള്ള അകലം അനുസരിച്ച് സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്തിയ വരയെ **സംഖ്യാരേഖ (number line)** എന്നും പറയുന്നു.

സംഖ്യാരേഖയിൽ 0 എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വലത്തേയ്ക്ക് നീങ്ങുംതോറും സംഖ്യകൾ വലുതാകുന്നുണ്ടല്ലോ. ഇടത്തേയ്ക്ക് നീങ്ങുമ്പോഴോ ?

−1, −2 ഇവയിൽ ഏതാണ് വലുത് ?

−1 എന്നാൽ പൂജ്യത്തിൽ നിന്ന് 1 കുറവ്. −2 ആയാലോ? പൂജ്യത്തിൽ നിന്ന് 2 കുറവ്; അതായത് −1 ൽ നിന്ന് വീണ്ടും 1 കുറവ്. അതിനാൽ −2 ആണ് −1 നേക്കാൾ ചെറിയ സംഖ്യ.

ഗണിതഭാഷയിൽ

$$-2 < -1$$

അപ്പോൾ സംഖ്യാരേഖയിൽ പൂജ്യത്തിൽനിന്ന് വലത്തോട്ടു നീങ്ങുമ്പോൾ വലിയ സംഖ്യകളും, ഇടത്തോട്ടു നീങ്ങുമ്പോൾ ചെറിയ സംഖ്യകളുമാണ് കാണുന്നത്.

പൂജ്യത്തിനുപകരം, ഏതു സ്ഥാനത്തുനിന്നു തുടങ്ങിയാലും ഇതുതന്നെയാണല്ലോ സംഭവിക്കുന്നത്.

സംഖ്യകൾ പലതരം

1, 2, 3, . . . എന്നിങ്ങനെയുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകളിലൂടെയാണ്, കണക്കു തുടങ്ങുന്നത്. തുടർന്ന് സംഖ്യകൾ എഴുതാനും മറ്റുമുള്ള ആവശ്യങ്ങൾക്കായി 0 എന്ന സംഖ്യയും ഉപയോഗിച്ചു തുടങ്ങി.

നീളം, ഭാരം, സമയം എന്നിവ അളക്കാനായി ഭിന്നസംഖ്യകളും ആവശ്യമായിവന്നു. എല്ലാ നീളങ്ങളെയും ഒരു ഏകകത്തിന്റെ മാത്രം ഭാഗമോ, മടങ്ങോ ആയി പറയാൻ കഴിയില്ല എന്നതിനാലാണ് അഭിന്നകസംഖ്യകൾ ആവശ്യമായി വന്നത്.

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കുമ്പോഴുള്ള ചില സൗകര്യങ്ങൾക്കായി, ഈ സംഖ്യകളുടെയെല്ലാം ന്യൂനവും ഉപയോഗിച്ചു തുടങ്ങി. ഇങ്ങനെയുള്ള എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും പൊതുവായുള്ള പേരാണ് രേഖീയ സംഖ്യകൾ.

ഇവയിൽ ഭിന്നസംഖ്യാ രൂപത്തിൽ എഴുതാൻ കഴിയുന്നവയ്ക്ക് ഭിന്നകസംഖ്യകൾ എന്നും, അല്ലാത്തവയ്ക്ക് അഭിന്നകസംഖ്യകൾ എന്നും പേരിട്ടു.

എണ്ണൽസംഖ്യകളും, അവയുടെ ന്യൂനങ്ങളും, പൂജ്യവും എല്ലാം ഭിന്നകസംഖ്യകളാണ്. ഇവയെ പൂർണ്ണസംഖ്യകൾ (integers) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

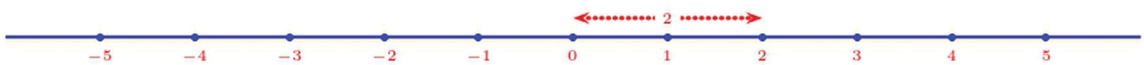
അപ്പോൾ ഏതു രണ്ടു രേഖീയസംഖ്യകൾ എടുത്താലും, സംഖ്യാരേഖയിൽ ഇവയിലെ വലിയ സംഖ്യയുടെ സ്ഥാനം, ചെറിയ സംഖ്യയുടെ വലതു ഭാഗത്തായിരിക്കും.

അങ്ങനെ വലുത്, ചെറുത് എന്ന സംഖ്യാബന്ധം, സംഖ്യാരേഖയിൽ വലത്, ഇടത് എന്ന ജ്യാമിതീയ ബന്ധമായി മാറുന്നു.

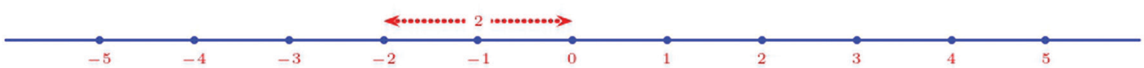
ഇനി സംഖ്യകളെ ബിന്ദുക്കളായി അടയാളപ്പെടുത്തിയ ജ്യാമിതീയരീതി, പുതിയൊരു സംഖ്യാക്രിയ യിലേക്കു നയിക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

കേവലമൂല്യം

ബിന്ദുക്കളെ സംഖ്യകളായി അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത് 0 എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നുള്ള അകലമനുസരിച്ചാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, 2 എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുവും, 0 എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം 2.



ഇതേ അകലത്തിൽ 0 എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ഇടതുവശത്തുള്ള ബിന്ദുവിനെയാണ് −2 എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തിയത്.



അപ്പോൾ 0 വും −2 ഉം തമ്മിലുള്ള അകലവും 2 തന്നെ.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ,

- സംഖ്യാരേഖയിൽ പൂജ്യവും ഒരു അധിസംഖ്യയും തമ്മിലുള്ള അകലം, ആ സംഖ്യതന്നെ.
- പൂജ്യവും ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയും തമ്മിലുള്ള അകലം, ആ സംഖ്യയുടെ ന്യൂനചിഹ്നം കളഞ്ഞാൽ കിട്ടുന്ന അധിസംഖ്യയാണ്.

ഉദാഹരണമായി,

$$0, 5\frac{1}{2} \text{ ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം } 5\frac{1}{2}$$

$$0, -5\frac{1}{2} \text{ ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം } 5\frac{1}{2}$$

ഇത് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച്, 0, x എന്നീ സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അകലമായി എങ്ങനെ പറയും? (സംഖ്യകളെ അക്ഷരങ്ങളായെഴുതുമ്പോൾ, ന്യൂനസംഖ്യയാണോ അധിസംഖ്യയാണോ എന്നൊന്നും നോക്കാതെ രണ്ടു തരത്തിലുള്ള സംഖ്യകളെയും x, y എന്നൊക്കെ ഒരുപോലെയാണല്ലോ എഴുതുന്നത്).

അപ്പോൾ ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയുടെ ന്യൂനചിഹ്നം കളയുക എന്നതിനെ മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറയണം. ഒരു അധിസംഖ്യയുടെ ന്യൂനത്തിന്റെ ന്യൂനം അതേ സംഖ്യയാണെന്ന് **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടത് ഓർക്കുക.

ഉദാഹരണമായി

$$-(-2) = 2$$

അതായത്, ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയുടെ ന്യൂനം കളയുക എന്നതിനു പകരം, അതിന്റെ ന്യൂനമെടുക്കുക എന്നു പറഞ്ഞാൽ മതി. അപ്പോൾ x ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, ന്യൂനചിഹ്നം കളഞ്ഞ അധിസംഖ്യ കിട്ടാൻ $-x$ എടുത്താൽ മതി; ഉദാഹരണമായി $x = -3$ ആണെങ്കിൽ

$$-x = -(-3) = 3$$

ഇനി സംഖ്യാരേഖയിൽ x എന്നൊരു ന്യൂനസംഖ്യയും പൂജ്യവും തമ്മിലുള്ള അകലം $-x$ എന്നു പറയാം.

ഇങ്ങനെ $x > 0$ ആണെങ്കിൽ (അതായത് x അധിസംഖ്യയാണെങ്കിൽ) x തന്നെയായും, $x < 0$ ആണെങ്കിൽ (അതായത് x ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ) $-x$ ആയും എടുക്കുന്ന ക്രിയയെ ചുരുക്കി $|x|$ എന്നാണെഴുതുന്നത്. ഇതിനെ x ന്റെ **കേവലമൂല്യം** (absolute value) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി

$$|5| = 5 \qquad |-5| = 5$$

$$\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} \qquad \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

$$|\pi| = \pi \qquad |-\pi| = \pi$$

പൂജ്യത്തിന്റെ കേവലമൂല്യം പൂജ്യം തന്നെയായിട്ടാണ് എടുക്കുന്നത്.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ

$x > 0$ ആണെങ്കിൽ $|x| = x$

$x < 0$ ആണെങ്കിൽ $|x| = -x$

$x = 0$ ആണെങ്കിൽ $|x| = 0$

ഇത് ഒറ്റ സമവാക്യമായി ഇങ്ങനെ എഴുതാം

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \text{ ആണെങ്കിൽ} \\ -x, & x < 0 \text{ ആണെങ്കിൽ} \\ 0, & x = 0 \text{ ആണെങ്കിൽ} \end{cases}$$

ഇതുവരെ പറഞ്ഞതെല്ലാം ചുരുക്കി ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

സംഖ്യാരേഖയിൽ പൂജ്യം സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവും, മറ്റൊരു സംഖ്യ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം, ഈ സംഖ്യയുടെ കേവലമൂല്യമാണ്.

ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാൽ

സംഖ്യാരേഖയിൽ 0 സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവും, x എന്ന സംഖ്യ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം $|x|$.

ഇനി സംഖ്യകളുടെ കേവലമൂല്യം എന്ന ഈ ആശയത്തിന്റെ ചില പ്രത്യേകതകൾ നോക്കാം:

ഉദാഹരണമായി, ഒരു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ ന്യൂനത്തിന്റെയും കേവലമൂല്യങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

ഉദാഹരണമായി

$$|3| = 3 = |-3|$$

എന്നു കണ്ടു.

-3 ആണ് ആദ്യത്തെ സംഖ്യയായി എടുക്കുന്നതെങ്കിലോ? $-(-3) = 3$ എന്ന് നേരത്തെ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ -3 ന്റെയും, അതിന്റെ ന്യൂനത്തിന്റെയും കേവലമൂല്യം 3 തന്നെ.

$$|-3| = |3| = |-(-3)|$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ

ഏതു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ ന്യൂനത്തിന്റെയും കേവലമൂല്യം ഒരേ (അധി)സംഖ്യയാണ്.

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാലോ?

x ഏതു സംഖ്യ ആയാലും, $|-x| = |x|$

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

അധിസംഖ്യ ആയാലും ന്യൂനസംഖ്യ ആയാലും വർഗം അധിസംഖ്യതന്നെയാണല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$
$$(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$$

ഇനി

$$|5| = |-5| = 5$$

ആയതിനാൽ

$$|5|^2 = 5^2$$
$$|-5|^2 = 5^2 = (-5)^2$$

5, -5 ഇവയ്ക്കു പകരം ഏത് സംഖ്യകളെടുത്താലും ഇതു ശരിയാകുമല്ലോ.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ

x ഏതു സംഖ്യ ആയാലും $|x|^2 = x^2$.

(1) ചുവടെയുള്ള പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കുക.

x	y	xy	$\|x\|$	$\|y\|$	$\|xy\|$	$\|x\|\ \|y\|$
4	3	12	4	3	12	12
-4	3					
4	-3					
-4	-3					

(i) x, y ആയി കൂടുതൽ സംഖ്യകൾ എടുത്ത് പട്ടിക വലുതാക്കുക. $|xy|$ ഉം $|x|\,|y|$ ഉം തമ്മിൽ പൊതുവായി എന്തെങ്കിലും ബന്ധം ഉണ്ടോ ?

(ii) x, y ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളായാലും $|xy| = |x|\,|y|$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) ചുവടെയുള്ള പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കുക.

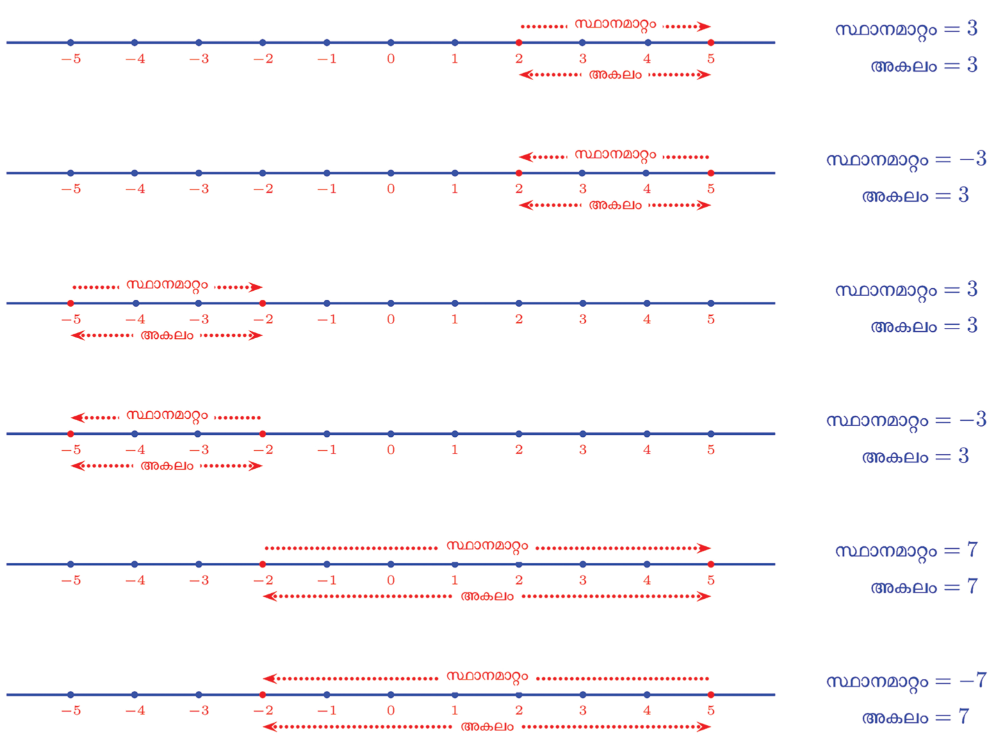
x	y	$x+y$	$\lvert x\rvert$	$\lvert y\rvert$	$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	$\lvert x+y\rvert$
3	5	8	3	5	8	8
–3	5	2	3	5	8	2
3	–5					
–3	–5					

x, y ആയി കുറേക്കൂടി സംഖ്യകൾ എടുത്ത് പട്ടിക വലുതാക്കുക. $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ ഉം $\lvert x + y\rvert$ ഉം തമ്മിൽ പൊതുവായി എന്തെങ്കിലും ബന്ധം പറയാമോ ?

അകലങ്ങൾ

സംഖ്യാരേഖയിൽ 0 എന്ന സംഖ്യയും x എന്ന സംഖ്യയും തമ്മിലുള്ള അകലം $\lvert x\rvert$ എന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇനി ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം ബീജഗണിതത്തിൽ എങ്ങനെ എഴുതുമെന്നു നോക്കാം.

ന്യൂനസംഖ്യകൾ എന്ന പാഠത്തിൽ, ഒരു വരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനമാറ്റം കണക്കാക്കിയത് ഓർമയുണ്ടോ? സംഖ്യാരേഖയിൽ ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മറ്റൊന്നിലേക്കുള്ള അകലം ഉപയോഗിച്ചല്ലേ സ്ഥാനമാറ്റം എഴുതിയത്? വലത്തേക്കുള്ള സ്ഥാനമാറ്റം അകലംതന്നെ; ഇടത്തോട്ടുള്ളത്, അകലത്തെ ന്യൂനസംഖ്യ ആക്കിയതും.



അപ്പോൾ സ്ഥാനമാറ്റം അധിസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, ആ സംഖ്യതന്നെയാണ് സ്ഥാനങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം; സ്ഥാനമാറ്റം ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, ന്യൂനം മാറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന അധിസംഖ്യയാണ് അകലം. അതായത്, സ്ഥാനമാറ്റത്തിന്റെ കേവലമൂല്യമാണ് അകലം.

സംഖ്യാരേഖയിൽ x എന്ന സംഖ്യയിൽ നിന്ന് y എന്ന സംഖ്യയിലേക്കുള്ള സ്ഥാനമാറ്റം $y - x$ ആണെന്ന് **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ.

അപ്പോൾ x, y എന്നീ സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $|y - x|$

ഏതു സംഖ്യയ്ക്കും, അതിന്റെ ന്യൂനത്തിനും ഒരേ കേവലമൂല്യമാണെന്നു കണ്ടല്ലോ; $y - x$ ന്റെ ന്യൂനം

$$-(y - x) = x - y$$

എന്നും കണ്ടിട്ടുണ്ട്. അതായത്, $|y - x| = |x - y|$

അപ്പോൾ

സംഖ്യാരേഖയിൽ x, y എന്നീ സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $|x - y|$

ഇത് സാധാരണ ഭാഷയിൽ മറ്റൊരു തരത്തിലും പറയാം.

x, y എന്നീ സംഖ്യകളിൽ x ആണ് വലിയ സംഖ്യയെങ്കിൽ $x - y$ അധിസംഖ്യ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ $|x - y| = x - y$

ഇനി y ആണു വലുതെങ്കിൽ $x - y$ ന്യൂനസംഖ്യയാണ്; അതിനാൽ

$$|x - y| = -(x - y) = y - x$$

അപ്പോൾ പൊതുവെ എന്തു പറയാം ?

സംഖ്യാരേഖയിൽ രണ്ടു സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം, വലിയ സംഖ്യയിൽനിന്നു ചെറിയ സംഖ്യ കുറച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യയാണ്.

ഉദാഹരണമായി, $4\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{4}$ എന്നീ സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം,

$$6\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2} = 1\frac{3}{4}$$

$4\frac{1}{2}$, $-6\frac{1}{4}$ ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലമോ ?

$$4\frac{1}{2} - \left(-6\frac{1}{4}\right) = 4\frac{1}{2} + 6\frac{1}{4} = 10\frac{3}{4}$$

ഇതിൽനിന്നു മറ്റൊരു തിരിച്ചറിവും കിട്ടും.

x, y എന്ന രണ്ടു സംഖ്യകളിൽ, വലുതിൽനിന്നു ചെറുത് കുറയ്ക്കുക എന്ന ക്രിയയുടെ ബീജഗണിത രൂപമാണ് $|x - y|$.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

$|x - 1| = 3$ ആകണമെങ്കിൽ x ഏതൊക്കെ സംഖ്യകളാകാം ?

ഇത് പലതരത്തിൽ ചെയ്യാം. ജ്യാമിതീയമായി നോക്കിയാൽ $|x - 1|$ എന്നത്, സംഖ്യാരേഖയിൽ x, 1 എന്നീ സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അകലമാണ്. ഈ അകലം 3 ആകണം.

1 ന്റെ വലതുവശത്ത്, അകലം 3 ആയുള്ളത് $1 + 3 = 4$ ആണ്.

1 ന്റെ ഇടതുവശത്ത്, അകലം 3 ആയുള്ളത് $1 - 3 = -2$ ഉം.

അപ്പോൾ $x = 4$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -2$

ഇനി ബീജഗണിതരീതിയിൽ ആലോചിച്ചാലോ ?

$x > 1$ ആണെങ്കിൽ $|x - 1| = x - 1$ ആണല്ലോ $x - 1 = 3$ ആകണമെങ്കിൽ $x = 4$ ആകണം.

$x < 1$ ആയാലോ ? അപ്പോൾ $|x - 1| = 1 - x$ ആണ്. $1 - x = 3$ ആകണമെങ്കിൽ $x = 1 - 3 = -2$ ആകണം.

ചോദ്യം അൽപം മാറ്റി ഇങ്ങനെയാക്കിയാലോ ?

$|x + 1| = 3$ ആകണമെങ്കിൽ x ഏതൊക്കെ സംഖ്യകളാകാം ?

ജ്യാമിതീയമായി ഇതു ചെയ്യാൻ, $|x + 1|$ നെ ഒരു അകലമായി കാണണം. സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിന്റെ കേവലമൂല്യമാണല്ലോ അകലമായി കിട്ടുന്നത്. അപ്പോൾ ആദ്യം $x + 1$ നെ തുകയ്ക്കു പകരം വ്യത്യാസമായി എഴുതണം.

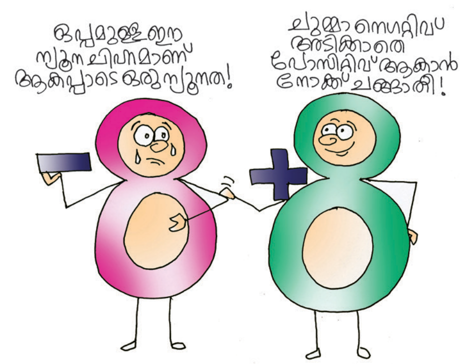
$$x + 1 = x - (-1)$$

ഇതുപയോഗിച്ച് $|x + 1| = |x - (-1)|$ എന്നെഴുതിയാൽ, $|x + 1|$ എന്നത് x ഉം -1 ഉം തമ്മിലുള്ള അകലമാണെന്ന് കാണാം.

ഇനി ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ ചെയ്തതുപോലെ -1 ന്റെ വലതുവശത്ത് 3 അകലത്തിലുള്ള ബിന്ദു $-1 + 3 = 2$ എന്നും, ഇടതുവശത്ത് അകലം 3 ആയ ബിന്ദു $-1 - 3 = -4$ എന്നും കാണാം.

മറ്റൊരു കണക്ക് നോക്കാം.

$|x - 1| < 3$ ആകണമെങ്കിൽ x ഏതൊക്കെ സംഖ്യകൾക്ക് ഇടയിലായിരിക്കണം ?

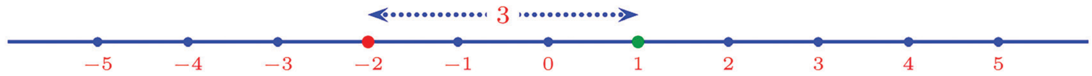


ഇതും ജ്യാമിതീയമായി ആലോചിക്കുകയാണ് എളുപ്പം:

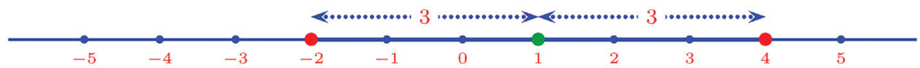
- $|x - 1| < 3$ എന്നതിന്റെ ജ്യാമിതീയമായ അർഥം, x എന്ന ബിന്ദുവും 1 എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം 3 നേക്കാൾ കുറവ് എന്നാണല്ലോ.
- x എന്ന ബിന്ദു, 1 എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ വലത്തോ, ഇടത്തോ ആകാം; 1 ൽനിന്നുള്ള അകലം 3 ൽ കുറവാകണമെന്നു മാത്രം

★ 1 ന്റെ വലത്ത്, അകലം 3 ആയ സംഖ്യ $1 + 3 = 4$

★ 1 ന്റെ ഇടത്ത്, അകലം 3 ആയ സംഖ്യ $1 - 3 = -2$



- $|x - 1| < 3$ ആകണമെങ്കിൽ, x എന്ന സംഖ്യ -2 നും 4 നും ഇടയ്ക്കാകണം; അതായത് $-2 < x < 4$



(1) ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ സമവാക്യവും ശരിയാകുന്ന x കണക്കാക്കുക.

(i) $|x| = 5$ (ii) $|x - 3| = 2$

(iii) $|x - 2| = 3$ (iv) $|x + 2| = 3$

(2) ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ വാക്യവും ശരിയാകാൻ x ഏതൊക്കെ സംഖ്യകൾക്ക് ഇടയിലായിരിക്കണം എന്നു കണക്കാക്കുക.

(i) $|x| < 3$ (ii) $|x - 2| < 1$

(iii) $|x - 1| < 2$ (iv) $|x + 1| < 2$

(3) രണ്ടാമത്തെ കണക്കിലെ വാക്യങ്ങൾ ഓരോന്നും ശരിയാകുന്ന പൂർണസംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണെന്ന് കണക്കാക്കുക.

ചെറുതും വലുതും

$|x - 3| < 5$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകാൻ, x എന്ന സംഖ്യ -2 നും 8 നും ഇടയ്ക്ക് ആകണം; അതായത് $-2 < x < 8$

$|x - 3| > 5$ ആകണമെങ്കിലോ ?

x എന്ന സംഖ്യ, 3 ന്റെ വലത്ത്, അകലം 5 നേക്കാൾ കൂടിയ സ്ഥാനത്ത് ആയാൽ ഇതു ശരിയാകും; അല്ലെങ്കിൽ 3 ന്റെ ഇടത്ത് അകലം 5 നേക്കാൾ കൂടിയ സ്ഥാനത്താണെങ്കിലും ഇതു ശരിയാകും.

അപ്പോൾ ഈ നിബന്ധന ശരിയാകാൻ x എന്ന സംഖ്യ ഒന്നുകിൽ -2 നേക്കാൾ ചെറുതാകണം; അല്ലെങ്കിൽ 8 നേക്കാൾ വലുതാകണം' അതായത് $x < -2$ അല്ലെങ്കിൽ $x > 8$

മധ്യബിന്ദു

സംഖ്യാരേഖയിൽ, 2, 4 എന്നീ സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കളുടെ കൃത്യം നടുക്കു വരുന്ന ബിന്ദു, ഏതു സംഖ്യയെ ആണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ?

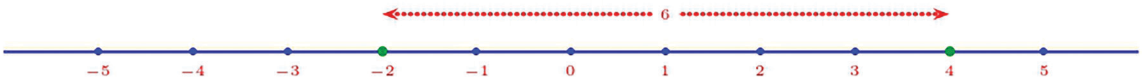
ഈ സംഖ്യ 3 ആണെന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ലല്ലോ. അപ്പോൾ ജ്യാമിതീയമായി 3 നെ 2 ന്റെയും 4 ന്റെയും **മധ്യബിന്ദു (midpoint)** എന്നു വിളിക്കാം.

അപ്പോൾ -2 ന്റെയും 4 ന്റെയും മധ്യബിന്ദു എന്താണ് ?

-2 ൽ നിന്ന് 4 ലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ പകുതി അകലത്താണല്ലോ മധ്യബിന്ദു.

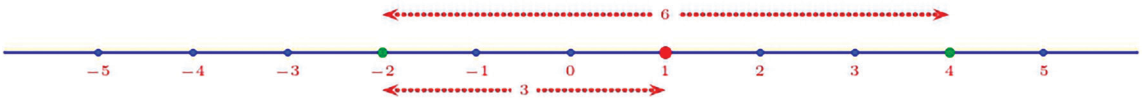
-2 ൽ നിന്ന് 4 ലേക്കുള്ള അകലം കിട്ടാൻ വലിയ സംഖ്യയിൽനിന്ന് ചെറുതു കുറയ്ക്കണം.

$$4 - (-2) = 6$$



ഈ അകലത്തിന്റെ പകുതി 3. അപ്പോൾ –2 ൽ നിന്ന് വലത്ത്, അകലം 3 ആയ സംഖ്യയാണ് മധ്യബിന്ദു. അതായത്

$$-2+3=1$$



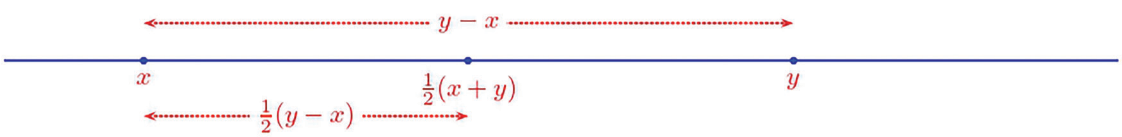
ഇങ്ങനെ ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെയും മധ്യബിന്ദു കണക്കാക്കാമല്ലോ. ഈ രീതി ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് എഴുതി നോക്കാം.

സംഖ്യകളിൽ ചെറുത് x എന്നും, വലുത് y എന്നുമെടുക്കാം. അപ്പോൾ x ന്റെ വലതുവശത്താണ് y; അവ തമ്മിലുള്ള അകലം $y-x$

x എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് $y-x$ വലത്തോട്ടാണ് y എന്ന ബിന്ദു; മധ്യബിന്ദു എന്നത്, x ൽ നിന്ന് ഇതിന്റെ പകുതി ദൂരം വലത്തോട്ടാണ്:

അതായത്, മധ്യബിന്ദു

$$x+\frac{1}{2}(y-x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}(x+y)$$



സംഖ്യാരേഖയിൽ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെയും മധ്യബിന്ദു, അവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ പകുതിയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവാണ്.

ഉദാഹരണമായി, $-2\frac{1}{2}$ ന്റെയും, $4\frac{3}{4}$ ന്റെയും മധ്യബിന്ദു

$$\frac{1}{2}\times\left(-2\frac{1}{2}+4\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\times 2\frac{1}{4}=1\frac{1}{8}$$

-4.8 ന്റെയും 1.2 ന്റെയും മധ്യബിന്ദു

$$=\frac{1}{2}\times(-4.8+1.2)$$

$$=\frac{1}{2}\times(-3.6)=-1.8$$

(1) സംഖ്യാരേഖയിൽ, ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഓരോ ജോടി സംഖ്യകളും സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ മധ്യബിന്ദുവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യ കണക്കാക്കുക:

(i) $1, -5$ (ii) $-1, -5$ (iii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

(iv) $-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ (v) $-2.5, 3.5$ (vi) $1.3, 8.7$

(vii) $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}$ (viii) $-\sqrt{3}, \sqrt{7}$

(2) സംഖ്യാരേഖയിൽ 1 നെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനും 2 നെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനും ഇടയ്ക്കുള്ള ഭാഗത്തിനെ നാലു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

സംഖ്യാസാന്ദ്രത

ഒരേ രേഖയിൽ എത്ര അടുത്തുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ എടുത്താലും, അവയുടെ ഇടയിൽ അസംഖ്യം മറ്റു ബിന്ദുക്കളുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെയും മധ്യബിന്ദു അവയുടെ ഇടയിലാണല്ലോ; ഈ മധ്യബിന്ദുവിന്റെയും, ആദ്യം അടയാളപ്പെടുത്തിയ ഓരോ ബിന്ദുവിന്റെയും മധ്യബിന്ദു എടുത്താൽ വീണ്ടും രണ്ടു ബിന്ദുക്കളായി. ഇങ്ങനെ എത്ര വേണമെങ്കിലും തുടരാം.

സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാൽ x, y എന്ന ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകൾ എടുത്താലും $z_1 = \frac{1}{2}(x+y)$ എന്ന സംഖ്യ x ന്റെയും, y ന്റെയും ഇടയിലാണ്; ഇനി

$$z_2 = \frac{1}{2}(x+z_1), \quad z_3 = \frac{1}{2}(y+z_1),$$

എന്നെടുത്താൽ, x, y ഇവയുടെ ഇടയിൽ മറ്റു രണ്ടു സംഖ്യകളായി. ഇങ്ങനെ എത്ര സംഖ്യകൾ വേണമെങ്കിലും കണക്കാക്കാമല്ലോ.

ഇനി മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

x ഏതു സംഖ്യ ആയാലാണ്, $|x-1| = |x-4|$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്നത്?

ജ്യാമിതീയമായി ആലോചിച്ചാൽ,

$$|x-1| = |x-4|$$

എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ അർത്ഥം എന്താണ്?

സംഖ്യാരേഖയിൽ x എന്ന സംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദു, 1, 4 എന്നീ സംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലാണ്.

അതായത്,

സംഖ്യാരേഖയിൽ 1, 4 എന്നീ സംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ മധ്യബിന്ദുവാണ് x നെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

അപ്പോൾ മുമ്പു കണ്ടതനുസരിച്ച്,

$$x = \frac{1}{2} \times (1+4) = 2\frac{1}{2}$$

ചുവടെയുള്ള ഓരോ സമവാക്യവും ശരിയാകുന്ന x കണക്കാക്കുക.

(i) $|x-1| = |x-3|$ (ii) $|x-3| = |x-4|$

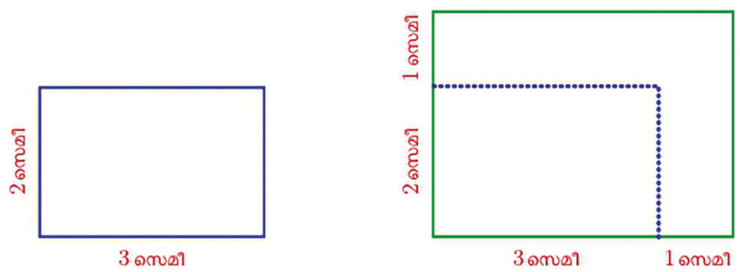
(iii) $|x+2| = |x-5|$ (iv) $|x| = |x+1|$

10

ബഹുപദങ്ങൾ

അളവുകളുടെ ബീജഗണിതം

വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 1 സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടി, അൽപം കൂടി വലിയ ചതുരമാക്കി:



പുതിയ ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവെന്താണ്?

ഈ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്ററും, 4 സെന്റിമീറ്ററും; ചുറ്റളവ് $2 \times (4+3) = 14$ സെന്റിമീറ്റർ

മറ്റൊരു രീതിയിലും ആലോചിക്കാം. ആദ്യം ചുറ്റളവ് $2 \times (3+2) = 10$ സെന്റിമീറ്റർ. നാലു വശത്തിലും 1 സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂടി; ആകെ 4 സെന്റിമീറ്റർ കൂടി. പുതിയ ചുറ്റളവ്, $10 + 4 = 14$ സെന്റിമീറ്റർ.

വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററാണ് കൂട്ടിയതെങ്കിലോ? രണ്ടാമതു പറഞ്ഞതുപോലെ ആലോചിച്ചാൽ, ഓരോ വശത്തിലും 2 സെന്റിമീറ്റർ വീതം, ആകെ കൂടിയ നീളം $2 \times 4 = 8$ സെന്റിമീറ്റർ. പുതിയ ചുറ്റളവ് $10 + 8 = 18$ സെന്റിമീറ്റർ.

ഇങ്ങനെ കണക്കുകൂട്ടാൻ എളുപ്പമാണല്ലോ. കൂട്ടിയ നീളം $2\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്ററാണെങ്കിൽ, വലിയ ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്,

$$\left(2\frac{1}{2} \times 4\right) + 10 = 20 \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഓരോ വശവും കൂട്ടിയത് എത്ര സെന്റിമീറ്ററായാലും, അതിന്റെ 4 മടങ്ങ്, 10 സെന്റിമീറ്ററിനോട് കൂട്ടിയാൽ, പുതിയ ചുറ്റളവായി.

ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതത്തിലെഴുതാം: ഓരോ വശവും കൂട്ടിയത് x സെന്റിമീറ്റർ എന്നും, പുതിയ ചുറ്റളവ് p സെന്റിമീറ്ററെന്നും എഴുതിയാൽ,

$$p = (x \times 4) + 10 = 4x + 10$$

ഇനി പല നീളങ്ങൾ കൂട്ടുന്നതനുസരിച്ച്, മാറുന്ന ചുറ്റളവുകൾ പെട്ടെന്നെഴുതാമല്ലോ:

3 സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയാൽ, ചുറ്റളവ് $(4 \times 3) + 10 = 22$ സെന്റിമീറ്റർ.

$3\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയാൽ, ചുറ്റളവ് $\left(4 \times 3\frac{1}{2}\right) + 10 = 24$ സെന്റിമീറ്റർ.

$3\frac{3}{4}$ സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയാൽ, ചുറ്റളവ് $\left(4 \times 3\frac{3}{4}\right) + 10 = 25$ സെന്റിമീറ്റർ.

ബീജഗണിതരീതിയിൽ ഇത് അൽപംകൂടി ചുരുക്കിയെഴുതാം:

$x = 3$ എന്നെടുത്താൽ $p = 22$

$x = 3\frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ $p = 24$

$x = 3\frac{3}{4}$ എന്നെടുത്താൽ $p = 25$

ഇതിനിയും ചുരുക്കിയെഴുതാൻ മറ്റൊരു ബീജഗണിതരീതിയുണ്ട്.

$$p(3) = 22$$
$$p\left(3\frac{1}{2}\right) = 24$$
$$p\left(3\frac{3}{4}\right) = 25$$

പൊതുവായി ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$p(x) = 4x + 10$$

ഈ ചുരുക്കെഴുത്ത് ഒന്നുകൂടി നോക്കാം. ആദ്യം നമ്മുടെ കണക്ക് സാധാരണഭാഷയിൽ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

> വശങ്ങളുടെ നീളം രണ്ടു സെന്റിമീറ്ററും, മൂന്നു സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം ഒരുപോലെ നീട്ടി വലിയ ചതുരമാക്കിയാൽ ആ ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, കൂട്ടിയ നീളത്തിന്റെ നാലു മടങ്ങ് പത്തിനോട് കൂട്ടിയതാണ്. ഉദാഹരണമായി വശങ്ങളെല്ലാം ഒന്നര സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയാൽ, ചുറ്റളവ് പതിനാറ് സെന്റിമീറ്ററാകും.

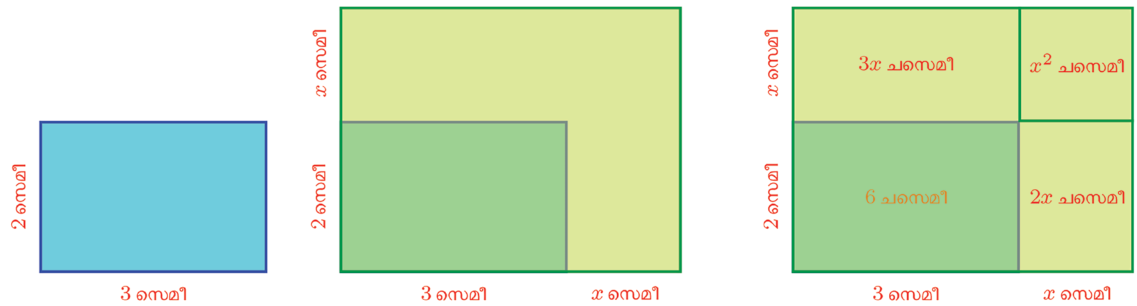
ഇത് ബീജഗണിതരീതിയിൽ ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിയെഴുതാം:

> വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം x സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി വലിയ ചതുരമാക്കിയതിന്റെ ചുറ്റളവ് p സെന്റിമീറ്റർ എന്നെഴുതിയാൽ, $p = 4x + 10$. ഉദാഹരണമായി, $x = 1\frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ, $p = 16$.

ഇതിലെ x മാറുന്നതനുസരിച്ചാണ് p മാറുന്നതെന്നു വ്യക്തമാക്കാനായി, p എന്നു മാത്രം എഴുതുന്നതിനു പകരം $p(x)$ എന്നെഴുതിയാൽ, മുകളിലെഴുതിയത് ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം:

വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം x സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി വലിയ ചതുരമാക്കിയതിന്റെ ചുറ്റളവ് $p(x)$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നെഴുതിയാൽ, $p(x) = 4x + 10$. ഉദാഹരണമായി, $p\left(1\frac{1}{2}\right) = 16$.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണമായി, ഈ കണക്കിൽത്തന്നെ പരപ്പളവ് മാറുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം. പല നീളങ്ങൾ കൂട്ടുമ്പോൾ പരപ്പളവ് മാറുന്നത് ഒന്നൊന്നായി നോക്കുന്നതിനു പകരം, പൊതുവെ കൂട്ടുന്ന നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം:



ചിത്രത്തിൽനിന്ന്, പുതിയ പരപ്പളവ്

$$6 + 2x + 3x + x^2 = 6 + 5x + x^2$$

ചിത്രമൊന്നും വരയ്ക്കാതെ, നേരിട്ട് ബീജഗണിതത്തിലൂടെയും ഇതു കാണാം:

$$(3 + x)(2 + x) = 6 + 3x + 2x + x^2 = 6 + 5x + x^2$$

(**ഗുണനസമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠം).

ബീജഗണിത വാചകങ്ങളിൽ അക്ഷരങ്ങൾ ആദ്യം എഴുതുകയാണ് പതിവ്. ഇതനുസരിച്ച് മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$(x + 3)(x + 2) = x^2 + 5x + 6$$

ചുറ്റളവുകണക്കിലെപ്പോലെ, വശങ്ങളെല്ലാം x സെന്റിമീറ്റർ കൂടുമ്പോഴുള്ള പരപ്പളവിനെ $a(x)$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ എന്നെഴുതിയാൽ

$$a(x) = x^2 + 5x + 6$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$a(1) = 1^2 + (5 \times 1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$$

$$a\left(1\frac{1}{2}\right) = \left(1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(5 \times 1\frac{1}{2}\right) + 6 = 2\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2} + 6 = 15\frac{3}{4}$$

$$a(2) = 2^2 + (5 \times 2) + 6 = 4 + 10 + 6 = 20$$

എന്നെല്ലാം കണക്കാക്കാം. ഇതെല്ലാം സാധാരണഭാഷയിൽ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

വശങ്ങളെല്ലാം 1 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയാൽ, പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

വശങ്ങളെല്ലാം $1\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയാൽ, പരപ്പളവ് $15\frac{3}{4}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

വശങ്ങളെല്ലാം 2 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയാൽ, പരപ്പളവ് 20 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണമായി, വക്കുകളുടെ നീളം 1, 2, 3 സെന്റിമീറ്ററായ ചതുരക്കട്ടയുടെ വശങ്ങളെല്ലാം ഒരുപോലെ കൂട്ടി വലിയ ചതുരക്കട്ടയാക്കിയാൽ വ്യാപ്തം എങ്ങനെ മാറുമെന്നു നോക്കാം.

കൂട്ടിയ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, വലിയ കട്ടയുടെ വ്യാപ്തം $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$. ഇതു വിസ്തരിച്ചെഴുതാൻ, ആദ്യം നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

എന്നെഴുതാം. ഇനി ഇതിനെ $x + 1$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കണം; അതിന് ആദ്യത്തെ തുകയിലെ സംഖ്യകളോരോന്നിനെയും, രണ്ടാമത്തെ തുകയിലെ ഓരോന്നുകൊണ്ടും ഗുണിച്ച്, കൂട്ടണം:

$$\begin{aligned}(x + 1)(x^2 + 5x + 6) &= \big(x \times (x^2 + 5x + 6)\big) + \big(1 \times (x^2 + 5x + 6)\big)\\ &= (x^3 + 5x^2 + 6x) + (x^2 + 5x + 6) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6\end{aligned}$$

വിശദമായി പറഞ്ഞാൽ,

> വശങ്ങളുടെ നീളം 1 സെന്റിമീറ്റർ, 2 സെന്റിമീറ്റർ, 3 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ചതുരക്കട്ടയുടെ വശങ്ങളെല്ലാം x സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി വലിയ ചതുരക്കട്ടയാക്കിയതിന്റെ വ്യാപ്തം $v(x)$ ഘന സെന്റിമീറ്റർ എന്നെഴുതിയാൽ, $v(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

(1) ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളത്തേക്കാൾ 1 സെന്റിമീറ്റർ കുറവായ ചതുരങ്ങളിൽ, ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുക്കുക.

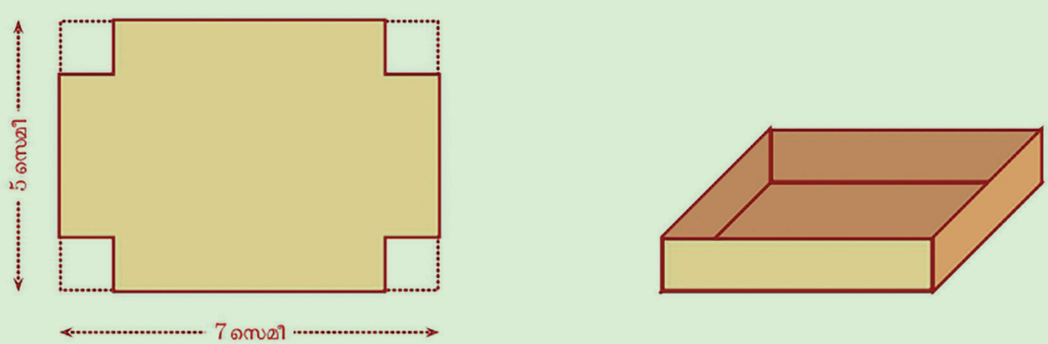
(i) ഇവയുടെ ചുറ്റളവുകൾ $p(x)$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്ത്, x, $p(x)$ ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സമവാക്യമായി എഴുതുക.

(ii) ഇവയുടെ പരപ്പളവുകൾ $a(x)$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്ത്, x, $a(x)$ ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സമവാക്യമായി എഴുതുക.

(iii) $p(1), p(2), p(3), p(4), p(5)$ എന്നിവ കണക്കാക്കുക. എന്തെങ്കിലും ക്രമം കാണുന്നുണ്ടോ ?

(iv) $a(1), a(2), a(3), a(4), a(5)$ എന്നിവ കണക്കാക്കുക. എന്തെങ്കിലും ക്രമം കാണുന്നുണ്ടോ ?

(2) ചിത്രത്തിൽക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നാലു മൂലകളിൽ നിന്നും ഒരേ വലുപ്പമുള്ള ചെറു സമചതുരങ്ങൾ വെട്ടിമാറ്റി, മേലോട്ട് മടക്കി, ഒരു പെട്ടി ഉണ്ടാക്കുന്നു.



(i) വെട്ടിയെടുക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്ത്, പെട്ടിയുടെ മൂന്നളവുകളും എഴുതുക.

(ii) പെട്ടിയുടെ വ്യാപ്തം $v(x)$ ഘനസെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്ത്, x ഉം $v(x)$ ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സമവാക്യമായി എഴുതുക.

(iii) $v\left(\frac{1}{2}\right), v(1), v\left(1\frac{1}{2}\right)$ ഇവ കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു മീറ്റർ നീളമുള്ള കയറുകൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കാവുന്ന ചതുരങ്ങളുടെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നും, ചതുരത്തിനകത്തെ പരപ്പളവ് $a(x)$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ എന്നുമെടുക്കുക.

(i) x ഉം $a(x)$ ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സമവാക്യമായി എഴുതുക.

(ii) $a(10), a(40)$ ഇവ ഒരേ സംഖ്യ ആകുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

(iii) x ആയി രണ്ടു വ്യത്യസ്ത സംഖ്യകളെടുക്കുമ്പോൾ $a(x)$ ആയി ഒരേ സംഖ്യതന്നെ കിട്ടാൻ, സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്തായിരിക്കണം?

സവിശേഷ വാചകങ്ങൾ

പലതരം അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളായി എഴുതുന്നതു കണ്ടല്ലോ. കേവലസംഖ്യകളിന്മേലുള്ള ക്രിയകളായും ഇവയെ കാണാം. ഉദാഹരണമായി ആദ്യത്തെ ചതുരക്കണക്കിൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം നീട്ടിയതും പുതിയ ചുറ്റളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

$$p(x) = 4x + 10$$

എന്നെഴുതി. ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ക്രിയ എന്നതിൽക്കവിഞ്ഞ് പൊതുവെ സംഖ്യകളെ 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 10 കൂട്ടുക എന്ന ക്രിയയായും ഇതിനെ കാണാം.

ഇതുപോലെ നേരത്തെ കണ്ട മറ്റു ബന്ധങ്ങളും പരിശോധിക്കാം:

- $a(x) = x^2 + 5x + 6$
- $v(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

ഇവയെല്ലാം സംഖ്യകളിലെ ക്രിയകളായി കണ്ടാൽ, അവയ്ക്കെല്ലാം പൊതുവായ ചില സ്വഭാവങ്ങൾ കാണാം. x എന്ന സംഖ്യയുടെ പല കൃതികളെ നിശ്ചിതസംഖ്യകൾകൊണ്ടു ഗുണിക്കുകയും, അത്തരം ഗുണനഫലങ്ങൾ കൂട്ടുകയും മാത്രമാണ് ഇതിലെല്ലാം ചെയ്തിരിക്കുന്നത്. ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കൂട്ടുകയും ചെയ്തിട്ടുമുണ്ട്. ഇത്തരം ക്രിയകൾ മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന ബീജഗണിത വാചകത്തിന്റെ പൊതുവായ പേരാണ് **ബഹുപദം (polynomial).**

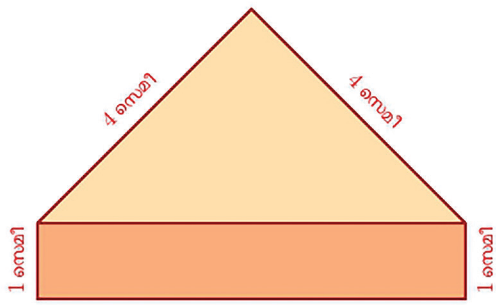
അളവുകളിൽ ഇങ്ങനെയല്ലാത്ത ക്രിയകൾ ചെയ്യുന്ന സാഹചര്യങ്ങളുമുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, ഒരു വശം മറ്റേ വശത്തിനേക്കാൾ 1 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലായ ചതുരങ്ങളുടെയെല്ലാം വികർണ്ണങ്ങളുടെ

നീളം നോക്കാം. ചെറിയ വശം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം സെന്റിമീറ്ററിൽ

$$\sqrt{x^2 + (x+1)^2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

ഇതിൽ മാറുന്ന സംഖ്യകളുടെ വർഗമൂലമെടുക്കുക എന്ന ക്രിയ ഉള്ളതിനാൽ നമ്മുടെ നിർവചനമനുസരിച്ച്, ഇതൊരു ബഹുപദമല്ല.

ഇനി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ഒരു സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിൽ ഒരു ചതുരം ചേർത്തുവച്ച ഈ രൂപത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ് ?

ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 8 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററെന്ന് എളുപ്പം കാണാം. ചതുരത്തിന്റെ വലിയ വശം സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണമായതിനാൽ $4\sqrt{2}$ സെന്റിമീറ്റർ (**പുതിയ സംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠം); അപ്പോൾ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $4\sqrt{2}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ആകെ $8 + 4\sqrt{2}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം വേറെ ഏതെങ്കിലും സംഖ്യയായാലോ ? ഈ സംഖ്യ x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, രൂപത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}\,x$$

എന്ന സംഖ്യയാണ്. ഇതിൽ 2 ന്റെ വർഗമൂലമുണ്ട്; എന്നാൽ മാറുന്ന സംഖ്യയായ x ൽ ചെയ്യുന്ന ക്രിയകളിൽ വർഗമെടുക്കലും, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ എന്നീ നിശ്ചിത സംഖ്യകൾ കൊണ്ടുള്ള ഗുണനവും മാത്രമേയുള്ളൂ. അപ്പോൾ ഇതും ഒരു ബഹുപദംതന്നെയാണ്.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം. പരപ്പളവ് 25 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററായ ചതുരങ്ങളിലെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമായ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ ചുറ്റളവായി കിട്ടുന്ന സംഖ്യ

$$2x + \frac{50}{x}$$

ഇതിൽ മാറുന്ന സംഖ്യകളുടെ വ്യുൽക്രമമെടുക്കുന്ന ക്രിയ ഉള്ളതുകൊണ്ട് ഇതൊരു ബഹുപദമല്ല.

ഒരു ബഹുപദത്തിൽ, മാറുന്ന സംഖ്യയുടെ കൃതികളാണെടുക്കുന്നത്. ഇങ്ങനെ വരുന്ന ഏറ്റവും വലിയ കൃത്യങ്കത്തെ **ബഹുപദത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം (degree of the polynomial)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇതുവരെ കണ്ട ചില ബഹുപദങ്ങൾ നോക്കൂ:

$$p(x) = 4x + 10$$
$$a(x) = x^2 + 5x + 6$$
$$v(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

മുകളിൽ നിരത്തിയ ബഹുപദങ്ങളിൽ ആദ്യത്തേതിന്റെ കൃത്യങ്കം 1, രണ്ടാമത്തേതിന്റെ കൃത്യങ്കം 2, മൂന്നാമത്തേതിന്റെ കൃത്യങ്കം 3.

കൃത്യങ്കം 1 ആയ ബഹുപദം എന്നതിനു പകരം ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം (first degree polynomial), കൃത്യങ്കം 2 ആയ ബഹുപദം എന്നതിനു പകരം രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദം (second degree polynomial) എന്നിങ്ങനെയെല്ലാം പറയാം.

കൃത്യങ്കങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ, ബഹുപദങ്ങളുടെയെല്ലാം പൊതുവായ രൂപം എഴുതാം:

ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം : $ax + b$

രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദം : $ax^2 + bx + c$

മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദം : $ax^3 + bx^2 + cx + d$

ഇവിടെ a, b, c, d എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾ, നിശ്ചിത സംഖ്യകളെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്; അതായത്, x ആയി പല സംഖ്യകൾ എടുക്കുമ്പോഴൊന്നും a, b, c, d എന്നിങ്ങനെ എഴുതിയിരിക്കുന്ന സംഖ്യകൾക്ക് മാറ്റമില്ല. ഇവയെ അതതു കൃതികളുടെ ഗുണകങ്ങൾ (coefficients) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

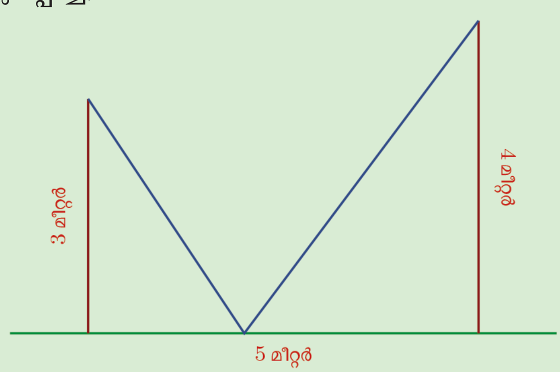
ഈ സംഖ്യകൾ ഏത് രേഖീയസംഖ്യയും ആകാം.

(1) ചുവടെയുള്ള കണക്കുകളിലെല്ലാം, പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ബഹുപദമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. തീരുമാനത്തിന്റെ കാരണവും എഴുതുക.

(i) സമചതുരാകൃതിയായ ഒരു മൈതാനത്തിനു ചുറ്റും 1 മീറ്റർ വീതിയിലൊരു പാതയുണ്ട്. മൈതാനത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും, പാതയുടെ പരപ്പളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

(ii) 7 ലിറ്റർ വെള്ളവും, 3 ലിറ്റർ ആസിഡും ചേർന്ന ദ്രാവകത്തിൽ, വീണ്ടും ഒഴിക്കുന്ന ആസിഡിന്റെ അളവും, ദ്രാവകത്തിലെ ആസിഡിന്റെ ശതമാനത്തിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റവും.

(iii) 3 മീറ്ററും, 4 മീറ്ററും ഉയരമുള്ള രണ്ടു കമ്പുകൾ 5 മീറ്റർ അകലത്തിൽ നിലത്തു കുത്തനെ നാട്ടിയിരിക്കുന്നു. ഒരു കമ്പിന്റെ മുകളിൽ നിന്ന് ഒരു കയറു വലിച്ചു നിലത്തുറപ്പിച്ച്, അവിടെനിന്ന് രണ്ടാമത്തെ കമ്പിലേക്ക് വലിച്ചു കെട്ടണം:



ഒരു കമ്പിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്ന് നിലത്തു കയർ ഉറപ്പിച്ച സ്ഥാനത്തേക്കുള്ള അകലവും, കയറിന്റെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

(2) ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ക്രിയകളോരോന്നും ബീജഗണിതവാചകമായി എഴുതുക. ഏതെല്ലാമാണ് ബഹുപദമെന്ന് വിശദീകരിക്കുക.

(i) സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും തുക.

(ii) സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വർഗമൂലത്തിന്റെയും തുക.

(iii) സംഖ്യയോട് അതിന്റെ വർഗമൂലം കൂട്ടിയതും, സംഖ്യയിൽ നിന്ന് വർഗമൂലം കുറച്ചതും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം.

(3) ചുവടെയുള്ള ബഹുപദങ്ങളിൽ, $p(1)$ ഉം $p(10)$ ഉം കണക്കാക്കുക.

(i) $p(x) = 2x + 5$ (ii) $p(x) = 3x^2 + 6x + 1$ (iii) $p(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 7$

(4) ചുവടെയുള്ള ബഹുപദങ്ങളിൽ, $p(0), p(1), p(-1)$ ഇവ കണക്കാക്കുക:

(i) $p(x) = 3x + 5$ (ii) $p(x) = 5x - 8$ (iii) $p(x) = 3x^2 + 6x + 1$

(iv) $p(x) = 2x^2 - 5x + 3$ (v) $p(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 7$ (vi) $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

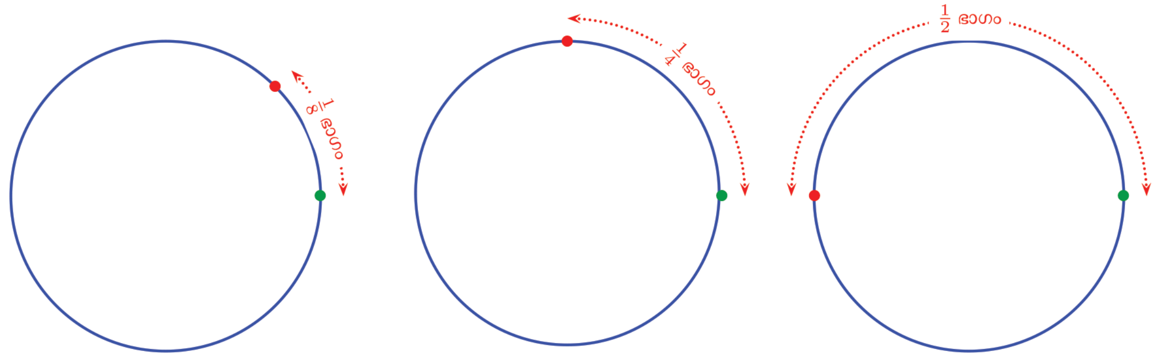
11

വൃത്തഭാഗങ്ങൾ

നീളവും കോണും

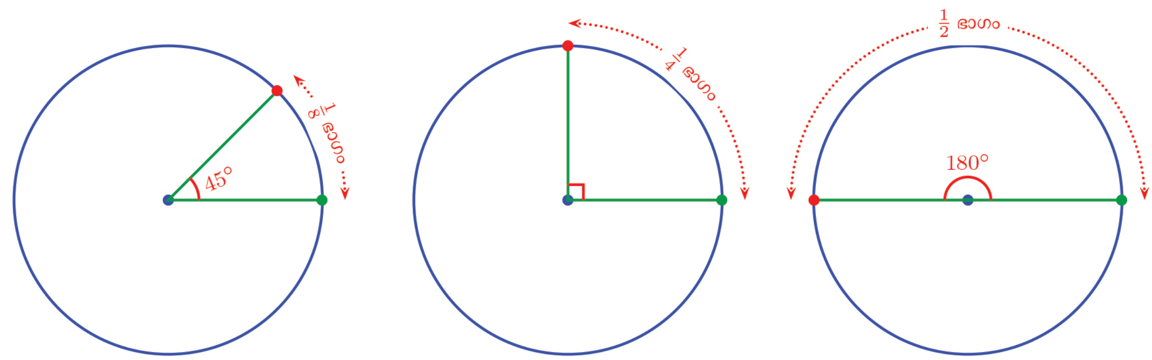
വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയാണെന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇനി വൃത്തത്തിന്റെ ചില ഭാഗങ്ങളുടെ അളവുകൾ കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും സ്ഥാനത്തുനിന്നു തുടങ്ങി, വൃത്തത്തിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദു സങ്കൽപ്പിക്കുക. സഞ്ചാരത്തിന്റെ പല സമയത്തുള്ള ചിത്രങ്ങളാണിവ:



ഈ സഞ്ചാരം ഒരു കറക്കമായതിനാൽ, വൃത്തത്തിലൂടെ എത്ര ദൂരം നീങ്ങി എന്നതിനു പകരം, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു നോക്കുമ്പോൾ എത്ര ഡിഗ്രി തിരിഞ്ഞു എന്നും പറയാം.

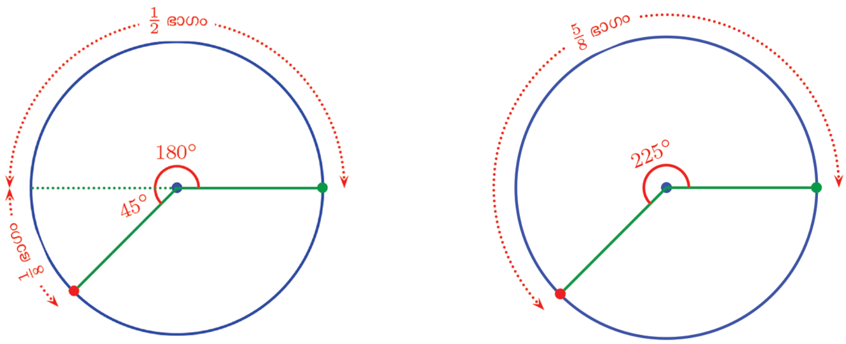
വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗം കിട്ടാൻ, കേന്ദ്രത്തിൽ $360° \div 8 = 45°$ എടുത്തതും, $\frac{1}{4}$ ഭാഗം കിട്ടാൻ, കേന്ദ്രത്തിൽ $360° \div 4 = 90°$ എടുത്തതുമെല്ലാം ഓർമയുണ്ടോ ? (ആറാം ക്ലാസിലെ **കോണുകൾ** എന്ന പാഠം).



അങ്ങനെ സഞ്ചാരം നീളമായും, കോണായും പറയാം.

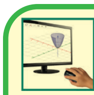
അപ്പോളൊരു ചോദ്യം: വൃത്തത്തിന്റെ പകുതി കഴിഞ്ഞ്, വീണ്ടുമൊരു എട്ടിലൊരു ഭാഗം നീങ്ങുമ്പോൾ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$ ഭാഗം; ഇത് തിരിവായി എങ്ങനെ പറയും?

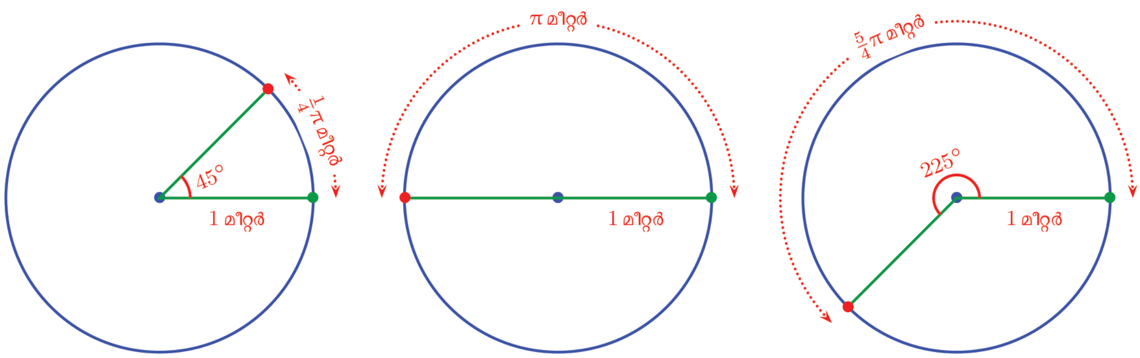
വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമെന്നാൽ 45°; അപ്പോൾ 180° തിരിഞ്ഞുകഴിഞ്ഞ്, വീണ്ടും 45° യും കൂടി തിരിഞ്ഞു; ആകെ 180° + 45° = 225° തിരിഞ്ഞുവെന്നു പറയാം:



ഇങ്ങനെ വൃത്തം മുഴുവൻ ചുറ്റി, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തെത്തുന്നതു വരെയുള്ള യാത്രയിലെ ഓരോ സമയത്തും എത്ര സഞ്ചരിച്ചു എന്നത്, വൃത്തത്തിന്റെ ഭാഗങ്ങളായോ, തിരിവിന്റെ അളവായി 360° വരെയുള്ള കോണുകളായോ പറയാം.

ഇതിൽ, വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 1 മീറ്റർ എന്നുകൂടി എടുത്താലോ? വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 2π മീറ്റർ; അപ്പോൾ ദൂരങ്ങളെല്ലാം വൃത്തത്തിന്റെ ഭാഗത്തിനു പകരം നീളമായിത്തന്നെ പറയാം:

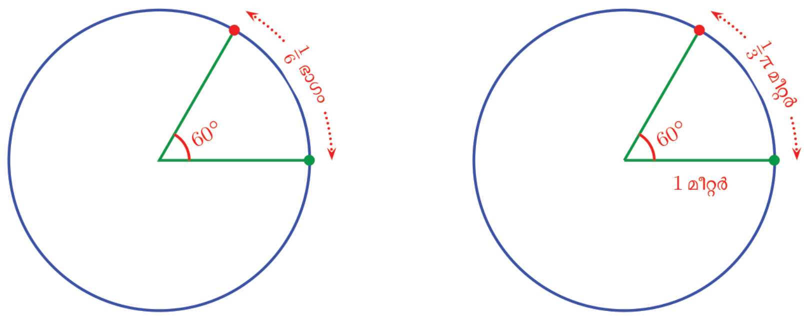

ജിയോജിബ്രയിൽ A കേന്ദ്രമായി B യിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഒരു Angle Slider a നിർമിക്കുക. *Angle with Given Size* ടൂളുപയോഗിച്ച് B, A എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്കു ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവ് a എന്ന് നൽകുക. വൃത്തത്തിൽ പുതിയ ഒരു ബിന്ദു B' ലഭിക്കും. Slider മാറ്റിക്കൊണ്ട് B' നെ വൃത്തത്തിലൂടെ തിരിക്കാൻ കഴിയും.



അങ്ങനെ ഓരോ സമയത്തും എത്ര ദൂരം നീങ്ങിയെന്നു മീറ്ററായി പറയാം; അല്ലെങ്കിൽ എത്ര തിരിഞ്ഞുവെന്നു ഡിഗ്രിയായും പറയാം.

60° തിരിയുമ്പോൾ, വൃത്തത്തിലൂടെ എത്ര മീറ്റർ നീങ്ങും?

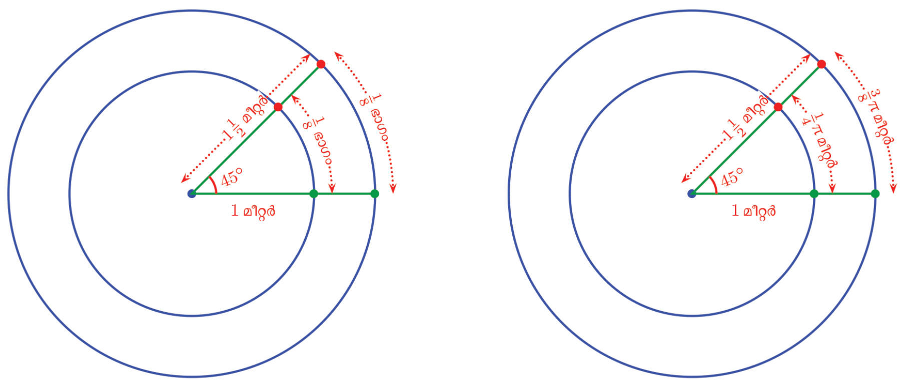
വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗം നീങ്ങിയെന്ന് ആദ്യം നോക്കാം. 1° എന്നത് വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{360}$ ഭാഗമാണല്ലോ? അപ്പോൾ 60° എന്നത്, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{360} \times 60 = \frac{1}{6}$ ഭാഗം; വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 2π മീറ്ററായതിനാൽ, ഇത് $2\pi \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\pi$ മീറ്റർ.



പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, 360° യുടെ എത്ര ഭാഗമാണോ തിരിഞ്ഞത്, 2π മീറ്ററിന്റെ അത്രയും ഭാഗമാണ് വൃത്തത്തിലൂടെ നീങ്ങിയത്.

വൃത്തത്തിന്റെ ആരം $1\frac{1}{2}$ മീറ്ററാക്കിയാലോ ? ചുറ്റളവ് 3π മീറ്ററാകും. അപ്പോൾ തിരിവിനനുസരിച്ച് നീങ്ങിയ ദൂരം കണക്കാക്കാൻ, 3π മീറ്ററിന്റെ ഭാഗങ്ങൾ എടുക്കണം. അതായത്, തിരിയുന്നതിനനുസരിച്ചുള്ള വൃത്തഭാഗങ്ങൾക്കു മാറ്റമില്ലെങ്കിലും, നീളങ്ങളുടെ മീറ്റർ കണക്ക് മാറും.

ഉദാഹരണമായി, 45° തിരിയുമ്പോൾ, ഈ വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗം തന്നെയാണ് നീങ്ങുന്നത്; പക്ഷേ, വൃത്തം വലുതായതിനാൽ നീങ്ങിയ ദൂരം $\frac{3}{8}\pi$ ആകും.



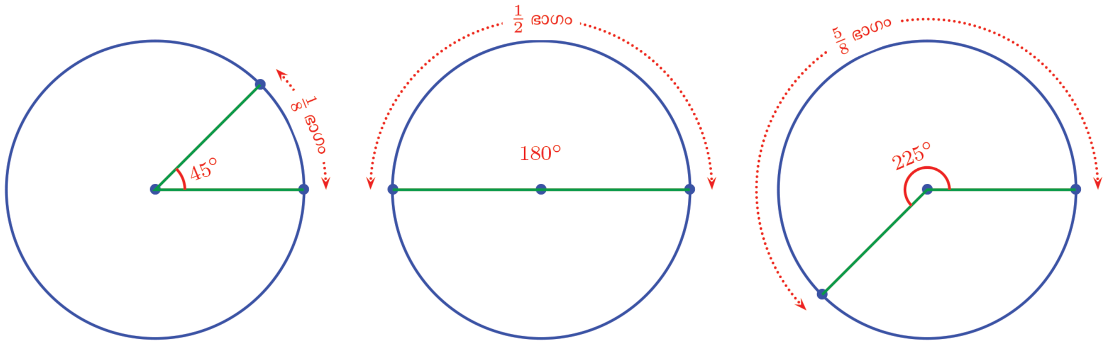
പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ,

> ആരം r ആയ വൃത്തത്തിലൂടെയുള്ള സഞ്ചാരത്തിൽ, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് $x°$ തിരിയുമ്പോൾ, വൃത്തത്തിലൂടെ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം $2\pi r \times \frac{x}{360}$

ഇനി ഇക്കാര്യം കണക്കുഭാഷയിലെങ്ങനെയാണ് പറയുന്നതെന്നു നോക്കാം: ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള ഭാഗത്തിനെ **ചാപം (arc)** എന്നാണു പറയുന്നത്; ഒരു ചാപത്തിന്റെ ഒരറ്റത്തുനിന്ന് മറ്റേ അറ്റത്ത് എത്താൻ വേണ്ട തിരിവിന്റെ അളവിനെ, ചാപത്തിന്റെ **കേന്ദ്രകോൺ** (central angle) എന്നും.

ജിയോജിബ്രയിൽ A എന്ന ഒരു ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ B, C എന്നിങ്ങനെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. വൃത്തം മറച്ചു വച്ചതിനുശേഷം *Circular Arc* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്കുചെയ്ത് ചാപം വരയ്ക്കാം. A, C, B എന്ന ക്രമത്തിൽ ക്ലിക്കു ചെയ്താലും ചാപം ലഭിക്കും. ഇവ തമ്മിൽ എന്താണ് വ്യത്യാസം എന്ന് നോക്കൂ. AB, AC എന്നീ ആരങ്ങൾ വരച്ച് *Angle* ടൂളുപയോഗിച്ച് അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോൺ (ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്ര കോൺ) അടയാളപ്പെടുത്താൻ കഴിയും.

അപ്പോൾ നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗം നീളമുള്ള ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 45°, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{2}$ ഭാഗം നീളമുള്ള ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 180°, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{5}{8}$ ഭാഗം നീളമുള്ള ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 225°, എന്നെല്ലാം പറയാം:



വൃത്തത്തിലൂടെയുള്ള സഞ്ചാരത്തിന്റെ തത്വം, വൃത്തത്തിന്റെ കേവലഗണിതതത്വമാക്കാം:

> ആരം r ആയ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ $x°$ ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം $2\pi r \times \frac{x}{360}$

മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ,

ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ, 360° യുടെ എത്ര ഭാഗമാണോ, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ അത്രയും ഭാഗമാണ് ചാപത്തിന്റെ നീളം

ഉദാഹരണമായി, ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 60° ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

ഇതു മനസിൽത്തന്നെ ചെയ്യാം: 60° എന്നത്, 360° യുടെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗമായതിനാൽ, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗമാണ് ചാപം. വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, 6π സെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ ചാപത്തിന്റെ നീളം π സെന്റിമീറ്റർ.

ആരം 2.5 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 50° ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളമോ?

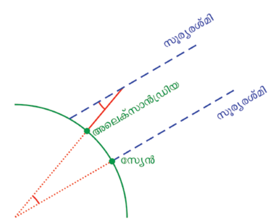
വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 5π സെന്റിമീറ്റർ; അതിന്റെ $\frac{50}{360}$ ഭാഗമാണ് ചാപത്തിന്റെ നീളം. അതായത്

$$5\pi \times \frac{50}{360} = \frac{25}{36}\pi \approx 2.2 \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

ഭൂമിയുടെ ചുറ്റളവ്

ബിസിഇ രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഗ്രീസിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ഇറാതോസ്തെനിസ് ആണ് ഭൂമിയുടെ ചുറ്റളവ് ആദ്യമായി കണക്കുകൂട്ടിയത്.

വർഷത്തിൽ ഒരു ദിവസം, ഈജിപ്റ്റിലെ സ്യേൻ പട്ടണത്തിൽ നട്ടുച്ചയ്ക്ക് സൂര്യൻ നേരെ തലയ്ക്കു മുകളിലായിരിക്കുമെന്നും, അതിനാൽ ആ സമയത്ത്, വസ്തുക്കൾക്ക് നിഴൽ ഉണ്ടാകില്ലെന്നും ഇറാതോസ്തെനിസ് അറിഞ്ഞു.



അദ്ദേഹം ജോലി ചെയ്തിരുന്ന അലെക്സാൻഡ്രിയയിൽ അതേ സമയത്ത്, സൂര്യരശ്മികൾ പതിക്കുന്നത് എത്ര ചരിഞ്ഞിട്ടാണെന്നു നിലത്തു കുത്തനെ നാട്ടിയ ഒരു കമ്പിന്റെ നിഴലിൽനിന്ന് അദ്ദേഹം കണക്കുകൂട്ടി. സൂര്യരശ്മികൾ സമാന്തരമാണെന്നു കരുതിയാൽ, അലെക്സാൻഡ്രിയയും സ്യേനും തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഭൂമിയിലെ ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോണും ഇതു തന്നെയാണ്. രണ്ടു പട്ടണങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ദൂരമാണ്, ഈ ഞാണിന്റെ നീളം.

അപ്പോൾ, അലെക്സാൻഡ്രിയയിലെ സൂര്യരശ്മികളുടെ ചരിവ്, $a°$ എന്നും, സ്യേനിലേക്കുള്ള ദൂരം d എന്നുമെടുത്താൽ, ഭൂമിയുടെ ചുറ്റളവ് $\frac{360}{a} \times d$ എന്നു കണക്കാക്കാം.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

ആരം 9 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു ഇരുമ്പുവട്ടത്തിൽനിന്ന്, കേന്ദ്രകോൺ $30°$ ആയ ഒരു കഷണം മുറിച്ചെടുത്തു. ഇതു വളച്ച് ചെറിയൊരു വട്ടമുണ്ടാക്കി. ചെറുവട്ടത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?

കേന്ദ്രകോൺ $30°$ ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$; അതായത്, മുറിച്ചെടുത്ത കഷണത്തിന്റെ നീളം $18\pi \times \frac{1}{12} = \frac{3}{2}\pi$ സെന്റിമീറ്റർ. ഇതാണ് ചെറിയ വട്ടത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്; അപ്പോൾ അതിന്റെ ആരം $\frac{3}{2}\pi \div 2\pi = \frac{3}{4}$ സെന്റിമീറ്റർ

കുറേക്കൂടി എളുപ്പത്തിൽ ഇതു കണക്കാക്കാം: വലിയ വട്ടത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{12}$ ഭാഗമാണ് ചെറിയ വട്ടത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്. ആരവും ചുറ്റളവും മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലായതിനാൽ, വലിയ വട്ടത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{1}{12}$ ഭാഗംതന്നെയാണ് ചെറിയ വട്ടത്തിന്റെ ആരം; അതായത്,

$$9 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{4} \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

വൃത്തത്തിന്റെ ആരം $\frac{12}{\pi}$ ആയി എടുത്ത് മുൻ പ്രവർത്തനത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്ത ജിയോജിബ്ര ആപ്ലെറ്റ് നിർമ്മിക്കുക (ആരം 12/pi എന്ന് നൽകിയാൽ മതി). ഈ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ്? Distance or Length ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ചാപത്തിന്റെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. കേന്ദ്ര കോൺ $60°$ ആകുമ്പോൾ ചാപ നീളം എത്രയാകും? പരിശോധിച്ചു നോക്കൂ. നീളം 2 ആയ ചാപം എങ്ങനെ വരയ്ക്കാം? 3, 5, 15, 18, 19 എന്നീ നീളങ്ങളിലുള്ള ചാപങ്ങൾ വരച്ചുനോക്കൂ.

(1) ഒരു വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ $40°$ ആയ ഒരു ചാപത്തിന്റെ നീളം 3π സെന്റിമീറ്ററാണ്. വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്? ആരമോ?

(2) ഒരു വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ $25°$ ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

(i) ഇതേ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ $75°$ ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

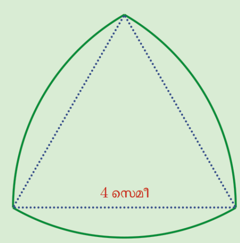
(ii) ആരം ഇതിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങായ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ $75°$ ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

(3) ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു വളയിൽ നിന്ന് ഒരു കഷണം മുറിച്ചെടുത്ത്, ആരം $\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്ററായ മോതിരമുണ്ടാക്കണം

(i) മുറിച്ചെടുക്കുന്ന കഷണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്ര ഡിഗ്രിയായിരിക്കണം?

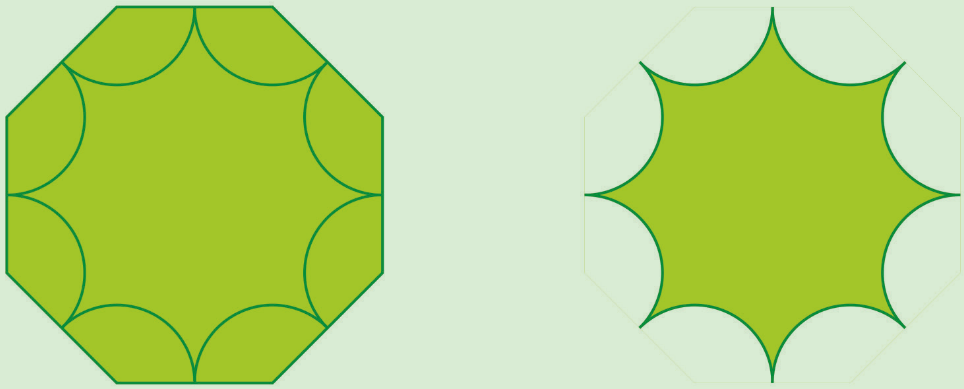
(ii) വളയുടെ മിച്ചമുള്ള ഭാഗം കൊണ്ട് അൽപം ചെറിയ മറ്റൊരു വളയുണ്ടാക്കി. അതിന്റെ ആരം എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?

(4) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂല കേന്ദ്രമായും മറ്റുരണ്ടു മൂലകളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ചാപം വരച്ച ചിത്രമാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



ഇതിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?

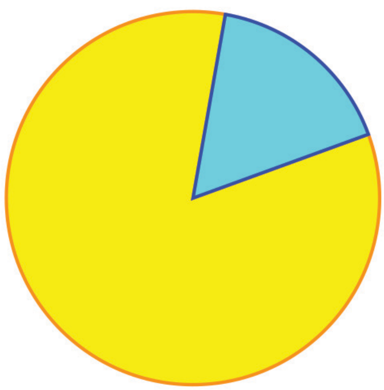
(5) ഒരു സമഅഷ്ടഭുജത്തിന്റെ മൂലകൾ കേന്ദ്രമായി ചാപങ്ങൾ വരച്ച്, ചുവടെക്കാണുന്ന രൂപം വെട്ടിയെടുക്കുന്നു.



വെട്ടിയെടുത്ത രൂപത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.

കോണും പരപ്പളവും

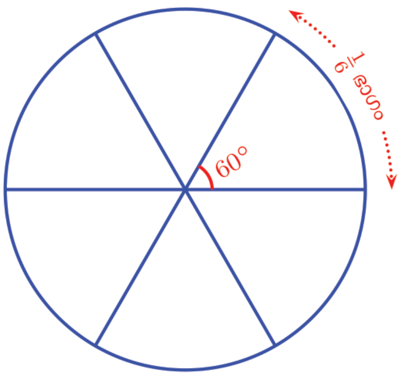
വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയുടെ ഒരു ഭാഗമാണ് ചാപം. ഒരു ചാപവും അതിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളിൽക്കൂടിയുള്ള ആരങ്ങളും ചേർന്നാൽ വൃത്തപ്പരപ്പിന്റെ ഒരു ഭാഗമാകും:

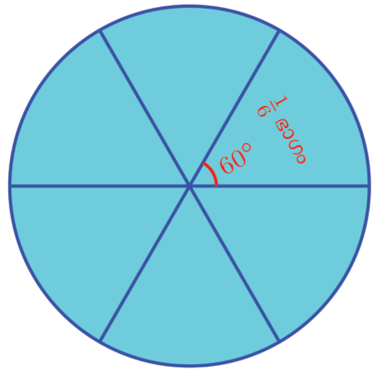


ജിയോജിബ്രയിൽ A കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. *Circular Sector* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് A, B, C എന്നീ ക്രമത്തിൽ ബിന്ദുക്കളിൽ ക്ലിക്കു ചെയ്ത് വൃത്താംശം വരയ്ക്കാം. *Area* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് വൃത്താംശത്തിനുള്ളിൽ ക്ലിക്കുചെയ്താൽ അതിന്റെ പരപ്പളവ് കാണാൻ കഴിയും.

ഇത്തരമൊരു വൃത്തഭാഗത്തെ **വൃത്താംശം (sector)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇതിലെ ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിനെ വൃത്താംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എന്നു പറയുന്നു.

കേന്ദ്രകോൺ മാറുന്നതനുസരിച്ച്, ചാപത്തിന്റെ നീളം മാറുന്നതുപോലെ, വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവും മാറും. രണ്ടിന്റെയും കണക്ക് ഒരുപോലെയാണ്. ഉദാഹരണമായി, കേന്ദ്രകോൺ $60°$ ആയ ചാപം, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗമാണ്; കേന്ദ്രകോൺ $60°$ ആയ വൃത്താംശം, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗവും:





ഇതുപോലെ, കേന്ദ്രകോൺ $1°$ ആയ ചാപം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{360}$ ഭാഗവും; കേന്ദ്രകോൺ $1°$ ആയ വൃത്താംശം, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ $\frac{1}{360}$ ഭാഗവുമാണ്.

അപ്പോൾ കേന്ദ്രകോണും ചാപത്തിന്റെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം പോലെ, കേന്ദ്രകോണും വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധവും ഇങ്ങനെ പറയാം:

ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ, $360°$ യുടെ എത്ര ഭാഗമാണോ, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ അത്രയും ഭാഗമാണ് വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

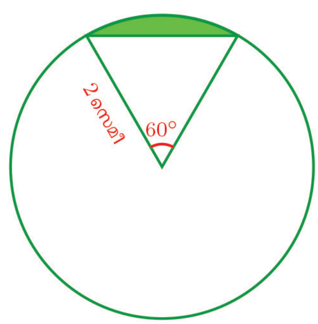
ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെയും പറയാം:

ആരം r ആയ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ $x°$ ആയ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\pi r^2 \times \frac{x}{360}$

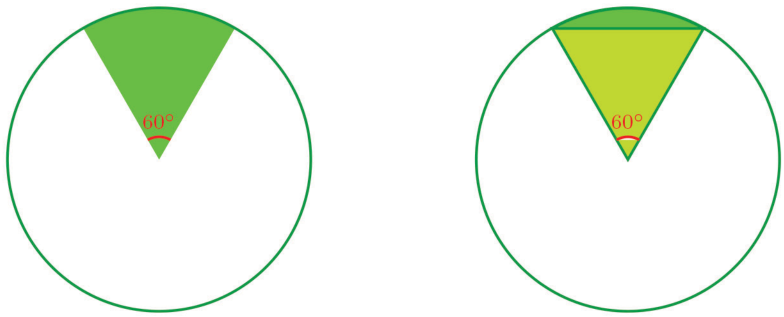
ജിയോജിബ്രയിൽ A എന്ന ഒരു ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി $\sqrt{\frac{240}{\pi}}$ ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. *Circle : Centre & Radius* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് A യിൽ ക്ലിക്കു ചെയ്ത് ആരം *sqrt (240/pi)* എന്ന് നൽകിയാൽ മതി. ഈ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ? വൃത്തത്തിൽ മറ്റൊരു ബിന്ദു B അടയാളപ്പെടുത്തുക. നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിച്ച് വൃത്തത്തിലൂടെ തിരിക്കാവുന്ന ഒരു ബിന്ദു B' അടയാളപ്പെടുത്തുക. *Sector* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് A, B, B' എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ക്ലിക്കു ചെയ്ത് വൃത്താംശം വരയ്ക്കുക. വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. കേന്ദ്രകോൺ $60°$ ആകുമ്പോൾ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാവും ? പരപ്പളവ് 20, 44, 100, 120, 194 ആയ വൃത്താംശങ്ങൾ വരച്ചു നോക്കൂ. ഇവയുടെ കേന്ദ്രകോൺ കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉദാഹരണമായി, വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ $40°$ ആയ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ $\frac{40}{360} = \frac{1}{9}$ ഭാഗമാണ്; വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 3 സെന്റിമീറ്റർ ആണെങ്കിൽ പരപ്പളവ് 9π ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ് π ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കുക. ചിത്രത്തിലെ പച്ച നിറമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ് ?



വൃത്താംശത്തിൽനിന്നൊരു ത്രികോണം മാറ്റിയാൽ ഈ ഭാഗം കിട്ടുമല്ലോ



വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗം;

അതായത്, $4\pi \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\pi$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

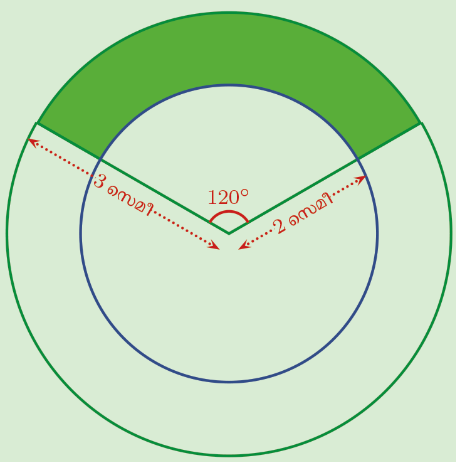
ത്രികോണം സമഭുജമാണ് (കാരണം ?) അതിന്റെ പരപ്പളവ് $\sqrt{3}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

അപ്പോൾ ആദ്യ ചിത്രത്തിലെ വൃത്തഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

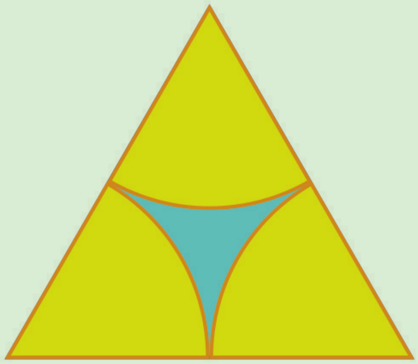
(1) (i) ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 120° ആയ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ് ?

(ii) ആരം 6 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ കേന്ദ്രകോൺ ഇതുതന്നെയായ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവോ ?

(2) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ പച്ച നിറമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക

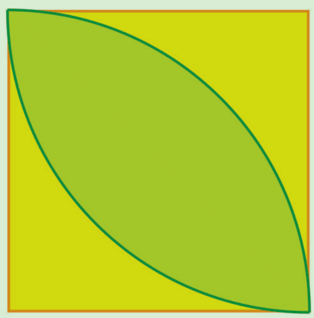


(3) ചിത്രത്തിൽ ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ കേന്ദ്രമായും വശങ്ങളുടെ പകുതി ആരമായും ചാപങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു:



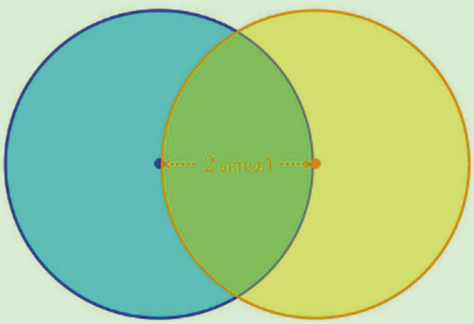
ചിത്രത്തിലെ നീലഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

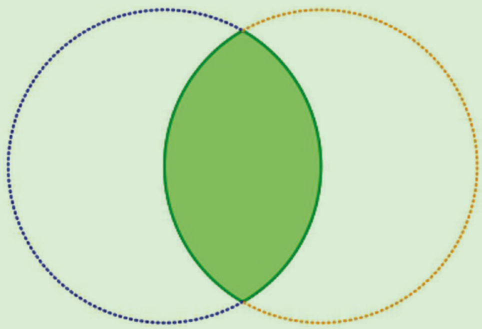
(4) ചിത്രത്തിൽ, ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ രണ്ട് എതിർമൂലകൾ കേന്ദ്രമായി, മറ്റു രണ്ടു മൂലകളിലൂടെയുള്ള ചാപങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു:



ചിത്രത്തിൽ പച്ച നിറം കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

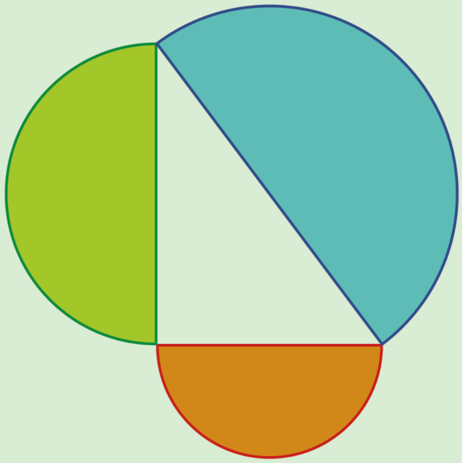
(5) ഒരേ ആരമുള്ള രണ്ടു വൃത്തങ്ങളിൽ ഓരോന്നും മറ്റൊന്നിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ചിത്രമാണ് ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്നത്:





രണ്ടു വൃത്തങ്ങളിലും ഉൾപ്പെടുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(6) ചിത്രത്തിൽ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വ്യാസമായി അർധവൃത്തങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു:



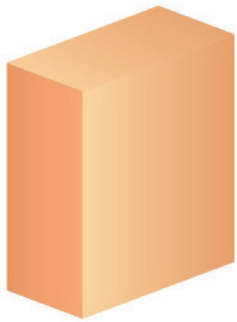
ഏറ്റവും വലിയ അർധവൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ചെറിയ രണ്ട് അർധവൃത്തങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

12

സ്തംഭങ്ങൾ

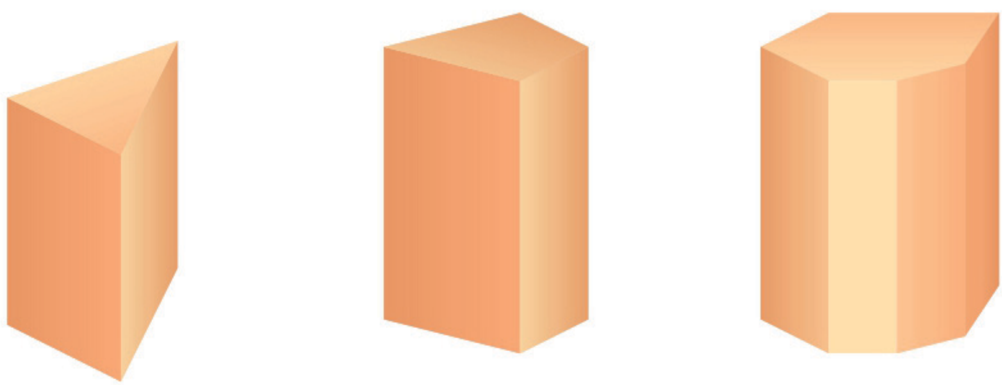
പാദം പലതരം

ചതുരക്കട്ടകളെക്കുറിച്ചും, അവയുടെ വ്യാപ്തത്തെക്കുറിച്ചും ആറാം ക്ലാസിൽ പഠിച്ചല്ലോ:



പല ചതുരങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് ഇതിന്റെ പുറംകൂട്, അഥവാ ഉപരിതലം: താഴെയും മുകളിലും ഒരേപോലെയുള്ള രണ്ടു ചതുരങ്ങൾ, അതുപോലെ ഇടതും വലതും രണ്ടെണ്ണം, മുന്നിലും പിന്നിലും മൂന്നാമതൊരു ജോടി; ആകെ ആറു ചതുരങ്ങൾ.

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



പരപ്പും, ഉയരവുമുള്ള ഇവയെയെല്ലാം **ത്രിമാന രൂപങ്ങൾ (three-dimensional shapes)** അല്ലെങ്കിൽ **ഘനരൂപങ്ങൾ (solids)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇവിടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ഘനരൂപങ്ങൾക്കെല്ലാം പൊതുവായ മറ്റു ചില സവിശേഷതകളുമുണ്ട്.

ആദ്യത്തെ രൂപത്തിന്റെ ഉപരിതലം, താഴെയും മുകളിലും ഒരേ പോലെയുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും, വശങ്ങളിൽ മൂന്നു ചതുരങ്ങളും ചേർന്നതാണ്; രണ്ടാമത്തേതിൽ രണ്ട് ചതുർഭുജങ്ങളും നാല് ചതുരങ്ങളും മൂന്നാമത്തേതിൽ രണ്ട് ഷഡ്ഭുജങ്ങളും ആറ് ചതുരങ്ങളുമാണ്.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഒരേ പോലെയുള്ള രണ്ടു ബഹുഭുജങ്ങളും, അവയുടെ തുല്യവശങ്ങൾ എതിർവശങ്ങളായി ഒരേ ഉയരത്തിൽ നിൽക്കുന്ന ചതുരങ്ങളുമാണ് ഇവയുടെയെല്ലാം ഉപരിതലം. ഇത്തരം രൂപങ്ങളുടെ പൊതുവായ പേര്, **ബഹുഭുജസ്തംഭം (prism)** എന്നാണ്.

ഒരു സ്തംഭത്തിലെ താഴെയും മുകളിലുമുള്ള ബഹുഭുജങ്ങളെയും വശങ്ങളിലുള്ള ചതുരങ്ങളെയുമെല്ലാം അതിന്റെ **മുഖങ്ങൾ (faces)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. താഴത്തും മുകളിലുമുള്ള ബഹുഭുജങ്ങളെ പാദമുഖങ്ങളെന്നും, ചതുരങ്ങളെ പാർശ്വമുഖങ്ങളെന്നും പറയുന്നു. മുഖങ്ങളുടെ വശങ്ങളെ സ്തംഭത്തിന്റെ **വക്കുകൾ (edges)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

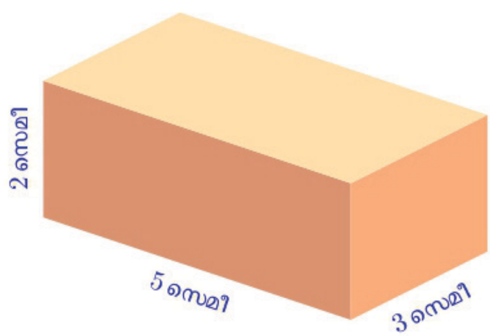
പാദമുഖങ്ങളുടെ ആകൃതിയനുസരിച്ച്, സ്തംഭങ്ങളെ, ത്രികോണസ്തംഭം, ചതുർഭുജസ്തംഭം എന്നെല്ലാം തരംതിരിക്കാം. മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നത്, ഒരു ത്രികോണസ്തംഭവും, ഒരു ചതുർഭുജസ്തംഭവും, ഒരു ഷഡ്ഭുജസ്തംഭവുമാണ്. ഇതുവരെ ചതുരക്കട്ട എന്നു വിളിച്ചിരുന്ന രൂപത്തിനെ (അല്പം കൂടി കനത്തിൽ) ചതുരസ്തംഭം എന്നും വിളിക്കാം.

ജിയോജിബ്രയിൽ ബഹുഭുജ സ്തംഭങ്ങൾ നിർമ്മിക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. സ്തംഭത്തിന്റെ പാദമുഖമാണ് ആദ്യം നിർമ്മിക്കേണ്ടത്. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ബഹുഭുജം വരച്ചാൽ മതി. ഇനി 3D Graphics തുറക്കണം (View → 3D Graphics) നമ്മൾ നിർമ്മിച്ച ബഹുഭുജം അവിടെയും കാണാൻ കഴിയും. 3D Graphics ൽ ക്ലിക്കുചെയ്യുമ്പോൾ ത്രിമാന രൂപങ്ങളുടെ നിർമ്മാണത്തിന് ആവശ്യമായ ടൂളുകൾ മുകളിൽ കാണാം. ഇതിൽനിന്ന് Extrude to Prism എന്ന ടൂൾ എടുത്ത് 3D Graphics ൽ കാണുന്ന ബഹുഭുജത്തിൽ ക്ലിക്കുചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ സ്തംഭത്തിന് ആവശ്യമായ ഉയരം നൽകി ok എന്നതിൽ ക്ലിക്കുചെയ്ത് സ്തംഭം വരയ്ക്കാം. പേരുകൾ എഴുതിക്കാണിക്കുന്നത് ഒഴിവാക്കണമെന്നുണ്ടെങ്കിൽ നിർമ്മാണം തുടങ്ങുന്നതിനു മുമ്പുതന്നെ Options → Labeling → No new objects തിരഞ്ഞെടുത്താൽ മതി.

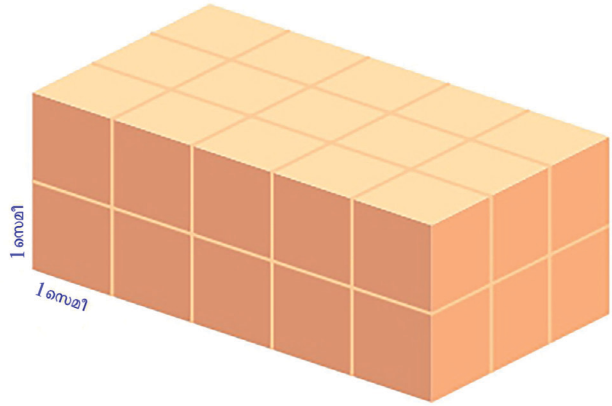
ബഹുഭുജങ്ങളും ചതുരങ്ങളും കാർഡ്ബോർഡിൽ വെട്ടിയെടുത്ത് പൊള്ളയായ പലതരം സ്തംഭങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കിനോക്കൂ.

വ്യാപ്തം

ആറാംക്ലാസിൽ ചതുരസ്തംഭങ്ങളുടെ (ചതുരക്കട്ടകളുടെ) വ്യാപ്തം കണക്കാക്കിയത് ഓർമയുണ്ടോ ? ഉദാഹരണമായി, ഈ ചതുരസ്തംഭം നോക്കുക:



ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ ഇതിനെ വക്കുകളെല്ലാം ഒരു സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരക്കട്ടകളായി ഭാഗിക്കാം:

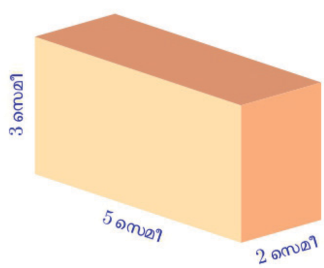


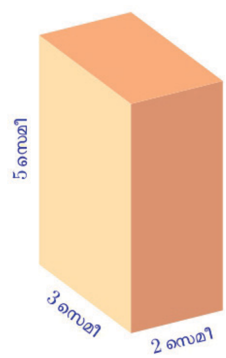
ഇതിൽ $5 \times 3 \times 2 = 30$ ചെറുസമചതുരക്കട്ടകളുണ്ട്; അതിനാൽ ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം 30 ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

ഏഴാം ക്ലാസിൽ **ഭിന്നസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഭിന്നപ്പരപ്പ്** എന്ന ഭാഗത്തു കണ്ടതുപോലെ, ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെയും നീളവും വീതിയും ഉയരവുമെല്ലാം ഭിന്നസംഖ്യകളായാലും വ്യാപ്തം, ഈ നീളങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമാണെന്നു കാണാം. **അഭിന്നകഗുണനം** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഗുണനം** എന്ന ഭാഗത്തിൽ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് വിശദീകരിച്ചതുപോലെ, ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ അളവുകൾ അഭിന്നകസംഖ്യകളാണെങ്കിലും, വ്യാപ്തം അവയുടെ ഗുണനഫലമാണെന്നും കാണാം.

ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം. മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ, ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാദം ഒരു ചതുരമാണ്. വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും; പരപ്പളവ് 5×3 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ; അപ്പോൾ ഈ പരപ്പളവിന്റെയും, സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരമായ 2 സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ് വ്യാപ്തം.

ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ എല്ലാ മുഖങ്ങളും ചതുരമായതിനാൽ, ഏതു മുഖവും പാദമായെടുക്കാം.

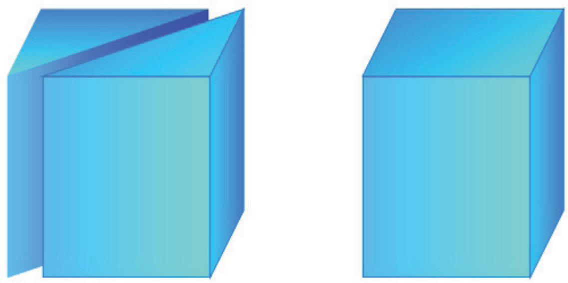




എങ്ങനെയെടുത്താലും, പാദത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം തന്നെയല്ലേ വ്യാപ്തം ?

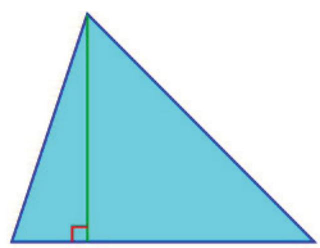
ഏതു സ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാമോ എന്നു നോക്കാം. ആദ്യമൊരു മട്ടത്രികോണസ്തംഭമെടുക്കാം:

ഇതേപോലെയുള്ള ഒരു മട്ടത്രികോണസ്തംഭം കൂടി ചേർത്തുവച്ച് ഒരു ചതുരസ്തംഭമുണ്ടാക്കാമല്ലോ.

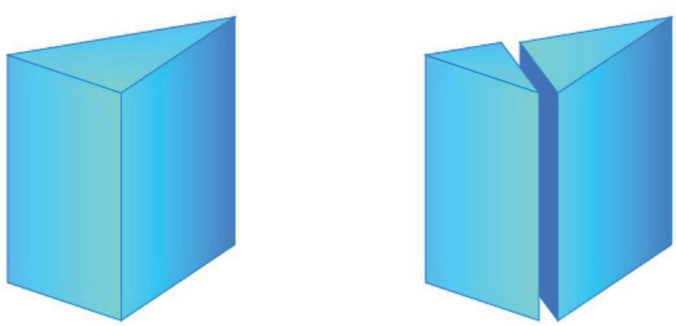


പാദമായ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് a എന്നെടുത്താൽ, ഇത്തരം രണ്ടെണ്ണം ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാദപ്പരപ്പ് (പാദത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്നതിനെ ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിപ്പറയാം) $2a$; ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം തന്നെയാണ് ചതുരസ്തംഭത്തിന്റേയും ഉയരം. അത് h എന്നെടുത്താൽ, ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $2ah$. ഇത് ഒരേപോലെയുള്ള രണ്ടു മട്ടത്രികോണസ്തംഭങ്ങൾ ചേർന്ന വ്യാപ്തമാണ്. അപ്പോൾ ഒരു മട്ടത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ah അതായത്, പാദപ്പരപ്പിന്റേയും, ഉയരത്തിന്റേയും ഗുണനഫലം.

ഇനി പാദം മട്ടമല്ലാത്ത ത്രികോണമാണെങ്കിലോ ? ഏതു ത്രികോണത്തെയും, ഒരു ശീർഷത്തിലൂടെ ലംബം വരച്ച്, രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളാക്കാം:



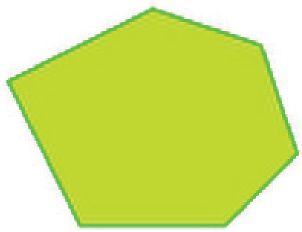
അപ്പോൾ പാദം മട്ടമല്ലാത്ത ത്രികോണമായ സ്തംഭത്തേയും ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലേത് പോലെ പാദങ്ങളിലൂടെ നെടുകെ മുറിച്ചാൽ രണ്ടു മട്ടത്രികോണസ്തംഭങ്ങളാകും.

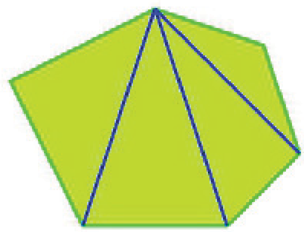


ഭാഗിച്ചു കിട്ടുന്ന മട്ടത്രികോണസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം കൂട്ടിയാൽ, ആദ്യത്തെ സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കിട്ടുകയും ചെയ്യും. ഭാഗിക്കുന്നതിനു മുമ്പുള്ള സ്തംഭത്തിന്റെ പാദപ്പരപ്പ് a, ഭാഗിച്ചു കിട്ടുന്ന സ്തംഭങ്ങളുടെ പാദപ്പരപ്പ് b, c എന്നെല്ലാമെടുത്താൽ $a = b + c$. എല്ലാ സ്തംഭങ്ങൾക്കും ഒരേ ഉയരമാണ്. ഇത് h എന്നെടുത്താൽ, മട്ടത്രികോണസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ തുക $bh + ch = (b + c)h = ah$. ഇത് ആദ്യത്തെ ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാദപ്പരപ്പിനെ ഉയരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണല്ലോ.

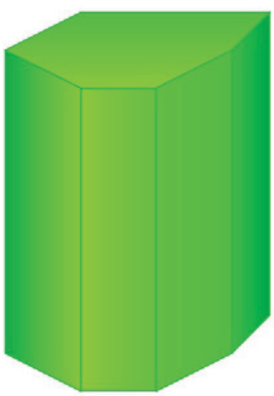
അങ്ങനെ ഏതു ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണെന്നു കിട്ടി.

ഏതു ബഹുഭുജത്തിലും, ഒരു നിശ്ചിത മൂലയും മറ്റെല്ലാ മൂലകളും യോജിപ്പിച്ച്, ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കാം; ബഹുഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അങ്ങനെ ഭാഗിച്ചുകിട്ടുന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയുമാണ്.





അപ്പോൾ ഏതു ബഹുഭുജസ്തംഭത്തേയും, ത്രികോണസ്തംഭങ്ങളായി ഭാഗിക്കാം:



> ജിയോജിബ്രയിൽ Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക. (മൂലകളുടെ എണ്ണം ആറോ ഏഴോ ഒക്കെയാവാം). Area ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ഇതിനുള്ളിൽ ക്ലിക്കുചെയ്താൽ പരപ്പളവ് കാണാൻ കഴിയും. ഈ ബഹുഭുജം പാദമായി വരത്തക്കവിധം ഇഷ്ടമുള്ള ഉയരത്തിൽ ഒരു സ്തംഭം നിർമ്മിക്കുക. Volume ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ഈ സ്തംഭത്തിൽ ക്ലിക്കുചെയ്താൽ അതിന്റെ വ്യാപ്തം കാണാൻ കഴിയും. സ്തംഭത്തിന്റെ പാദപരപ്പും ഉയരവും വ്യാപ്തവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്? സ്തംഭത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിനോക്കൂ. ഒരു മൂല തൊട്ടടുത്തുള്ള മറ്റൊരു മൂലയുടെ മുകളിൽ വരത്തക്കവിധം ക്രമീകരിച്ചാൽ ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കുറയ്ക്കാൻ കഴിയും.

സ്തംഭത്തിന്റെ പാദപ്പരപ്പ് a ആണെന്നും, സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം h ആണെന്നും എടുക്കാം. പാദത്തെ n ത്രികോണങ്ങളാക്കി മുറിച്ചാൽ; ചിത്രത്തിൽക്കണ്ടതുപോലെ സ്തംഭത്തെ n ത്രികോണസ്തംഭങ്ങളായി മുറിക്കാം. ഇവയുടെ പാദപ്പരപ്പ് $b_1, b_2, \ldots, b_n$ എന്നെടുത്താൽ, വ്യാപ്തം $b_1h, b_2h, \ldots, b_nh$ എന്നാകും. അപ്പോൾ ബഹുഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$b_1h + b_2h + \ldots + b_nh = (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)h = ah$$

അതായത്

ഏതു ബഹുഭുജസ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

ഉദാഹരണമായി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

ഒരു സ്തംഭത്തിന്റെ പാദം സമഭുജത്രികോണ മാണ്; അതിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 4 സെന്റിമീറ്റർ. സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം 10 സെന്റി മീറ്റർ. ഇതിന്റെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?

സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വശത്തിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗത്തിന്റെ $\sqrt{3}$ മടങ്ങാണെന്ന് **അഭി ന്നകഗുണനം** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ഈ കണക്കിലെ സ്തംഭത്തിന്റെ പാദമായ സമഭുജത്രി കോണത്തിന്റെ വശം 4 സെന്റിമീറ്റർ.

അപ്പോൾ പാദപ്പരപ്പ്

$$2^2 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ ചസെമീ}$$

ഉയരം 10 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, വ്യാപ്തം

$$4\sqrt{3} \times 10 = 40\sqrt{3} \text{ ഘസെമീ.}$$

ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് ചുവടെ കൊടു ത്തിട്ടുള്ള പ്രവർത്തനങ്ങൾ ചെയ്തുനോക്കൂ.

പാദചുറ്റളവ് 15 ഉം ഉയരം 5 ഉം ആയ ഒരു സമഭുജത്രികോണ സ്തംഭം നിർമിക്കുക (സമബഹുഭുജ ങ്ങൾ നിർമ്മിക്കാൻ Regular Polygon ടൂൾ ഉപയോഗി ക്കാം). ഈ സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ് ?

വക്കുകളുടെയെല്ലാം നീളം തുല്യമായ ഒരു ത്രികോണ സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $16\sqrt{3}$ ആണ്. ഈ സ്തംഭത്തിന്റെ ഒരു വക്കിന്റെ നീളം എത്രയാണ്? ഇത്തരം ഒരു സ്തംഭം നിർമ്മിക്കുക.

വക്കുകളെല്ലാം തുല്യമായ ഒരു സമഷഡ്ഭുജസ്തംഭത്തി ന്റെ വ്യാപ്തം $12\sqrt{3}$ ആണ്. ഇത്തരം ഒരു സ്തംഭം നിർ മ്മിക്കുക.

(1) ഒരു സമഭുജത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ് 18 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററു മാണ്. അതിന്റെ വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(2) ഒരു ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാദവക്കുകൾ 13 സെന്റിമീറ്റർ, 14 സെന്റിമീറ്റർ, 15 സെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെയാണ്. സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം 20 സെന്റിമീറ്ററും. അതിന്റെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?

(3) മഴവെള്ളം ശേഖരിക്കാനായി, സ്കൂൾ മുറ്റത്ത്, സമഷഡ്ഭുജാകൃതിയിൽ ഒരു കുഴിയുണ്ട്. ഇതിന്റെ ഒരു വശം 2 മീറ്ററും, കുഴിയുടെ ആഴം 3 മീറ്ററുമാണ്. ഇതിൽ ഒരു മീറ്റർ ഉയരത്തിൽ വെള്ളമുണ്ട്. അത് എത്ര ലിറ്ററാണ്? ഈ കുഴിയിൽ എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൂടി കൊള്ളും?

(4) സമചതുരസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിന്റെ പാദവക്കുകൾ 16 സെന്റിമീറ്റർ ആണ്. പാത്രത്തിൽ 10 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരത്തിൽ വെള്ളമുണ്ട്. ഇതിൽ, വക്കുകളെല്ലാം 8 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമചതുരക്കട്ട മുക്കിയാൽ, വെള്ളത്തിന്റെ നിരപ്പ് എത്ര സെന്റിമീറ്റർ ഉയരും?

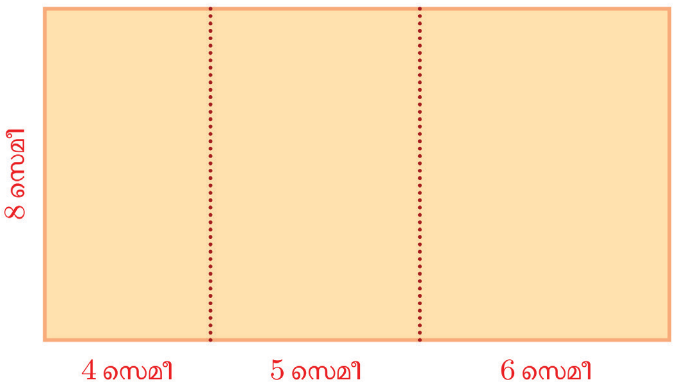
(5) ലോഹം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ വക്കുകൾ 6 സെന്റിമീറ്റർ, 9 സെന്റി മീറ്റർ, 15 സെന്റിമീറ്റർ വീതമാണ്. ഇതുരുക്കി വക്ക് 3 സെന്റിമീറ്ററായ എത്ര സമചതുരക്കട്ട കളുണ്ടാക്കാം?

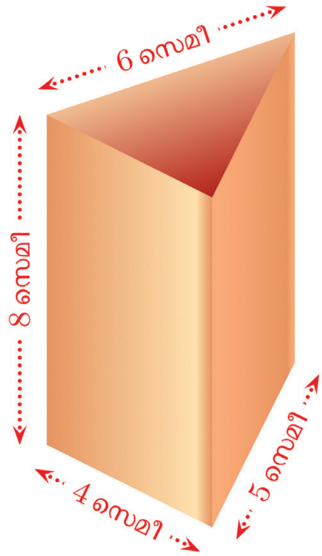
(6) മരംകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു സമചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാദവക്കുകൾ 6 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 10 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്? ഇതിൽ നിന്ന് പരമാവധി എത്ര വ്യാപ്തമുള്ള ത്രികോണസ്തംഭം ചെത്തിയെടുക്കാം?

പരപ്പളവ്

കട്ടിക്കടലാസുകൊണ്ട് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ ഒരു കുഴലുണ്ടാക്കണം:

മൂന്നു ചതുരങ്ങൾ മുറിച്ചൊട്ടിച്ച് ഉണ്ടാക്കാം; ഒറ്റച്ചതുരം മടക്കിയൊട്ടിച്ചും ഉണ്ടാക്കാം.





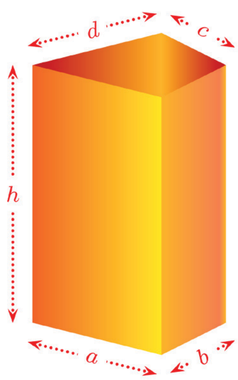
ഇതുണ്ടാക്കാൻ എത്ര ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസ് വേണം? മുകളിലെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

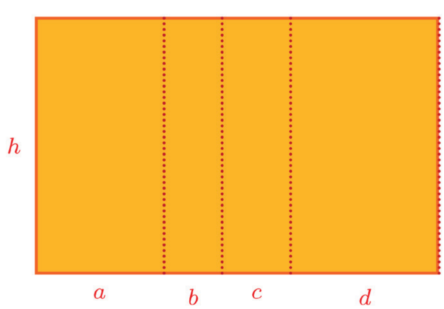
$$(4 + 5 + 6) \times 8 = 15 \times 8 = 120 \text{ ചസെമീ}$$

ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വമുഖങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവ് കൂട്ടിയതല്ലേ ഇത്? പൊതുവെ ഒരു സ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വമുഖങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവിന്റെ തുകയെ അതിന്റെ **പാർശ്വതല പരപ്പളവ് (lateral surface area)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇത് ചുരുക്കി, **പാർശ്വപ്പരപ്പ്** എന്നും പറയാം.

ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ് കണക്കാക്കാൻ, 15 നെ 8 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയാണ് ചെയ്തത്; ഇതിലെ 15 = 4 + 5 + 6, പാദമായ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, 8, സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരവുമല്ലേ? അപ്പോൾ, ഈ സ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ്, പാദചുറ്റളവിന്റേയും ഉയരത്തിന്റേയും ഗുണനഫലമാണ്. അൽപമൊന്നാലോചിച്ചാൽ, ഏതു ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെയും പാർശ്വപ്പരപ്പ് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാമെന്നു കാണാം.

പാദം ത്രികോണത്തിനു പകരം ചതുർഭുജമായാലോ?





കട്ടിക്കടലാസുകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു ബഹുഭുജ സ്തംഭത്തെ പൊളിച്ച് നിവർത്തിവച്ച ഒരു രൂപം ഒന്നു സങ്കൽപ്പിച്ചു നോക്കൂ. ഈ രൂപം മടക്കി ഒട്ടിച്ച് വീണ്ടും സ്തംഭമാക്കുകയും ചെയ്യാം. ജിയോജിബ്രയിൽ നിർമ്മിച്ച ഒരു ബഹുഭുജ സ്തംഭത്തിനെ ഇങ്ങനെ ചെയ്യാൻ *Net* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് സ്തംഭത്തിൽ ക്ലിക്കു ചെയ്താൽ മതി. ബഹുഭുജ സ്തംഭങ്ങൾ നിർമ്മിച്ച് അവയുടെ *Net* നിർമ്മിച്ചു നോക്കൂ.

ഈ ചതുർഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ്, നിവർത്തിവെച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് തന്നെയാണല്ലോ. അത് $(a+b+c+d)h$ ആണ്; അതായത്, പാദചതുർഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെയും, സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം.

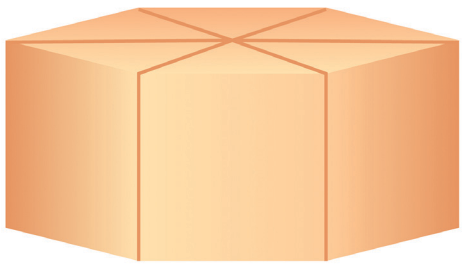
ഇതുപോലെ ഏതു ബഹുഭുജസ്തംഭത്തിന്റെയും പാർശ്വപ്പരപ്പ് കണക്കാക്കാം:

ഏതു ബഹുഭുജസ്തംഭത്തിന്റെയും പാർശ്വപ്പരപ്പ്, പാദചുറ്റളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

അടഞ്ഞ സ്തംഭമാണെങ്കിൽ ഉപരിതലത്തിന്റെ ആകെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ, പാർശ്വപ്പരപ്പിനോട് പാദപ്പരപ്പിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് കൂട്ടിയാൽ മതി.

ഒരു കണക്കു നോക്കാം:

മരം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു സമഭുജത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ് 48 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്ററും അതിന്റെ ഉയരം 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇത്തരം ആറെണ്ണം ചേർത്തുവച്ച് ഒരു ഷഡ്ഭുജസ്തംഭമുണ്ടാക്കി.



ഇതു മുഴുവൻ വർണക്കടലാസൊട്ടിച്ച് ഭംഗിയാക്കാൻ, എത്ര ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസ് വേണം ?

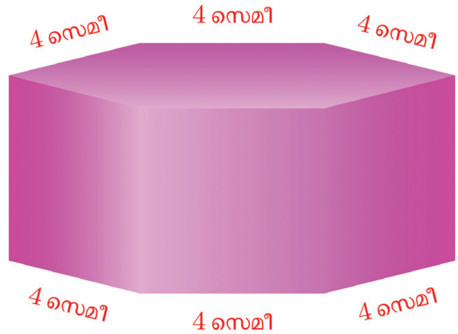
ഷഡ്ഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ മുഴുപ്പരപ്പാണിവിടെ വേണ്ടത്; അതിന് പാർശ്വപ്പരപ്പും, പാദപ്പരപ്പുകളും കൂട്ടണം.

പാർശ്വപ്പരപ്പ് കണക്കാക്കാൻ, ഷഡ്ഭുജപാദത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് വേണം. അതിന് ത്രികോണപാദത്തിന്റെ വശങ്ങൾ കണക്കാക്കണം.

ഏതു സ്തംഭത്തിന്റെയും പാർശ്വപ്പരപ്പിനെ ഉയരംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, പാദചുറ്റളവു കിട്ടും. അപ്പോൾ, കണക്കിൽ പറഞ്ഞ ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ് $48 \div 4 = 12$ സെന്റിമീറ്റർ.

പാദം ഒരു സമഭുജത്രികോണമായതിനാൽ ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ മൂന്നുമടങ്ങാണ് ചുറ്റളവ്; ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം $12 \div 3 = 4$ സെന്റിമീറ്റർ.

കണക്കിലെ ഷഡ്ഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ് ഇനി കണക്കാക്കാമല്ലോ



വശങ്ങളെല്ലാം 4 സെന്റിമീറ്ററായ ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $6 \times 4 = 24$ സെന്റിമീറ്റർ. സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരവും 4 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ് $24 \times 4 = 96$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി രണ്ടു പാദങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടണം. ഒരു ത്രികോണ പാദത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$2^2 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ ചസെമീ}$$

ഇവ ആറെണ്ണം ചേർന്ന ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

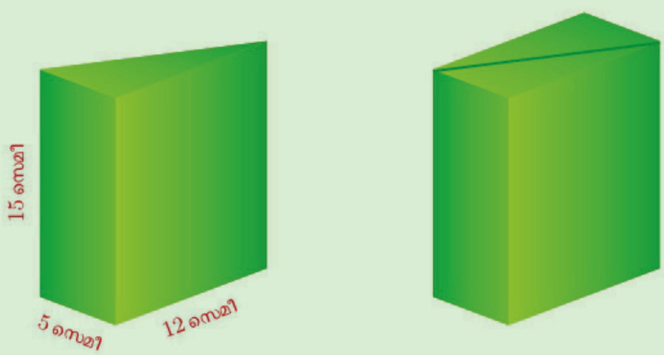
അപ്പോൾ ഷഡ്ഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ ഉപരിതലം മുഴുവനെടുത്താൽ പരപ്പളവ്

$$96 + (2 \times 24\sqrt{3}) = 96 + 48\sqrt{3} = 48(2 + \sqrt{3}) \text{ ചസെമീ.}$$

ഈ സംഖ്യ 179 നേക്കാൾ അല്പം കൂടുതലെന്നു കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ചു കണക്കാക്കാം. ഏതായാലും 180 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസ് മതിയാകും.

(1) ഒരു സമഭുജത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ് 12 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ ഉപരിതലത്തിന്റെ ആകെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(2) ചിത്രത്തിൽക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, പാദം മട്ടത്രികോണമായ രണ്ടു സ്തംഭങ്ങൾ ചേർത്തു വച്ച് ഒരു ചതുരസ്തംഭം ഉണ്ടാക്കി.



ഈ ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതലപ്പരപ്പെത്രയാണ്?

(3) ഒരു ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാദവക്കുകൾ 4 സെന്റിമീറ്റർ, 13 സെന്റിമീറ്റർ, 15 സെന്റിമീറ്റർ വീതവും ഉയരം 25 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. പാർശ്വപ്പരപ്പളവും ഉപരിതലത്തിന്റെ ആകെ പരപ്പളവും കണക്കാക്കുക.

(4) ഒരു സമഭുജത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ് 120 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണ്.

(i) ഇത്തരം രണ്ടു സ്തംഭങ്ങൾ ചേർത്തുവച്ച് ഉണ്ടാക്കുന്ന സമഭുജസാമാന്തരികസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ് എത്രയാണ് ?

(ii) ഇത്തരം മൂന്നു സ്തംഭങ്ങൾ ചേർത്തുവച്ച് ഉണ്ടാക്കുന്ന സമപാർശ്വലംബകസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ് എത്രയാണ് ?

(iii) ഇത്തരം ആറു സ്തംഭങ്ങൾ ചേർത്തുവച്ച് ഉണ്ടാക്കുന്ന സമഷഡ്ഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ് എത്രയാണ് ?

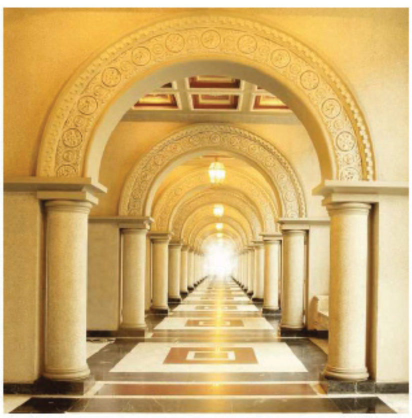
(5) വശങ്ങളെല്ലാം 10 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമചതുരത്തകിടുകൾ ആറെണ്ണം ചേർത്തുവച്ച് ഒരു സമചതുരസ്തംഭം ഉണ്ടാക്കി.

(i) ഈ സ്തംഭത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതലപ്പരപ്പ് എത്രയാണ് ?

(ii) ഇതിൽ എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും ?

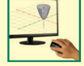
വൃത്തസ്തംഭം

അറ്റത്ത് തുല്യമായ ബഹുഭുജങ്ങളും, വശങ്ങളിൽ ചതുരങ്ങളുമായ ത്രിമാന രൂപങ്ങളാണ് ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങൾ. അറ്റത്ത് വൃത്തങ്ങളും, വശങ്ങൾ ചതുരങ്ങളായി മടങ്ങാതെ ഒഴുക്കൻ വളവുമായ സ്തംഭങ്ങളുമുണ്ട്; കട്ടിയും പൊള്ളയുമായ ഇത്തരം രൂപങ്ങൾ ധാരാളം കണ്ടിട്ടുണ്ടാകുമല്ലോ.



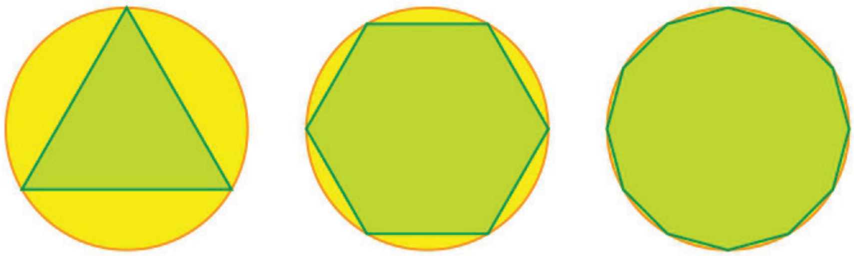
ഇത്തരം ഘനരൂപങ്ങളെ വൃത്തസ്തംഭം (cylinder) എന്നാണു പറയുന്നത്.

വൃത്തസ്തംഭങ്ങളുടെയും വ്യാപ്തം, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണോ ?

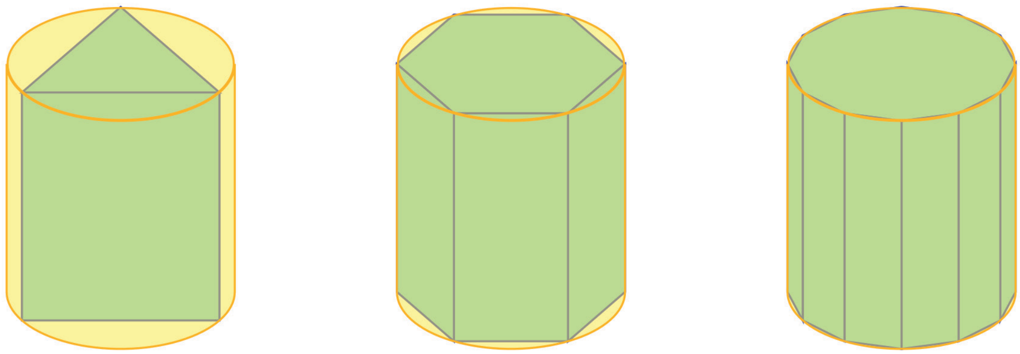


ജിയോജിബ്രയിൽ ബഹുഭുജ സ്തംഭങ്ങൾ നിർമ്മിച്ചപോലെ വൃത്ത സ്തംഭങ്ങളും ജിയോജിബ്രയിൽ നിർമ്മിക്കാം. *Graphics* ൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് *3D Graphics* ൽ നിന്നും *Extrude to Prism* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തത്തിൽ ക്ലിക്കുചെയ്ത്, ഉയരം എത്ര എന്ന് നൽകിയാൽ മതി.

വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കിയത്, അതിനുള്ളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂട്ടിയിട്ടാണല്ലോ:

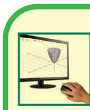


ഇതുപോലെ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കാൻ, അതിനുള്ളിൽ പല സമബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങൾ സങ്കൽപിക്കാം:



ഈ ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിനോട് അടുത്തടുത്തുവരുമല്ലോ ?

ഇനി അല്പം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച്, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണെന്നു കാണാം.



ജിയോജിബ്രയിൽ A എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമാക്കി 3 യൂണിറ്റ് ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു B അടയാളപ്പെടുത്തുക. *Max-200* ആകത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ n നിർമ്മിക്കുക. *Angle with Given Size* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് B യിലും തുടർന്ന് A യിലും ക്ലിക്കു ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവ് $(360/n)^\circ$ എന്നു നൽകുക. ഒരു പുതിയ ബിന്ദു B' ലഭിക്കും. *Regular Polygon* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് B യിലും B' ലും ക്ലിക്കുചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ n എന്ന് നൽകുക. n വശങ്ങളുള്ള ഒരു സമബഹുഭുജം വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ ലഭിക്കും. ഇത് പാദമാകത്തക്കവിധം ഒരു ബഹുഭുജസ്തംഭം നിർമ്മിക്കുക. n വലുതാക്കി നോക്കൂ. ബഹുഭുജ സ്തംഭത്തിന് എന്തു സംഭവിക്കുന്നു?

- ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളുടെ പാദപ്പരപ്പ് $p_1, p_2, p_3, \ldots$ എന്നെടുക്കാം
- വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദപ്പരപ്പ് c എന്നെടുക്കാം. അപ്പോൾ $p_1, p_2, p_3, \ldots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ c എന്ന സംഖ്യയോട് അടുത്തടുത്തുവരും
- വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം h എന്നെടുക്കാം
- $p_1h, p_2h, p_3h, \ldots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ ch എന്ന സംഖ്യയോട് അടുത്തടുത്തു വരും

* $p_1h, p_2h, p_3h, \ldots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തമാണ്

* ബഹുഭുജ സ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തങ്ങൾ, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന് അടുത്തടുത്തു വരും

- വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം v എന്നെടുക്കാം,
- $p_1h, p_2h, p_3h, \ldots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ v എന്ന സംഖ്യയോട് അടുത്തടുത്തു വരും

മുകളിലെഴുതിയിരിക്കുന്നവയിൽ, ചുവന്ന ചതുരത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ രണ്ടു കാര്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$v = ch$$

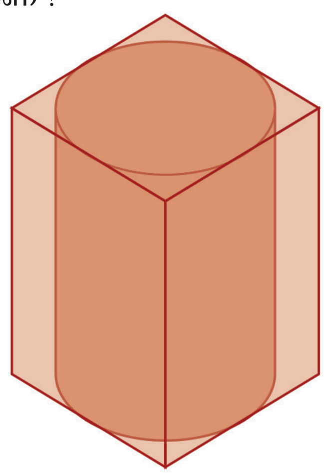
എന്ന് കാണാമല്ലോ. അതായത്,

വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിനെ π കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ വ്യാപ്തം $\pi \times 3^2 \times 5 = 45\pi$ ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

മറ്റൊരു കണക്ക്:

സമചതുരസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തടിക്കഷണത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കെല്ലാം 10 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുണ്ട്. സ്തംഭത്തിന് 20 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരവുമുണ്ട്. ഇതിൽനിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?



സമചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിനുള്ളിൽ വരയ്ക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തമാണ് ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദം; ഉയരം, സമചതുരസ്തംഭത്തിന്റേതുതന്നെ.

അതായത്, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ വ്യാസം, സമചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിനു തുല്യമാകണം.

അപ്പോൾ, പാദവൃത്തത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റിമീറ്റർ; പാദപ്പരപ്പളവ് 25π ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ. സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം 20 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, വ്യാപ്തം $25\pi \times 20 = 500\pi$ ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

(1) പാദവ്യാസം 1 മീറ്ററും, ഉയരം 2 മീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ജലസംഭരണിയിൽ എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും ?

(2) ഇരുമ്പുകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം 15 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 32 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇതുരുക്കി, പാദത്തിന്റെ ആരം 20 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തസ്തംഭം ഉണ്ടാക്കി. ഈ സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?

(3) ഒരേ ഉയരമുള്ള രണ്ടു വൃത്തസ്തംഭങ്ങളുടെ പാദത്തിന്റെ ആരം 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഇവയുടെ വ്യാപ്തം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

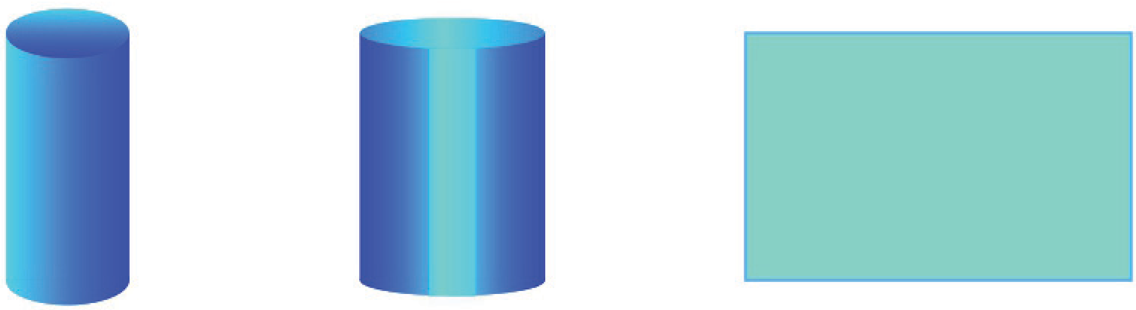
(4) രണ്ടു വൃത്തസ്തംഭങ്ങളുടെ പാദത്തിന്റെ ആരം 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലും ഉയരം 5 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിലുമാണ്.

(i) ഇവയുടെ വ്യാപ്തം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

(ii) ചെറിയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം 720 ഘനസെന്റിമീറ്റർ; വലുതിന്റെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?

വക്രതലം

ചതുരാകൃതിയിലുള്ള കടലാസോ, തകിടോ വളച്ച്, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ആകൃതിയിലുള്ള കുഴലുണ്ടാക്കാം; മറിച്ച്, പൊള്ളയായ, രണ്ടറ്റവും തുറന്ന ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിനെ മുറിച്ച്, വളവു നിവർത്തിയാൽ ഒരു ചതുരമാകും:



ഈ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വക്രതല പരപ്പളവ് (curved surface area) എന്നാണ് പറയുന്നത്; ചുരുക്കി വക്രപ്പരപ്പ് എന്നും പറയാം.

ഈ ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം തന്നെയാണ്. മറ്റേ വശം, പാദവൃത്തം നിവർത്തിയെടുത്തതാണ്. അതായത്, അതിന്റെ നീളം, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണ്. ഈ നീളങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമാണ് വക്രപ്പരപ്പ്.

വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വക്രപ്പരപ്പ്, പാദചുറ്റളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വ്യാസത്തിന്റെ π മടങ്ങാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ വക്രപ്പരപ്പ് $\pi \times 6 \times 5 = 30\pi$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇത് അടഞ്ഞ സ്തംഭമാണെങ്കിൽ, ഉപരിതലത്തിന്റെ മൊത്തം പരപ്പളവ് കിട്ടാൻ, രണ്ടറ്റത്തെയും വൃത്തങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കൂടി കൂട്ടണം. അതായത്, $30\pi + (2 \times 3^2 \times \pi) = 48\pi$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

(1) ഒരു സ്കൂൾ കെട്ടിടത്തിൽ വൃത്തസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള 12 തൂണുകളുണ്ട്. ഓരോന്നിന്റെയും പാദവ്യാസം $\frac{1}{2}$ മീറ്ററും ഉയരം 4 മീറ്ററുമാണ്.

(i) ഒരു തൂണിന്റെ വക്രതലപരപ്പളവെത്രയാണ് ?

(ii) എല്ലാ തൂണുകളും ചായം പൂശുന്നതിന് ചതുരശ്രമീറ്ററിന് 80 രൂപ നിരക്കിൽ എത്ര രൂപ ചെലവ് വരും ?

(2) 1.20 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു റോളറിന്റെ വ്യാസം 80 സെന്റിമീറ്റർ ആണ്.

ഇത് ഒരു പ്രാവശ്യം കറക്കുമ്പോൾ, നിരപ്പാവുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

(3) ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വക്രപ്പരപ്പും, പാദപ്പരപ്പും തുല്യമാണ്. പാദത്തിന്റെ ആരവും, സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ് ?

(4) നീളം 48 സെന്റിമീറ്ററും, വീതി 25 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ചതുരത്തകിട് വളച്ച്, 25 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരമുള്ള കുഴലുണ്ടാക്കി, കൃത്യമായ അളവിൽ മുറിച്ചെടുത്ത വൃത്തങ്ങൾ കൊണ്ട് ഇതിന്റെ രണ്ടറ്റവും അടച്ചു. ഈ സ്തംഭത്തിന്റെ ഉപരിതലപ്പരപ്പ് എത്രയാണ് ?

24 സെന്റിമീറ്റർ നീളവും 18 സെന്റിമീറ്റർ വീതിയുമുള്ള കട്ടിക്കടലാസ് നീളത്തിൽ മടക്കി സമഭുജത്രികോണസ്തംഭം, സമചതുരസ്തംഭം, സമഷഡ്ഭുജസ്തംഭം, സമഅഷ്ടഭുജസ്തംഭം, വൃത്തസ്തംഭം എന്നിവ ഉണ്ടാക്കുന്നു. ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളുടെയെല്ലാം പാർശ്വപരപ്പും വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വക്രപ്പരപ്പും തുല്യമായിരിക്കുമല്ലോ. ഓരോന്നിന്റെയും വ്യാപ്തമോ ? എന്തു പ്രത്യേകതയാണ് കിട്ടുന്നത് ?

ഇതേ വലുപ്പമുള്ള കട്ടികടലാസുകൾ വീതിയിൽ മടക്കി മുകളിൽ പറഞ്ഞ സമബഹുഭുജ സ്തംഭങ്ങളും വൃത്തസ്തംഭവുമുണ്ടാക്കിയാലോ ? രണ്ടുകൂട്ടം സ്തംഭങ്ങളുടെയും പാർശ്വപരപ്പ്, വക്രപ്പരപ്പ്, വ്യാപ്തം എന്നിവയിലുള്ള സാമ്യവ്യത്യാസങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

13

ബഹുപദചിത്രങ്ങൾ

ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങൾ

അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളെ ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളായി എഴുതുന്ന രീതി ആറാം ക്ലാസ് മുതൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇവയെ കേവലസംഖ്യകളിന്മേൽ ചെയ്യുന്ന ക്രിയകളായി **ബഹുപദങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടു. ഇങ്ങനെ നോക്കുമ്പോൾ, ഓരോ ബഹുപദവും ഒരു നിശ്ചിത നിയമമനുസരിച്ച് സംഖ്യകളെ മാറ്റുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി

$$p(x) = 2x + 1$$

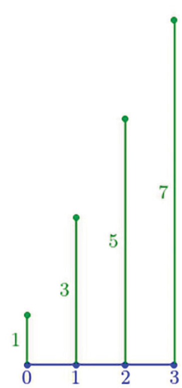
എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം എടുക്കാം. ഏതു സംഖ്യയെയും 2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച്, 1 കൂട്ടുകയാണ് ഇവിടെ ചെയ്യുന്നത്. അപ്പോൾ x ആയി 0, 1, 2, 3 എന്നീ സംഖ്യകൾ എടുത്താൽ $p(x)$ ആയി 1, 3, 5, 7 എന്നീ സംഖ്യകൾ കിട്ടും (ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ പൊതുരൂപം ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമ്മ വരുന്നുണ്ടോ ?).

x മാറുന്നതനുസരിച്ച് $p(x)$ മാറുന്നത് ഇങ്ങനെ ഒരു പട്ടികയായി കാണിക്കാം:

x	0	1	2	3
$p(x)$	1	3	5	7

അഞ്ചാം ക്ലാസിലെയും ആറാം ക്ലാസിലെയും സ്ഥിതിവിവരക്കണക്കുകളിൽ ചെയ്തതുപോലെ ഈ പട്ടികയെ ചിത്രമാക്കിയാലോ ?

ആദ്യം വിലങ്ങനെയുള്ള ഒരു വര വരച്ച്, അതിൽ ഒരേ അകലം ഇടവിട്ട് 0, 1, 2, 3 എന്നിങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താം; ഇനി ഈ സ്ഥാനങ്ങളിൽ നിന്ന്, വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിൽ എടുത്ത അകലം തന്നെ ഉപയോഗിച്ച്, $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ എന്ന ഉയരങ്ങളിൽ ലംബം വരയ്ക്കാം.

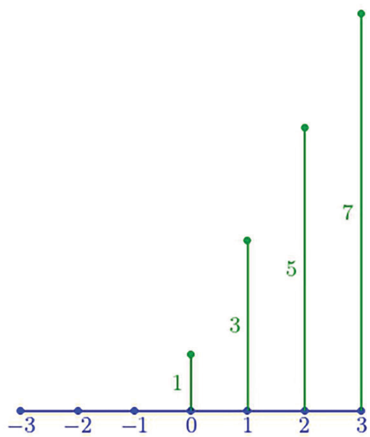


x ആയി ന്യൂനസംഖ്യകളും എടുക്കാമല്ലോ. അപ്പോൾ പട്ടിക ഇടത്തോട്ടും നീട്ടാം:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$p(x)$	−5	−3	−1	1	3	5	7

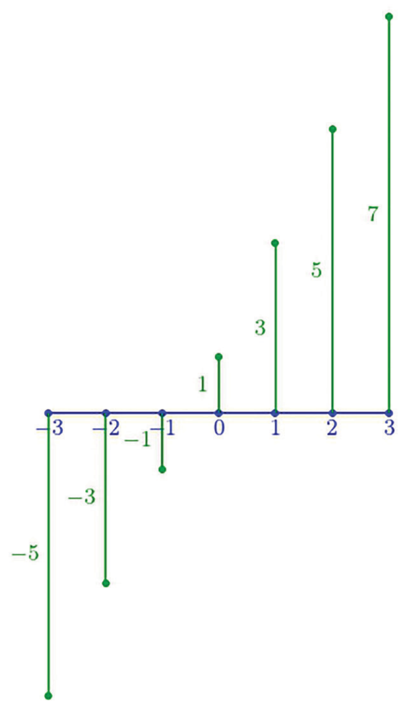
ഈ സംഖ്യകളും ചിത്രത്തിൽ വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

രേഖീയസംഖ്യകൾ എന്ന പാഠത്തിൽ ചെയ്തതുപോലെ, വിലങ്ങനെയുള്ള വരയെ ഇടത്തോട്ട് നീട്ടി, x ആയെടുത്ത ന്യൂനസംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്താം:



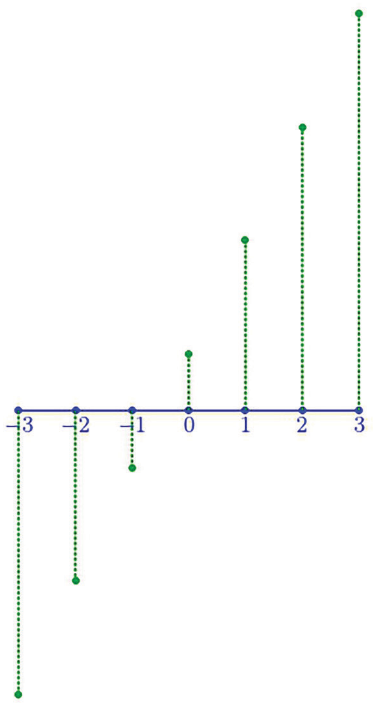
ഇനി ന്യൂനസംഖ്യകളായ $p(x)$ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നതെങ്ങനെ ?

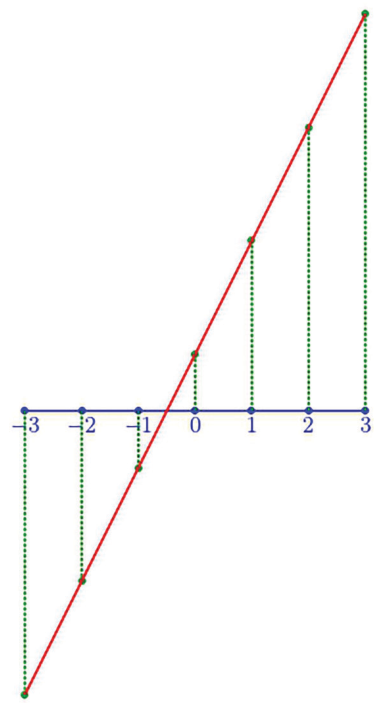
അധിസംഖ്യകളായ $p(x)$ സൂചിപ്പിക്കാൻ ലംബങ്ങൾ വരച്ചത് മുകളിലേക്ക് ആയതുകൊണ്ട്, ന്യൂനങ്ങളായ $p(x)$ താഴോട്ടു വരയ്ക്കാം.



ഈ ലംബങ്ങളുടെ അറ്റങ്ങൾ മാത്രം നോക്കൂ:

അവയെല്ലാം ഒരേ വരയിലാണോ ? സ്കെയിൽ വച്ച് വരച്ചു നോക്കൂ:



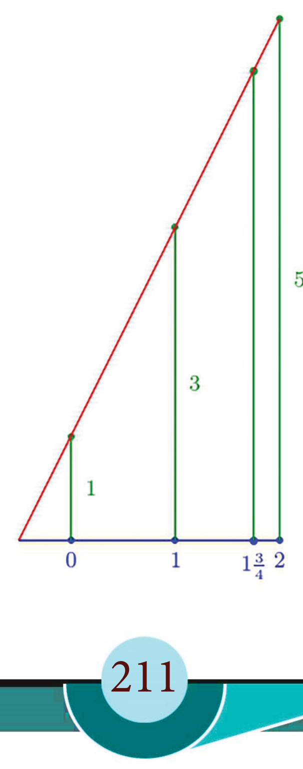


x ആയി മറ്റു സംഖ്യകൾ എടുത്താലും, $p(x)$ എന്ന ഉയരത്തിൽ (അല്ലെങ്കിൽ താഴ്ചയിൽ) വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ അറ്റം ഈ വരയിൽത്തന്നെ ആയിരിക്കുമോ ?

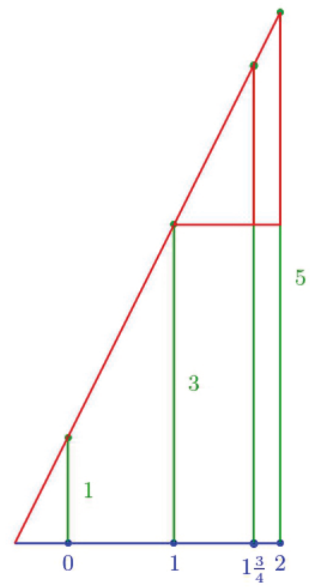
ഉദാഹരണമായി $x = 1\frac{3}{4}$ എന്നെടുത്താലോ ?

$$p\left(1\frac{3}{4}\right) = \left(2 \times 1\frac{3}{4}\right) + 1 = 4\frac{1}{2}$$

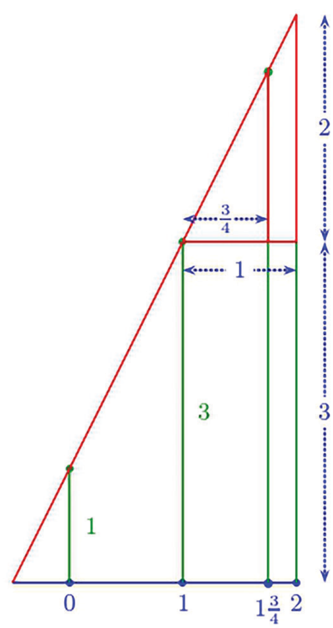
വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിൽ $1\frac{3}{4}$ അടയാളപ്പെടുത്തി, ലംബം വരച്ച് ചുവന്ന വരയെ മുട്ടിക്കാം. ഈ ലംബത്തിന്റെ ഉയരം $4\frac{1}{2}$ തന്നെയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കണം. അതു കാണാൻ ചിത്രത്തിന്റെ ആവശ്യമുള്ള ഭാഗം മാത്രം, സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കൂട്ടി, വരച്ചത് നോക്കൂ.



ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെപ്പോലെ ഒരു ലംബവും കൂടി വരച്ചാൽ ചിത്രത്തിന്റെ മുകൾഭാഗത്ത് (ചുവന്ന നിറത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന) രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടുമല്ലോ

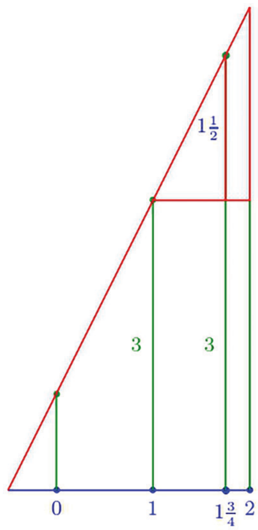


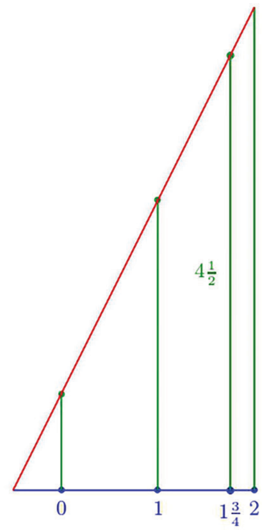
ഈ ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ കോണുകളാണ് (എന്തുകൊണ്ട് ?). അതിനാൽ, ഇവയുടെ വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണ് (**സദൃശത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠം). രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും ചില വശങ്ങളുടെ നീളം എളുപ്പം കാണാം:



വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാണ്, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം. അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കുത്തനെയുള്ള വശവും, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ

കുത്തനെയുള്ള വശത്തിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗം തന്നെ ആകണമല്ലോ; അതായത് ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കുത്തനെയുള്ള വശത്തിന്റെ നീളം $2 \times \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$

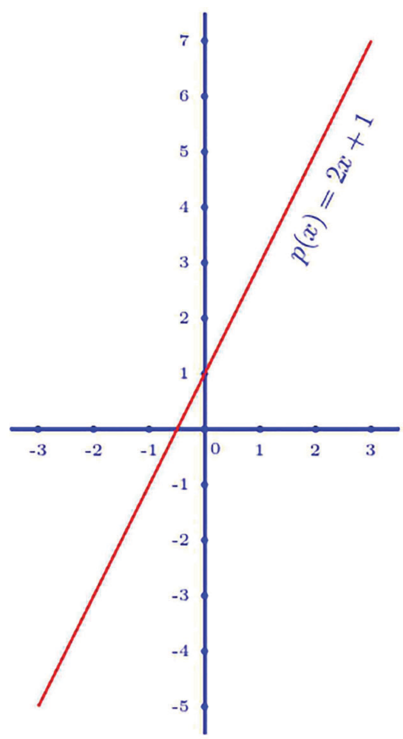




അപ്പോൾ, $1\frac{3}{4}$ എന്ന സ്ഥാനത്തുനിന്ന് ചുവന്ന വരയിലേക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ നീളം $3 + 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$.

തിരിച്ചുപറഞ്ഞാൽ താഴത്തെ വരയിലെ $x = 1\frac{3}{4}$ എന്ന സ്ഥാനത്തുനിന്ന് $p\left(1\frac{3}{4}\right) = 4\frac{1}{2}$ എന്ന ഉയരത്തിൽ (അല്ലെങ്കിൽ താഴ്ചയിൽ) വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ അറ്റം ചുവന്ന വരയിൽത്തന്നെയാണ്.

ഇതുപോലെ, x ആയി ഏതു സംഖ്യ (ഭിന്നകമോ, അഭിന്നകമോ) എടുത്താലും, വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിൽ ആ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് $p(x)$ ഉയരത്തിൽ (അല്ലെങ്കിൽ താഴ്ചയിൽ) വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ അറ്റം ഈ ചുവന്ന വരയിൽത്തന്നെ ആയിരിക്കും എന്നു കാണാം.



ഈ വരയെ $p(x) = 2x + 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രരൂപം (graph) എന്നാണ് പറയുന്നത്. സാധാരണയായി ഇങ്ങനെ ചിത്രരൂപം വരയ്ക്കുമ്പോൾ ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കാതെ അവയുടെ അറ്റങ്ങൾ മാത്രം അടയാളപ്പെടുത്തി അവ ചേർത്തു വരയ്ക്കുകയാണ് പതിവ്. ഉയരങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാൻ, വിലങ്ങനെ സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയ വരയിൽ 0 എന്ന സ്ഥാനത്തിലൂടെ ലംബം വരച്ച്, അതിലും അതേ അകലം ഇടവിട്ട് സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യും.

ഒരു ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രരൂപം ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കാൻ Input Bar ഉപയോഗിക്കാം. $p(x) = 2x + 1$ എന്നതിന്റെ ചിത്രരൂപം വരയ്ക്കാൻ Input Bar ൽ $p(x) = 2x + 1$ എന്ന് ടൈപ്പുചെയ്ത് Enter നൽകിയാൽ മതി ($2x + 1$ എന്ന് മാത്രം ടൈപ്പുചെയ്താലും ചിത്രം കിട്ടും. എന്നാൽ ബഹുപദത്തിന്റെ പേര് $p(x)$ എന്ന് കിട്ടണമെന്നില്ല).

ഇതേ രീതിയിൽത്തന്നെ, ഏത് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെയും ചിത്രരൂപം നേർവരയാണെന്നു കാണാം.

ഒരു വര വരയ്ക്കാൻ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ മതിയല്ലോ. അപ്പോൾ ഒരു ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രരൂപം വരയ്ക്കാൻ, x ആയി ഏതെങ്കിലും രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്ത്, ബഹുപദത്തിൽനിന്നു കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കിയാൽ മതി.

ഉദാഹരണമായി,

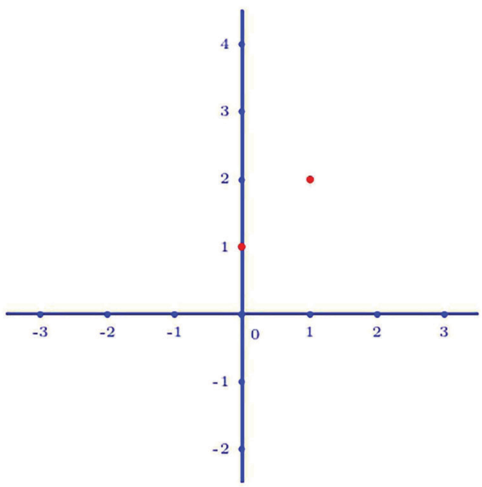
$$p(x) = x + 1$$

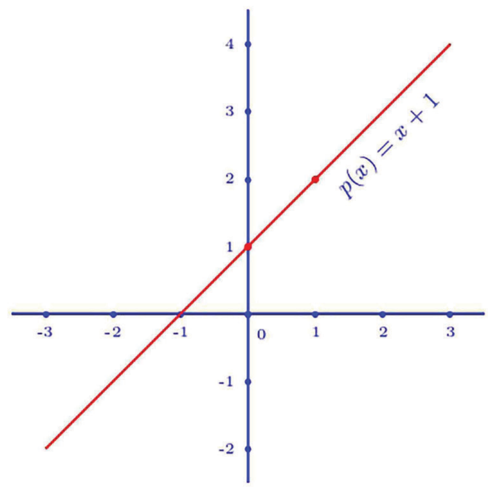
എന്ന ബഹുപദം നോക്കുക.

x ആയി 0, 1 എന്നീ സംഖ്യകളെടുക്കാം:

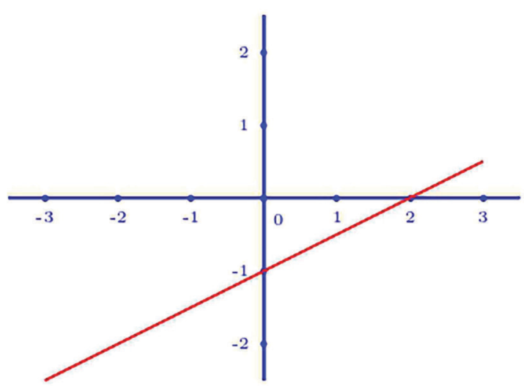
x	0	1
$p(x)$	1	2

ഇനി ചിത്രരൂപം വരയ്ക്കാമല്ലോ ?





മറിച്ച്, ചിത്രരൂപത്തിൽനിന്ന് ബഹുപദം കണക്കാക്കാനും എളുപ്പമാണ്. ഉദാഹരണമായി, ഈ ചിത്രം നോക്കുക:



ഇതിന്റെ ബഹുപദം $p(x)$ എന്നെടുക്കാം. അപ്പോൾ $p(0) = -1$ ഉം $p(2) = 0$ എന്നും ചിത്രത്തിൽ നിന്നു കാണാമല്ലോ ?

ഇനി $p(x)$ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം ആയതിനാൽ

$$p(x) = ax + b$$

എന്ന രൂപത്തിൽ ആയിരിക്കും (**ബഹുപദങ്ങൾ** എന്ന പാഠം). ഇതിലെ a, b എന്നീ സംഖ്യകളാണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്.

അതിന് $p(0) = -1$ എന്നും $p(2) = 0$ എന്നും ചിത്രത്തിൽനിന്നു കിട്ടിയ കാര്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

ജിയോജിബ്രയിൽ Increment : 0.1 ആയി a, b എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് സ്ലൈഡറുകൾ നിർമ്മിക്കുക. $p(x) = ax + b$ എന്ന് Input bar ൽ ടൈപ്പു ചെയ്ത് ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രരൂപം വരയ്ക്കുക. b എന്ന സ്ലൈഡർ മാത്രം മാറ്റിനോക്കൂ. വരയ്ക്ക് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത് a മാത്രം മാറ്റിയാലോ ? $p(0) = -1$ ഉം $p(2) = 5$ ഉം ആയാൽ $p(x)$ എന്തായിരിക്കുമെന്ന് ഇതുപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കാൻ കഴിയുമോ ? ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ. $p(1) = 2, p(2) = 6$ ആയാലോ ?

$p(x) = ax + b$ ആയതിനാൽ

$$p(0) = (a \times 0) + b = b$$

$p(0) = -1$ ആയതിനാൽ, ഇതിൽനിന്ന്

$$b = -1$$

എന്നു കിട്ടും.

ഇതുപയോഗിച്ച്

$$p(2) = (a \times 2) + b = 2a + b = 2a - 1$$

എന്നു കാണാം. ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് $p(2) = 0$ എന്നും കിട്ടിയിട്ടുണ്ട്. അപ്പോൾ

$$2a - 1 = 0$$

എന്നും ഇതിൽനിന്ന്

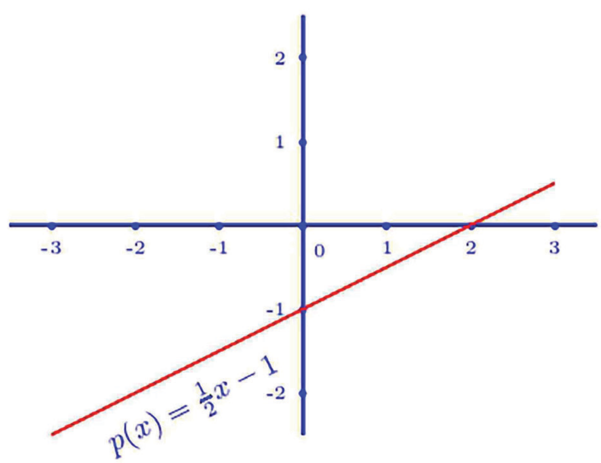
$$a = \frac{1}{2}$$

എന്നും കിട്ടും.

അപ്പോൾ മുകളിൽക്കണ്ട വരയുടെ ബഹുപദരൂപം

$$p(x) = \frac{1}{2}x - 1$$

അഥവാ, $p(x) = \frac{1}{2}x - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രരൂപമാണ് ഈ വര.

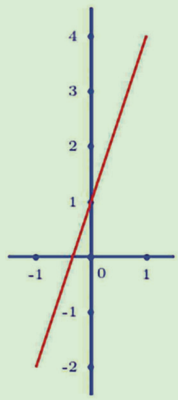


(1) ചുവടെയുള്ള ബഹുപദങ്ങളുടെ ചിത്രരൂപം വരയ്ക്കുക

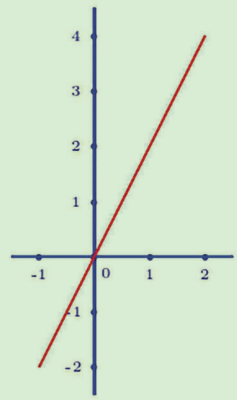
(i) $p(x) = 2x - 1$ (ii) $p(x) = x - 1$ (iii) $p(x) = 1 - x$

(iv) $p(x) = x$ (v) $p(x) = -x$

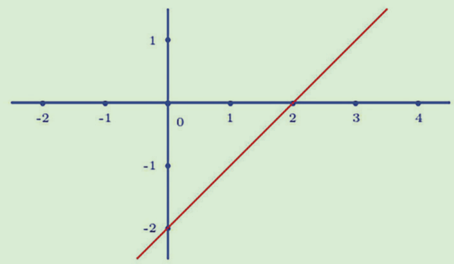
(2) ചുവടെയുള്ള വരകളുടെ ബഹുപദരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുക:



(i)



(ii)



(iii)

രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങൾ

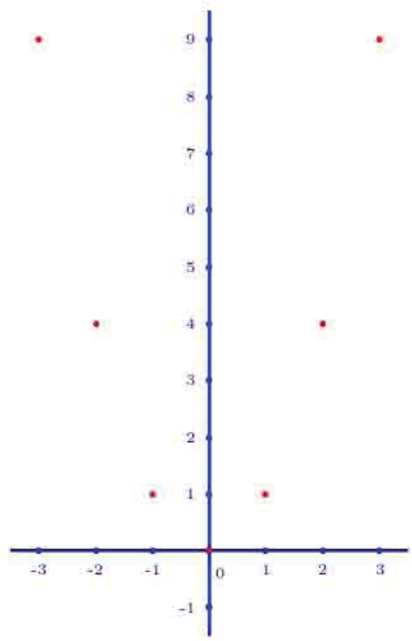
ഇനി രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ചിത്രരൂപം നോക്കാം. ഏറ്റവും ലളിതമായ രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദം ഏതാണ് ?

$$p(x) = x^2$$

ഇതിന്റെ ചിത്രരൂപം വരയ്ക്കാൻ ആദ്യം ഒരു ചെറിയ പട്ടിക ഉണ്ടാക്കാം:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	9	4	1	0	1	4	9

ഇനി നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ലംബമായി രണ്ടു വരകൾ വരച്ച്, ഒരേ അകലത്തിൽ സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്താം; തുടർന്ന് വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിൽ x ആയി എടുക്കുന്ന സംഖ്യകളിൽനിന്ന് $p(x)$ എന്ന ഉയരത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങളുടെ മുകളറ്റങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്താം:

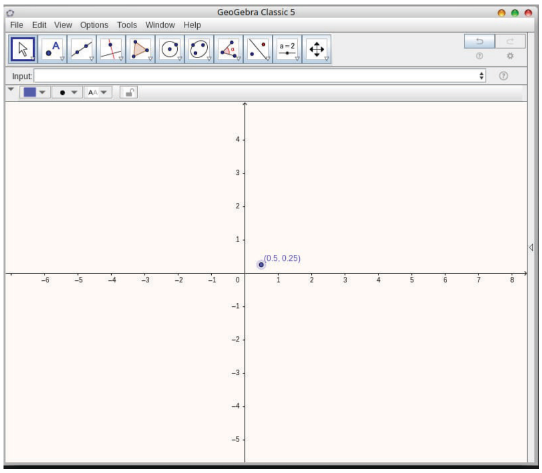


ഇത്രയും ബിന്ദുക്കൾ മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് കൃത്യമായ ചിത്രം വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല. ഇവയുടെ ഇടയിലുള്ള ചില ബിന്ദുക്കൾ കിട്ടാൻ എന്താണു വഴി?

$x = 0.5$ എന്നെടുത്താൽ $p(0.5) = 0.25$ എന്നാണ് കിട്ടുക. ഈ ഉയരം സ്കെയിൽ വച്ച് വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ലല്ലോ?

ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കാൻ ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിക്കാം.

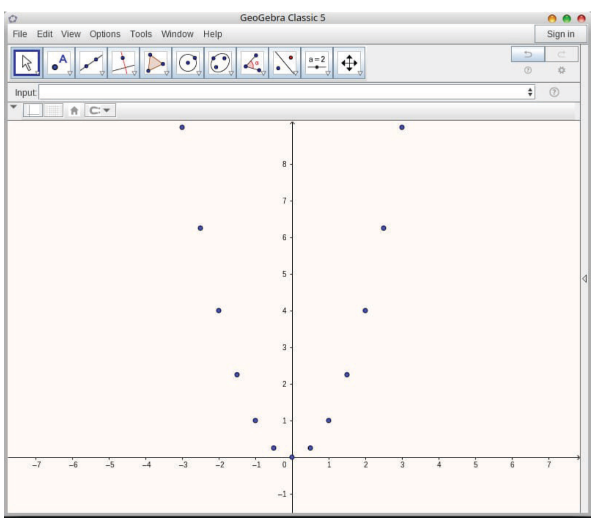
ജിയോജിബ്ര തുറന്നാൽ വിലങ്ങനെയും കുത്തനെയും ഒരേ അകലത്തിൽ സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയ വരകൾ കാണാം. ഇനി Input Bar ൽ (0.5, 0.25) എന്നു കൊടുത്താൽ, വിലങ്ങനെയുള്ള അകലം 0.5 ഉം, കുത്തനെയുള്ള ഉയരം 0.25 ഉം ആയ ബിന്ദു കാണാം:



ഇങ്ങനെ നമുക്കാവശ്യമായ ബിന്ദുക്കളുടെയെല്ലാം അകലവും ഉയരവും വെവ്വേറെ കണക്കാക്കി, ഓരോന്നായി അടയാളപ്പെടുത്തുന്നതിനു പകരം, കുറേ ബിന്ദുക്കൾ ഒന്നിച്ച് അടയാളപ്പെടുത്താനും മാർഗമുണ്ട്. Input Bar ൽ ഇങ്ങനെ ടൈപ്പ് ചെയ്യുക:

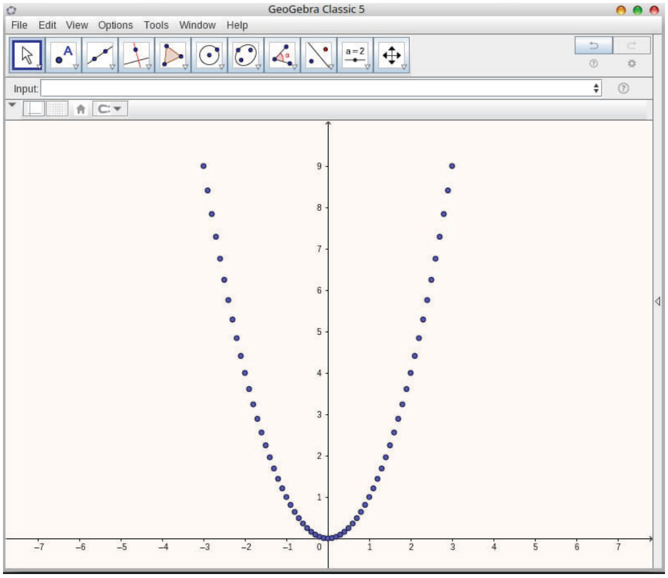
```
Sequence [(t, t^2), t, -3, 3, 0.5]
```

(−3 മുതൽ 3 വരെ 0.5 ഇടവിട്ടുള്ള സംഖ്യകൾ t ആയെടുത്ത്, t അകലത്തിൽ, t^2 ഉയരത്തിൽ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക എന്നതാണ് ഈ നിർദേശത്തിന്റെ അർഥം). അപ്പോൾ ഇങ്ങനെയൊരു ചിത്രം കിട്ടും.



കുറേക്കൂടി ബിന്ദുക്കൾ കിട്ടാൻ, t ആയി എടുക്കുന്ന സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 0.5 നു പകരം, 0.1 ആക്കാം:

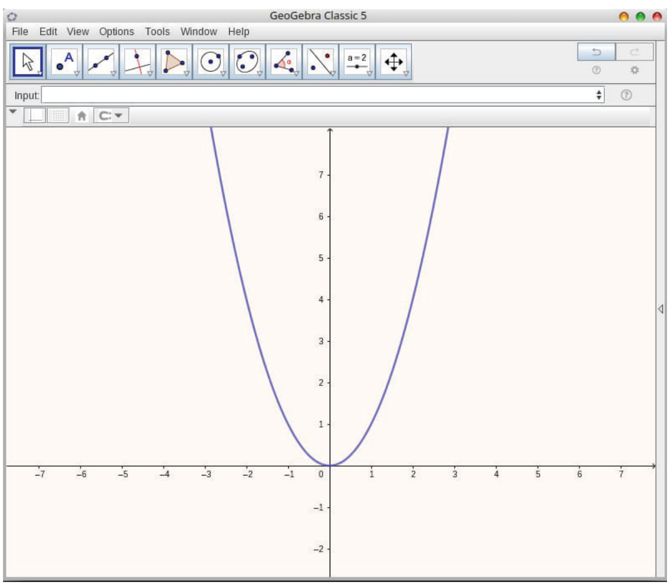
```
Sequence[(t,t^2),t,-3,3,0.1]
```



ജിയോജിബ്രയിൽ Min = 0, Max = 1, Increment : 0.01 ആകത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ a നിർമ്മിക്കുക. Input bar ൽ Sequence [(t, t^2), t, –3, 3, a] എന്ന് ടൈപ്പുചെയ്യുക. $p(x) = x^2$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ കിട്ടും. സ്ലൈഡർ മാറ്റിനോക്കൂ. a യുടെ വില കുറയുന്നതിനനുസരിച്ച് കൂടുതൽ അടുത്തടുത്ത ബിന്ദുക്കൾ കിട്ടും.

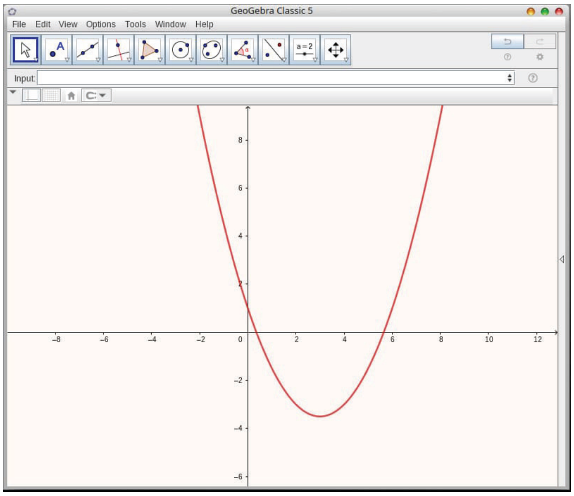
ഇപ്പോൾ ചിത്രത്തിന്റെ ഏകദേശ രൂപം കിട്ടിയില്ലേ?

ഇനി വിടവുകളൊന്നും ഇല്ലാതെ ഈ വക്രം (curve) വരയ്ക്കാൻ, Input Bar ൽ **x^2** എന്നു ടൈപ്പ് ചെയ്താൽ മതി.

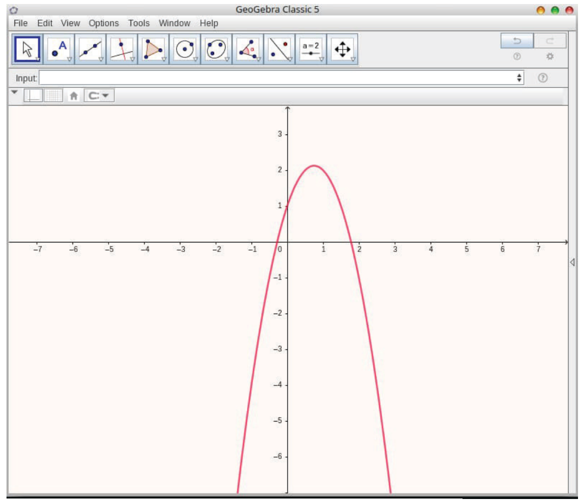


ജിയോജിബ്രയിൽ Increment : 0.1 ആകത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ a നിർമ്മിക്കുക. Input Bar ൽ (a, a ^ 2) എന്ന് ടൈപ്പുചെയ്യുമ്പോൾ ഒരു ബിന്ദു ലഭിക്കും. സ്ലൈഡർ മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ഈ ബിന്ദു ചലിക്കുന്നത് കാണാം. ഇത് സഞ്ചരിക്കുന്ന പാത ഏതാണ്? അത് കിട്ടാൻ ബിന്ദുവിൽ Right click ചെയ്ത് Trace on നൽകിയാൽ മതി. Increment : 0.1 എന്നതിനു പകരം 0.01 എന്നോ മറ്റോ നൽകിയാൽ കുറച്ചുകൂടി അടുത്തടുത്ത് ബിന്ദുക്കൾ കിട്ടും (സ്ലൈഡറിൽ Right click ചെയ്ത് Object properties → Slider → Increment എന്ന രീതിയിൽ Increment മാറ്റാൻ കഴിയും). Locus ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് സ്ലൈഡറിലും ബിന്ദുവിലും ക്ലിക്കുചെയ്താലും ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാര പാത കിട്ടും.

ഇതുപോലെ Input Bar-ൽ വേറെ രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങൾ ടൈപ്പ് ചെയ്തു നോക്കൂ: ഉദാഹരണമായി, **(1/2)x^2 – 3x + 1** എന്നും **–2x^2 + 3x + 1** എന്നും കൊടുത്താൽ കിട്ടുന്ന ചിത്രങ്ങൾ അടുത്തപേജിൽ കാണാം.



$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$



$-2x^2 + 3x + 1$

വ്യത്യസ്ത രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ചിത്ര രൂപങ്ങൾ നോക്കിയാൽ, സ്ഥാനം മാറുക, വിരിവ് കൂടുകയോ കുറയുകയോ ചെയ്യുക, കീഴ്മേൽ മറിയുക എന്നിങ്ങനെയല്ലാതെ, പൊതുവെ വക്രത്തിന്റെ രൂപം മാറുന്നില്ലല്ലോ.

ഇടത്തുനിന്ന് വലത്തേക്ക് നോക്കുമ്പോൾ, ചിത്രത്തിലെ വക്രം

- ഒന്നുകിൽ കുറേ ദൂരം താഴോട്ടിറങ്ങി, ഏറ്റവും താഴ്ന്ന സ്ഥാനത്തെത്തി, തുടർന്ന് മേലോട്ടുയരുന്നു.
- അല്ലെങ്കിൽ കുറേ ദൂരം മേലോട്ടുയർന്ന്, ഏറ്റവും ഉയർന്ന സ്ഥാനത്തെത്തി, തുടർന്ന് താഴോട്ടിറങ്ങുന്നു.

ജിയോജിബ്രയിൽ a എന്ന ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിക്കുക. $p(x) = x^2 + a$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രരൂപം വരയ്ക്കുക. a എന്ന സംഖ്യ മാറ്റി നോക്കൂ, ചിത്രത്തിന് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? $q(x) = ax^2$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രരൂപം വരയ്ക്കുക. a മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ചിത്രത്തിനെന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്?

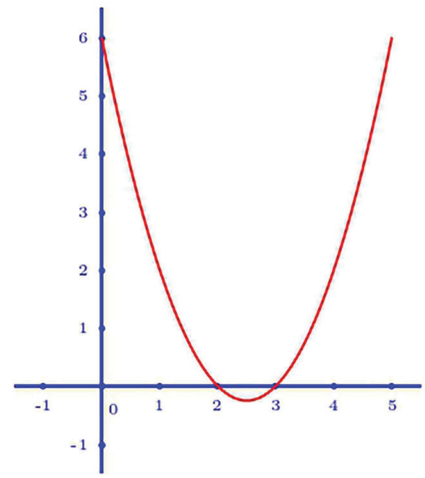
ഇതിന്റെ ബീജഗണിത വിവരണം എന്താണ്?

$p(x)$ എന്ന ഏതു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിലും, ന്യൂനസംഖ്യകളിൽ നിന്നു തുടങ്ങി, ക്രമേണ വലുതായി, അധിസംഖ്യകളാകുന്ന x എടുത്താൽ,

- ഒന്നുകിൽ $p(x)$ എന്ന സംഖ്യകൾ ക്രമേണ ചെറുതായി, ഏറ്റവും ചെറിയ ഒരു സംഖ്യയിൽ എത്തിയതിനുശേഷം വലുതാകും.
- അല്ലെങ്കിൽ $p(x)$ എന്ന സംഖ്യകൾ ക്രമേണ വലുതായി, ഏറ്റവും വലിയ ഒരു സംഖ്യയിൽ എത്തിയതിനുശേഷം ചെറുതാകും.

ഇനി ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രത്തിൽനിന്ന്, ആ ബഹുപദം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാമെന്ന് നോക്കാം:

ഉദാഹരണമായി ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രമാണ് ഇത്:



ഇതിന്റെ ബഹുപദരൂപം $p(x)$ എന്നെടുത്താൽ, ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$p(0) = 6$$

$$p(2) = 0$$

$$p(3) = 0$$

എന്നു കാണാം.

$p(x)$ രണ്ടാംകൃതിബഹുപദം ആയതിനാൽ

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

എന്നെഴുതാം (**ബഹുപദങ്ങൾ** എന്ന പാഠം).

അപ്പോൾ

$$p(0) = (a \times 0^2) + (b \times 0) + c = c$$

ഇനി $p(0) = 6$ എന്നതിൽനിന്ന്

$$c = 6$$

എന്നും, അതിനാൽ

$$p(x) = ax^2 + bx + 6$$

എന്നും കിട്ടും.

അടുത്തതായി $p(2) = 0$ എന്നതിൽ നിന്ന്

$$4a + 2b + 6 = 0$$

എന്നും $p(3) = 0$ എന്നതിൽ നിന്ന്

$$9a + 3b + 6 = 0$$

എന്നും കാണാം. ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തെ

$$2a + b = -3 \qquad (1)$$

എന്നും രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തെ

$$3a + b = -2 \qquad (2)$$

എന്നും മാറ്റി എഴുതാമല്ലോ.

സമവാക്യം (2) ൽനിന്ന് സമവാക്യം (1) കുറച്ചാൽ

$$a = -2 - (-3) = -2 + 3 = 1$$

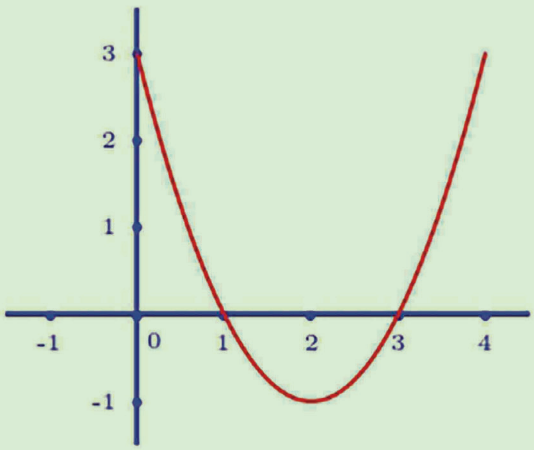
എന്ന് കിട്ടും. ഇനി സമവാക്യം (1) ൽനിന്ന്

$$b = -3 - 2 = -5$$

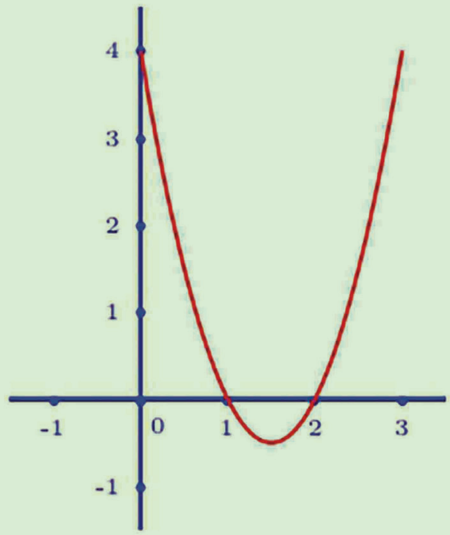
എന്നും കണക്കാക്കാം. അപ്പോൾ ചിത്രത്തിന്റെ ബഹുപദരൂപം

$$p(x) = x^2 - 5x + 6$$

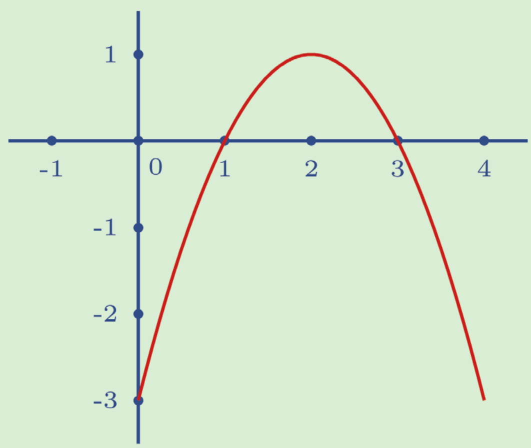
ചില രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ചിത്രങ്ങളാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.



(i)



(ii)

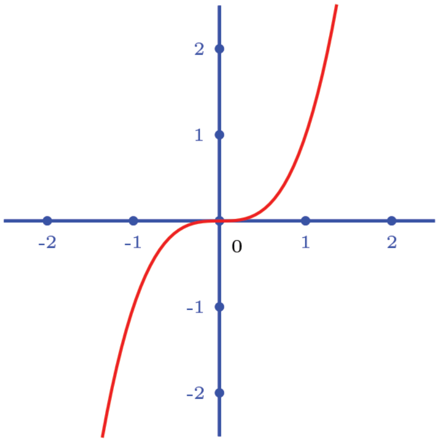


(iii)

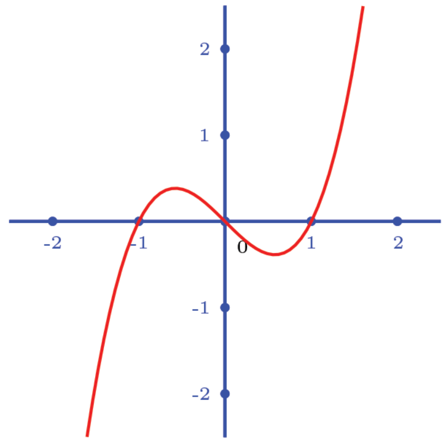
ഓരോന്നിന്റെയും ബഹുപദരൂപം കണക്കാക്കുക.

മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെയെല്ലാം ചിത്രങ്ങൾക്ക് ഇങ്ങനെയൊരു പൊതുവായ രൂപം ഇല്ല. ഉദാഹരണമായി, ഈ ബഹുപദങ്ങളുടെ ചിത്രം ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് വരച്ചു നോക്കുക.

- $p(x) = x^3$
- $p(x) = x^3 - x$



$p(x) = x^3$



$p(x) = x^3 - x$

ചുവടെപ്പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങളുടെ ചിത്രം വരയ്ക്കുക:

(i) $p(x) = x$ (ii) $p(x) = 2x$ (iii) $p(x) = \frac{1}{2}x$ (iv) $p(x) = -x$ (v) $p(x) = -2x$

ഈ വരകൾക്കെല്ലാം പൊതുവായ എന്തെങ്കിലും സവിശേഷതയുണ്ടോ ?

ഇതുപോലെ ചുവടെയുള്ള ബഹുപദങ്ങളുടെയും ചിത്രം വരയ്ക്കുക:

(i) $p(x) = x + 1$ (ii) $p(x) = x + 2$ (iii) $p(x) = x + \frac{1}{2}$

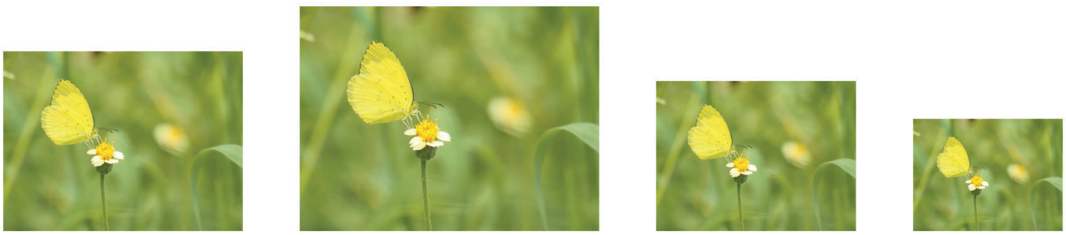
(iv) $p(x) = x - 1$ (v) $p(x) = x - 2$

ഈ വരകൾക്കെല്ലാം പൊതുവായ എന്തെങ്കിലും സവിശേഷതയുണ്ടോ ?

14 അനുപാതം

ആനുപാതിക മാറ്റം

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ



ഒരു ഫോട്ടോ തന്നെ പല വലുപ്പത്തിൽ.

ഇങ്ങനെ ഒരു ഫോട്ടോ ചെറുതോ വലുതോ ആക്കുമ്പോൾ, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം മാറരുത് എന്ന് ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (ഏഴാംക്ലാസിലെ **അംശബന്ധം** എന്ന പാഠം).

ഇവിടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങളിലെല്ലാം നീളവും ഉയരവും തമ്മിലുള്ള **അംശബന്ധം** 4 : 3 ആണ്. അതായത്, നീളത്തിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാണ് ഉയരം; തിരിച്ചു പറഞ്ഞാൽ ഉയരത്തിന്റെ $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ മടങ്ങാണ് നീളം.

ഇനി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:

നീളവും ഉയരവും 16 : 9 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാക്കി എടുത്ത ഒരു ഫോട്ടോ പല വലുപ്പത്തിൽ; അതായത് എല്ലാറ്റിലും നീളത്തിന്റെ $\frac{9}{16}$ ഭാഗം ഉയരം; തിരിച്ചു പറഞ്ഞാൽ ഉയരത്തിന്റെ $\frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$ മടങ്ങ് നീളം.

അപ്പോൾ ഓരോ കൂട്ടം ചിത്രങ്ങളിലും, നീളവും ഉയരവും മാറുന്നുണ്ടെങ്കിലും ഒരളവ് മറ്റൊരളവിന്റെ നിശ്ചിത മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആണ്.

ഇത് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാലോ?

ആദ്യം കണ്ട ചിത്രങ്ങളിലെ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം w എന്നും, ഉയരം h എന്നും എടുത്താൽ

$$h = \frac{3}{4}w$$

രണ്ടാമത്തെ ചിത്രങ്ങളിൽ ഇതുപോലെ എടുത്താലോ?

$$h = \frac{9}{16}w$$

മാറുന്ന രണ്ട് അളവുകൾ ഇത്തരത്തിൽ ബന്ധപ്പെടുന്ന അനേകം സന്ദർഭങ്ങളുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, വ്യത്യസ്ത ആരമുള്ള വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചാൽ, അവയുടെയെല്ലാം ചുറ്റളവ്, ആരത്തിന്റെ 2π മടങ്ങാണല്ലോ. ആരം r എന്നും ചുറ്റളവ് c എന്നും എടുത്താൽ

$$c = 2\pi r$$

ഈ ഉദാഹരണങ്ങളിലെല്ലാം നീളങ്ങളിലെ മാറ്റങ്ങളാണ് കണ്ടത്. വ്യത്യസ്ത തരം അളവുകൾ തമ്മിലും ഇത്തരം ബന്ധം ഉണ്ടാകാം.

ഉദാഹരണമായി, ഒരു വരയിലൂടെ 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന ഒരേ വേഗത്തിലാണ് ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്നതെങ്കിൽ, സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം, സഞ്ചരിക്കാനെടുത്ത സമയത്തിന്റെ 10 മടങ്ങാണല്ലോ. സഞ്ചരിച്ച ദൂരം (മീറ്ററിൽ) s എന്നും, സഞ്ചരിക്കാനെടുത്ത സമയം (സെക്കന്റിൽ) t എന്നും എടുത്താൽ

$$s = 10t$$

ഇത്തരത്തിൽ രണ്ട് അളവുകൾ മാറുന്നതിന് പൊതുവായ ഒരു പേരുണ്ട്.

> പരസ്പരം ബന്ധപ്പെട്ട രണ്ട് അളവുകൾ മാറുമ്പോൾ, എപ്പോഴും ഒരു അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയുടെ നിശ്ചിത മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആണ് മറ്റേ അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയെങ്കിൽ, ഈ മാറ്റം ആനുപാതികമാണ് (proportional) എന്നു പറയുന്നു.

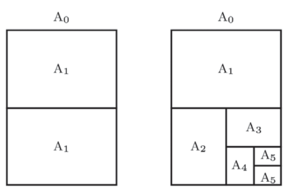
(അംശബന്ധങ്ങളുടെ തുല്യതയെ ആണ് **അനുപാതം** (proportion) എന്നു പറയുന്നത്).

ആനുപാതിക മാറ്റങ്ങളിൽ, നിശ്ചിത മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആയി മാറാതെ നിലനിൽക്കുന്ന സംഖ്യയെ **ആനുപാതികസ്ഥിരം (proportionality constant)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

കടലാസ്സിലെ അനുപാതം

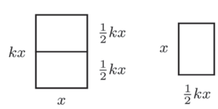
പകർപ്പെടുക്കാനും മറ്റും ഇപ്പോൾ സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്നത് A_4 കടലാസ് ആണല്ലോ. A_0, A_1, A_2 എന്നീ പേരിൽ വലുപ്പം കുറഞ്ഞുവരുന്ന കടലാസുകളുണ്ട്.

ഇതിൽ ഓരോന്നിന്റെയും വലുപ്പം, തൊട്ടുമുമ്പുള്ളതിന്റെ പകുതിയാണ്.



മാത്രവുമല്ല, ഈ കടലാസുകളുടെയെല്ലാം വീതിയും ഉയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം തുല്യമാണ്.

ഇത്തരം കടലാസകളുടെ വീതി x ഉം, ഉയരം kx എന്നും എടുക്കാം. തൊട്ടടുത്ത വലുപ്പമുള്ള കടലാസിന്റെ വീതിയും ഉയരവും അപ്പോൾ $\frac{1}{2}kx$ ഉം x ഉം ആകും.



വീതിയും ഉയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം തുല്യമായതിനാൽ

$$\frac{1}{2}k = \frac{1}{k}$$

ഇതിൽനിന്ന് $k^2 = 2$ എന്നും അതിനാൽ

$$k = \sqrt{2}$$

എന്നും കാണാം. അതായത് A ശ്രേണിയിലുള്ള കടലാസുകളുടെ ഉയരം, വീതിക്ക് ആനുപാതികമായാണ് മാറുന്നത്; ആനുപാതിക സ്ഥിരം $\sqrt{2}$.

നേരത്തെ കണ്ട ഉദാഹരണങ്ങൾ ഒന്നുകൂടി നോക്കാം

- GIMP പോലുള്ള ഏതെങ്കിലും കമ്പ്യൂട്ടർ പ്രോഗ്രാം ഉപയോഗിച്ച് ആദ്യം കണ്ട ചിത്രങ്ങളിൽ ഒന്നിന്റെ വലുപ്പം മാറ്റാനായി, നീളം നാം കൊടുത്താൽ ഉയരം നീളത്തിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗമായി പ്രോഗ്രാംതന്നെ കണക്കാക്കി മാറ്റും. ഇവിടെ നീളത്തിന് ആനുപാതികമായാണ് ഉയരം മാറുന്നത്; ആനുപാതികസ്ഥിരം $\frac{3}{4}$.
  മറിച്ച്, ഉയരമാണ് നാം നിർദ്ദേശിക്കുന്നതെങ്കിൽ, അതിന്റെ $\frac{4}{3}$ മടങ്ങാകും നീളം. ഈ സന്ദർഭത്തിൽ, ഉയരത്തിന് ആനുപാതികമായാണ് നീളം മാറുന്നത്; ആനുപാതിക സ്ഥിരം $\frac{4}{3}$.
- രണ്ടാമത് കണ്ട ചിത്രങ്ങളിലെപ്പോലെ ചിത്രങ്ങളുടെ ഉയരവും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 9 : 16 ആണെങ്കിൽ, കൊടുക്കുന്ന നീളത്തിന് ആനുപാതികമായി ഉയരം കണക്കാക്കും; ആനുപാതികസ്ഥിരം $\frac{9}{16}$.
  മറിച്ച്, കൊടുക്കുന്ന ഉയരത്തിന് ആനുപാതികമായി നീളം കണക്കാക്കും; ആനുപാതിക സ്ഥിരം $\frac{16}{9}$.
- പല ആരങ്ങൾ എടുത്ത് വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചാൽ അവയുടെ ചുറ്റളവ്, ആരത്തിന് ആനുപാതികമായാണ് മാറുന്നത്; ആനുപാതികസ്ഥിരം 2π.
  മറിച്ച് പല നീളമുള്ള കമ്പികൾ വളച്ച് വൃത്തങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കിയാൽ, കമ്പിയുടെ നീളമാണ് വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവ്. ഇതിന് ആനുപാതികമായാണ് വൃത്തങ്ങളുടെ ആരം മാറുന്നത്; ആനുപാതികസ്ഥിരം $\frac{1}{2\pi}$.
- 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന ഒരേ വേഗത്തിൽ ഒരു വരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരം (മീറ്ററിൽ) വ്യത്യസ്ത സമയങ്ങളിൽ (സെക്കന്റിൽ) നോക്കിയാൽ, അത് സമയത്തിന് ആനുപാതികമായിരിക്കും; ആനുപാതികസ്ഥിരം 10.
  മറിച്ച്, ഈ വസ്തു വ്യത്യസ്ത ദൂരം (മീറ്ററിൽ) സഞ്ചരിക്കാനെടുക്കുന്ന സമയം (സെക്കന്റിൽ) നോക്കിയാൽ, അത് ദൂരത്തിന് ആനുപാതികമായിരിക്കും; ആനുപാതികസ്ഥിരം $\frac{1}{10}$.

ആനുപാതികമാറ്റം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെ പറയാം:

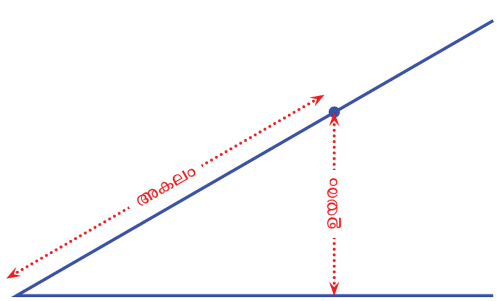
x, y എന്നീ സംഖ്യകൾ കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്ന രണ്ട് അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

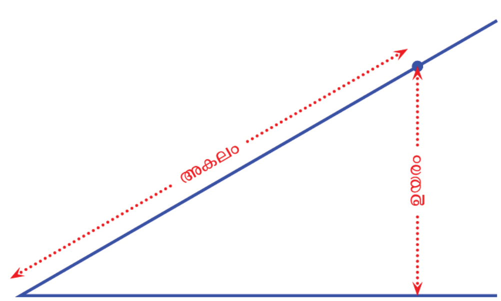
$$y = kx \text{ (} k \text{ ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യ)}$$

എന്ന രൂപത്തിലാണെങ്കിൽ, y സൂചിപ്പിക്കുന്ന അളവ്, x സൂചിപ്പിക്കുന്ന അളവിന് ആനുപാതികമായാണ് മാറുന്നത്. ഇതിൽ k ആണ് ആനുപാതികസ്ഥിരം.

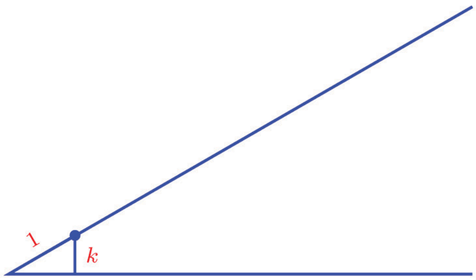
മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം:

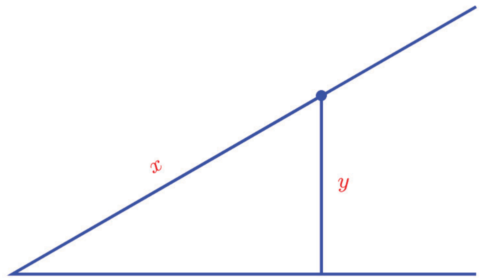
ചിത്രത്തിലെ ചരിഞ്ഞ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളെല്ലാമെടുത്താൽ, കോണിന്റെ മൂലയിൽനിന്നുള്ള അകലം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച്, താഴത്തെ വരയിൽനിന്നുള്ള ഉയരവും മാറും:





ഈ മാറ്റം ആനുപാതികമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കാൻ, മൂലയിൽ നിന്ന് 1 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ബിന്ദുവിന്റെ താഴെനിന്നുള്ള ഉയരം k സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുക്കാം:





രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലെപ്പോലെ, x സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ബിന്ദുവിന്റെ ഉയരം y സെന്റിമീറ്റർ എന്നും എടുക്കാം.

രണ്ടു ചിത്രങ്ങളിലെയും മട്ടത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ കോണുകൾ ആയതിനാൽ, അവയുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരേ തോതിലാണ് മാറുന്നത് (**സദൃശത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠം). അതായത്

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{k}$$

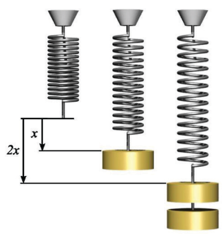
ഇതിൽനിന്ന്

$$y = kx$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഉയരം മാറുന്നത്, അകലത്തിന് ആനുപാതികമായാണ്.

ഭാരവും നീളവും

ഒരു സ്പ്രിംഗിൽ ഭാരം തൂക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ നീളത്തിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റം, ഭാരത്തിന് ആനുപാതികമാണ് :



പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇംഗ്ലണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന റോബർട് ഹുക് എന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞനാണ്, ഇക്കാര്യം കണ്ടുപിടിച്ചത്.

സ്പ്രിംഗ് ത്രാസിൽ ഭാരങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്താൻ ഇത് ഉപയോഗിക്കാം.

1 കിലോഗ്രാം തൂക്കുമ്പോൾ, സ്പ്രിംഗിന് 5 സെന്റിമീറ്ററാണ് നീളം കൂടുന്നതെങ്കിൽ 100 ഗ്രാമിന് $\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്റർ ആണല്ലോ കൂടേണ്ടത്. അപ്പോൾ $\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ട് അടയാളങ്ങളിട്ടാൽ, 100 ഗ്രാമിന്റെ ഗുണിതങ്ങളെല്ലാം അളക്കാം. കുറേക്കൂടി ചെറിയ അകലങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ, 100 ഗ്രാമിനേക്കാൾ ചെറിയ ഭാരങ്ങളും അവയുടെ ഗുണിതങ്ങളും അളക്കാം.

(1) ചുവടെ പറയുന്ന ഓരോ സന്ദർഭത്തിലും ആദ്യത്തെ അളവിന് ആനുപാതികമായാണ് രണ്ടാമത്തെ അളവ് മാറുന്നത് എന്നു തെളിയിക്കുക. ഓരോന്നിലും ആനുപാതികസ്ഥിരം കണക്കാക്കുക:

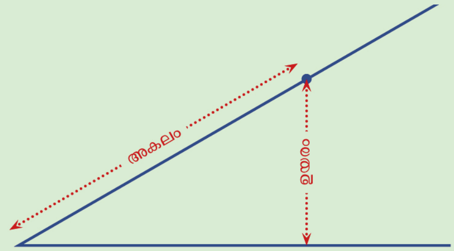
(i) വശങ്ങളുടെ നീളം പലതായി വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ വശത്തിന്റെ നീളവും, ചുറ്റളവും.

(ii) പല നീളങ്ങളുള്ള കമ്പികൾ വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന സമചതുരങ്ങളിൽ കമ്പിയുടെ നീളവും, വശത്തിന്റെ നീളവും.

(iii) ഒരു വരയിലൂടെ ഉരുളുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കറക്കങ്ങളുടെ എണ്ണവും, വരയിലൂടെ സഞ്ചരിച്ച ദൂരവും.

(2) ചിത്രത്തിലെ ചരിഞ്ഞ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളെല്ലാമെടുത്താൽ, കോണിന്റെ മൂലയിൽ നിന്നുള്ള അകലത്തിന് ആനുപാതികമായാണ്, താഴത്തെ വരയിൽ നിന്നുള്ള ഉയരം മാറുന്നത് എന്നു കണ്ടല്ലോ:

30°, 45°, 60° കോണുകളിൽ ആനുപാതികസ്ഥിരം കണക്കാക്കുക.

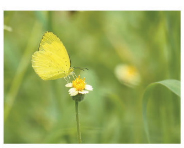


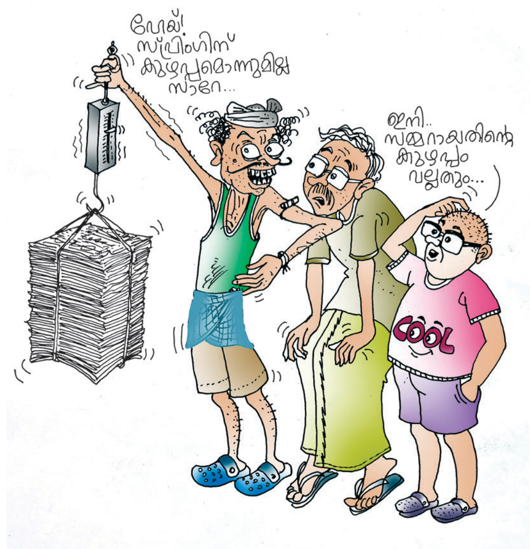
(3) വശങ്ങളുടെ നീളം പലതായി വരയ്ക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണങ്ങളുടെ ചുറ്റളവ് വശത്തിന് ആനുപാതികമാണ് എന്ന് സമർത്ഥിക്കുക. ആനുപാതിക സ്ഥിരം കണക്കാക്കുക. മറ്റു സമബഹുഭുജങ്ങളിലോ?

(4) ഒരു നിശ്ചിത വൃത്തത്തിലെ വ്യത്യസ്ത ചാപങ്ങളുടെ നീളം, അവയുടെ കേന്ദ്രകോണിന് ആനുപാതികമാണ് എന്നു തെളിയിക്കുക. ആനുപാതികസ്ഥിരം എന്താണ് ? വ്യത്യസ്ത വൃത്താംശങ്ങളുടെ പരപ്പളവും കേന്ദ്രകോണും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമോ ?

തോതും അനുപാതവും

ആനുപാതിക മാറ്റത്തിന്റെ ഒരു സ്വഭാവം നോക്കാം. ആദ്യം കണ്ട ഫോട്ടോകളിൽ ഒന്നിന്റെ നീളം കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച് രണ്ടു മടങ്ങാക്കിയാൽ, ഉയരം എങ്ങനെ മാറും ?





രണ്ടു ചിത്രത്തിലും നീളത്തിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാണല്ലോ ഉയരം. അപ്പോൾ

$$\text{പുതിയ ഉയരം} = \text{പുതിയ നീളം} \times \frac{3}{4}$$

പുതിയ നീളവും, പഴയ നീളവും തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം ?

$$\text{പുതിയ നീളം} = \text{പഴയ നീളം} \times 2$$

അപ്പോൾ

$$\text{പുതിയ ഉയരം} = \text{പഴയ നീളം} \times 2 \times \frac{3}{4}$$

$$= \text{പഴയ നീളം} \times \frac{3}{4} \times 2$$

ഇതിൽ പഴയ നീളത്തിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗം എന്നത്, പഴയ ഉയരമാണല്ലോ. അപ്പോൾ

$$\text{പുതിയ ഉയരം} = \text{പഴയ ഉയരം} \times 2$$

അതായത്, നീളം ഇരട്ടിച്ചാൽ, ഉയരവും ഇരട്ടിക്കും.

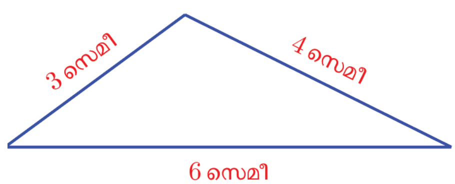
ഇതുപോലെ നീളം മൂന്നു മടങ്ങാക്കിയാൽ, ഉയരവും മൂന്നു മടങ്ങാകുമെന്നും, നീളം പകുതിയാക്കിയാൽ ഉയരവും പകുതിയാകുമെന്നും കാണാമല്ലോ. നീളം എത്ര മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആക്കിയാലും, ഉയരവും അതേ മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആകും. ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ നീളം മാറുന്ന അതേ തോതിലാണ് ഉയരവും മാറുന്നത് (പക്ഷേ ഈ ചതുരങ്ങളിലെല്ലാം നീളത്തിനനുസരിച്ച് ഉയരം മാറുന്നതിന്റെ ആനുപാതികസ്ഥിരം $\frac{3}{4}$ തന്നെയാണ്).

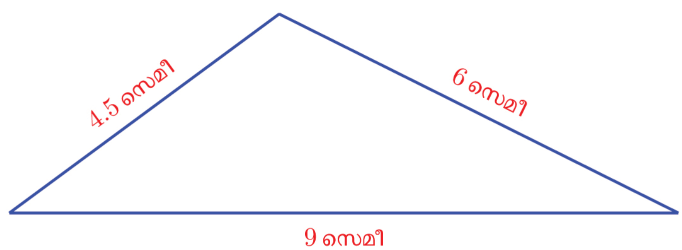
മറ്റ് ഉദാഹരണങ്ങളിലും ഇതു ശരിയാണെന്ന് കാണാൻ വിഷമമില്ലല്ലോ. പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ

രണ്ട് അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ആനുപാതികമാണെങ്കിൽ, ഒരു അളവ് മാറുന്ന അതേ തോതിലാണ് മറ്റേ അളവും മാറുന്നത്.

ചില മാറ്റങ്ങൾ ആനുപാതികമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കാൻ ഇക്കാര്യം ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ഉയരത്തിൽനിന്ന് താഴേക്കിടുന്ന ഒരു വസ്തു, ഒരു സെക്കന്റിൽ 4.9 മീറ്ററും രണ്ടു സെക്കന്റിൽ 19.6 മീറ്ററുമാണ് സഞ്ചരിക്കുന്നത്. അതായത് സമയം രണ്ടു മടങ്ങാകുമ്പോൾ, ദൂരം നാലു മടങ്ങാകുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്. അപ്പോൾ ഈ സഞ്ചാരത്തിൽ, സമയത്തിന് ആനുപാതികമായല്ല ദൂരം മാറുന്നത്.

ഒരേ കോണുകളുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലാണെന്നും, മറിച്ച്, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം ഒരേ തോതിൽ മാറ്റിയാൽ കോണുകൾ മാറില്ലെന്നും **സദൃശത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ. ഉദാഹരണമായി ഈ ത്രികോണങ്ങൾ നോക്കുക.



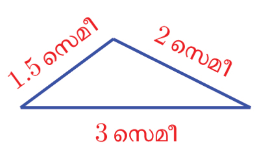


ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങാണ് വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ; അതായത് ചെറിയ ത്രികോണത്തിൽനിന്ന് വലിയ ത്രികോണത്തിലേക്കുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ തോത് $1\frac{1}{2}$. രണ്ടുത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകൾ.

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യവും കാണാം. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലും

- ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ 2 മടങ്ങാണ്, ഏറ്റവും വലിയ വശം.
- ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ $1\frac{1}{3}$ മടങ്ങാണ്, ഇടത്തരം വശം.
- ഇടത്തരം വശത്തിന്റെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങാണ്, ഏറ്റവും വലിയ വശം.

ഈ ത്രികോണങ്ങൾ മറ്റൊരു തോതിൽ മാറ്റി വരച്ചാലും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ഈ ബന്ധം മാറില്ലല്ലോ. ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രം നോക്കുക:



ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം പകുതിയാക്കി വരച്ച ചിത്രം രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം മൂന്നിലൊന്നാക്കിയത് എന്നും പറയാം.

അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിൽനിന്ന് മൂന്നാമത്തെ ത്രികോണത്തിലേക്കുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ തോത് $\frac{1}{2}$ ഉം, രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിൽനിന്ന് മൂന്നാമത്തെ ത്രികോണത്തിലേക്കുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ തോത് $\frac{1}{3}$ ഉം ആണ്.

എന്നാൽ ഈ ത്രികോണത്തിലും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം, നേരത്തെ പറഞ്ഞതുതന്നെ: ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ 2 മടങ്ങാണ് ഏറ്റവും വലിയ വശം, ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ $1\frac{1}{3}$ മടങ്ങാണ് ഇടത്തരം വശം (അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഇടത്തരം വശത്തിന്റെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങാണ് ഏറ്റവും വലിയ വശം).

അതായത്, ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തെ ഒരേ തോതിൽ മാറ്റി വരയ്ക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന തോത് പലതാകാം. എന്നാൽ ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ഓരോ ത്രികോണത്തിലും അതിന്റെ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം മാറുന്നില്ല.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ,

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളെല്ലാം എടുത്താൽ, ഏതു രണ്ടു വശങ്ങളുടെയും നീളം മാറുന്നത് ആനുപാതികമായാണ്.

മഴക്കണക്ക്

ഒരു തുറന്ന സ്ഥലത്ത് മഴപെയ്യുമ്പോൾ, ഓരോ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററിലും വീഴുന്ന വെള്ളത്തിന്റെ അളവ് ഒന്നുതന്നെയായിരിക്കും. അതായത്, കിട്ടുന്ന മഴവെള്ളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം, പരപ്പളവിന് ആനുപാതികമായിരിക്കും.

അപ്പോൾ ഈ സ്ഥലത്ത് അടുത്തടുത്തായി സ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള പല പാത്രങ്ങൾ വച്ച്, ഓരോന്നിലും നിറയുന്ന മഴവെള്ളത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തെ, പാത്രങ്ങളുടെ പാദപ്പരപ്പളവ് കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് ഒരേ സംഖ്യയായിരിക്കും. ഏതു സ്തംഭത്തിലുമുള്ള വെള്ളത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തെ പാദപ്പരപ്പുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത്, ജലനിരപ്പിന്റെ ഉയരമാണല്ലോ. അപ്പോൾ പാത്രങ്ങളുടെ വലുപ്പം മാറിയാലും അതിലെ മഴവെള്ളത്തിന്റെ ഉയരം ഒന്നുതന്നെ ആയിരിക്കും. ഇതിനെയാണ് മഴയുടെ അളവായി പറയുന്നത്. ഇതനുസരിച്ച് ഒരു സ്ഥലത്ത് 1 മില്ലിമീറ്റർ മഴ പെയ്തെങ്കിൽ, ഒരു ചതുരശ്രമീറ്റർ പാദപ്പരപ്പുള്ള ഒരു ടാങ്കിൽ, 1 മില്ലിമീറ്റർ ഉയരത്തിൽ മഴ വെള്ളം നിറയും. ഈ വെള്ളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ഘനസെന്റിമീറ്ററിൽ കണക്കാക്കിയാൽ

$$100 \times 100 \times 0.1 = 1000$$

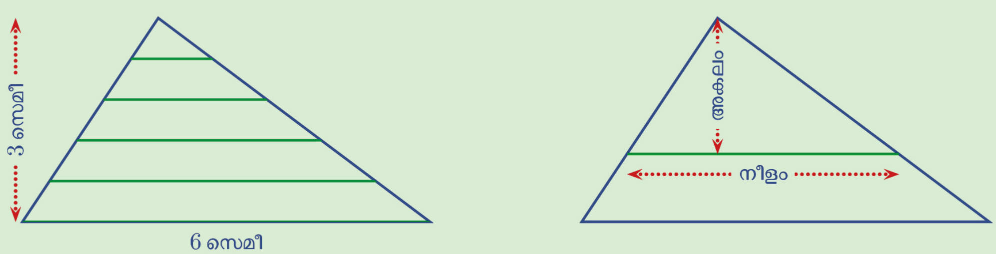
അതായത് ഒരു ലിറ്റർ.

അപ്പോൾ ഒരു സ്ഥലത്ത് 1 മില്ലിമീറ്റർ മഴ എന്നതിന്റെ അർഥം, ഓരോ ചതുരശ്രമീറ്ററിലും 1 ലിറ്റർ വെള്ളം എന്നാണ്.

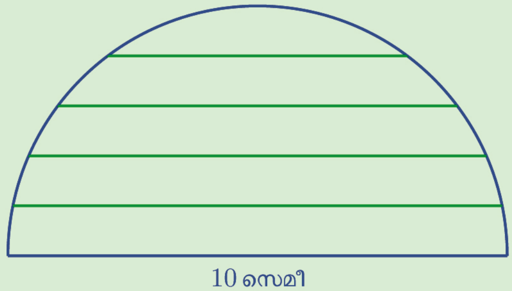
(1) (i) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക എത്രയാണ്? ഒരു ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെയോ?

(ii) ബഹുഭുജങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം മാറുന്നതിന് ആനുപാതികമായാണോ, കോണുകളുടെ തുക മാറുന്നത്? കാരണം വിശദീകരിക്കുക.

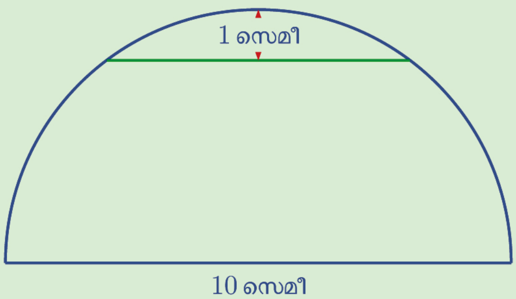
(2) പാദം 6 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 3 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ പാദത്തിനു സമാന്തരമായി വരകൾ വരയ്ക്കുന്നു. ഈ വരകളുടെ നീളം മുകളിലെ മൂലയിൽനിന്നുള്ള അകലങ്ങൾക്ക് ആനുപാതികമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. ആനുപാതികസ്ഥിരം എന്താണ്?

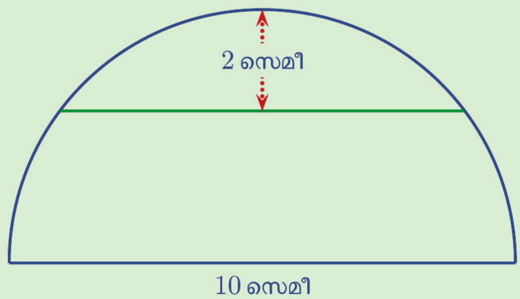


(3) വ്യാസം 10 സെന്റിമീറ്റർ ആയ അർധവൃത്തത്തിനുള്ളിൽ വ്യാസത്തിനു സമാന്തരമായി വരകൾ വരയ്ക്കുന്നു



(i) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ചിത്രത്തിലും, വ്യാസത്തിനു സമാന്തരമായ വരയുടെ നീളം കണക്കാക്കുക:





(ii) വരകളുടെ നീളം അർധവൃത്തത്തിന്റെ ഏറ്റവും മുകളിൽ നിന്നുള്ള അകലങ്ങൾക്ക് ആനുപാതികമാണോ ? കാരണം വിശദീകരിക്കുക.

പലതരം അനുപാതം

ഒരു ബഹുഭുജത്തിലെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം മാറുമ്പോൾ, അതിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുക മാറുന്നത് ആനുപാതികമായാണോ ?

ത്രികോണത്തിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുക 180°; ഷഡ്ഭുജത്തിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുക 720°. വശങ്ങളുടെ എണ്ണം രണ്ടു മടങ്ങായപ്പോൾ, കോണുകളുടെ തുക രണ്ടു മടങ്ങിനേക്കാൾ കൂടുതലായി. അപ്പോൾ ഈ ബന്ധം ആനുപാതികമല്ല.

വശങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിൽ നിന്ന് 2 കുറച്ച സംഖ്യകൊണ്ട് 180° നെ ഗുണിച്ചതാണ്, അകക്കോണുകളുടെ തുകയെന്നറിയാം (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **ബഹുഭുജങ്ങൾ** എന്ന പാഠം). അതായത്, വശങ്ങളുടെ എണ്ണം n എന്നും, കോണുകളുടെ തുക $s°$ എന്നുമെടുത്താൽ

$$s = 180(n - 2)$$

ഇതിലെ $n - 2$ എന്ന സംഖ്യയെ m എന്നെഴുതിയാലോ ?

സമവാക്യം ഇങ്ങനെയാകും

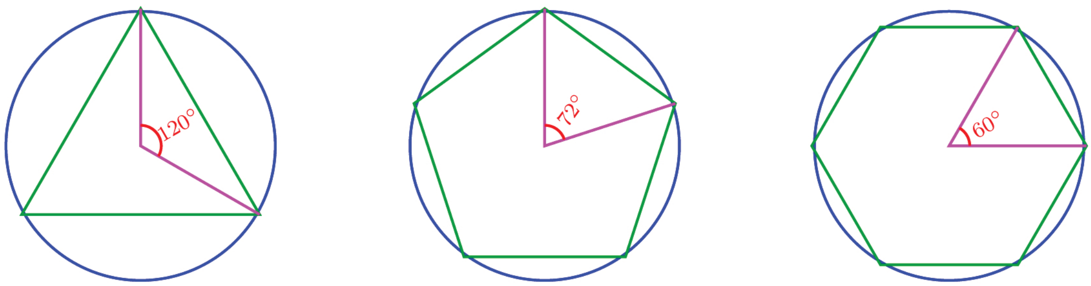
$$s = 180m$$

അപ്പോൾ s എന്ന അളവ്, m എന്ന അളവിന് ആനുപാതികമാണ്. സാധാരണഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ, ബഹുഭുജങ്ങളിലെല്ലാം, അകക്കോണുകളുടെ തുക, വശങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിൽ നിന്ന് രണ്ടു കുറച്ചതിന് ആനുപാതികമാണ്.

ഇങ്ങനെ ഒരളവിനോട് മറ്റൊരളവ് ആനുപാതികമല്ലെങ്കിലും, ആദ്യത്തെ അളവിനെ അൽപമൊന്നു മാറ്റിയതിനോട് ആനുപാതികമാകുന്ന പല സന്ദർഭങ്ങളുമുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിന്റെ നിശ്ചിത (π കൊണ്ടുള്ള) ഗുണിതമായതിനാൽ പരപ്പളവ്, ആരത്തിന് ആനുപാതികമല്ല; എന്നാൽ, ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിന് ആനുപാതികമാണ്. ഇതുപോലെ ഉയരത്തിൽനിന്ന് ഭൂമിയിലേക്കു വീഴുന്ന വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം, സമയത്തിന് ആനുപാതികമല്ലെങ്കിലും, സമയത്തിന്റെ വർഗത്തിന് ആനുപാതികമാണ്.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം.

ഏതു സമബഹുഭുജത്തിലെയും എല്ലാ മൂലകളിലൂടെയും കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമല്ലോ. അടുത്തടുത്ത മൂലകൾ ഈ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ കണക്കെന്താണ്?



n വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജത്തിൽ ഈ കേന്ദ്രകോൺ d° എന്നെടുത്താൽ, ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$d = \frac{360}{n}$$

അതായത്, ഇവിടെ n ന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന് ആനുപാതികമായാണ് d മാറുന്നത്.

ഇത്തരം മാറ്റങ്ങൾക്ക് പൊതുവായ ഒരു പേരുണ്ട്.

പരസ്പരം ബന്ധപ്പെട്ട രണ്ട് അളവുകൾ മാറുമ്പോൾ, എപ്പോഴും ഒരു അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയുടെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെ നിശ്ചിത മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആണ് മറ്റേ അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയെങ്കിൽ, ഈ മാറ്റം **വിപരീതാനുപാതത്തിലാണ്** (inversely proportional) എന്നു പറയുന്നു.

ഇത് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

x, y എന്നീ സംഖ്യകൾ കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്ന രണ്ട് അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

$$y = \frac{k}{x} \quad (k \text{ ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ})$$

എന്ന രൂപത്തിലാണെങ്കിൽ, ഈ അളവുകളുടെ മാറ്റം വിപരീതാനുപാതത്തിലാണ്, ആനുപാതികസ്ഥിരം k.

ഇത്തരം മാറ്റവുമായി വേർതിരിച്ചു പറയുന്നതിനുള്ള സൗകര്യത്തിനുവേണ്ടി, $y = kx$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള മാറ്റത്തെ **നേരനുപാതം (direct proportion)** എന്നും പറയാറുണ്ട്.

വിപരീതാനുപാതത്തിലുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം.

ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് 100 മീറ്റർ അകലെയുള്ള മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേക്ക് നേർവരയിലൂടെ ഒരേ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു സങ്കൽപിക്കുക.

സഞ്ചരിക്കുന്ന വേഗം 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് ആണെങ്കിൽ, രണ്ടാമത്തെ ബിന്ദുവിലെത്താൻ 10 സെക്കന്റ് വേണം; വേഗം കൂട്ടി 25 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് ആക്കിയാൽ, 4 സെക്കന്റ് മതി. പൊതുവെ, വേഗം x മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നും, ലക്ഷ്യസ്ഥാനത്തെത്താൻ എടുക്കുന്ന സമയം y സെക്കന്റ് എന്നും എഴുതിയാൽ, ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇങ്ങനെയാകും:

$$y = \frac{100}{x}$$

അതായത്, x നു വിപരീതാനുപാതത്തിലാണ് y മാറുന്നത്.

(1) (i) സമഭുജത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവ്, വശത്തിന്റെ വർഗത്തിന് ആനുപാതികമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. ആനുപാതികസ്ഥിരം എന്താണ്?

(ii) സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവ്, വശത്തിന്റെ വർഗത്തിന് ആനുപാതികമാണോ? ആണെങ്കിൽ, ആനുപാതികസ്ഥിരം എന്താണ്?

(2) പരപ്പളവ് ഒരു ചതുരശ്രമീറ്ററായ ചതുരങ്ങളിൽ, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളവും മാറണം. ഈ ബന്ധം ബീജഗണിതസമവാക്യമായി എഴുതുക. അനുപാതത്തിന്റെ ഭാഷയിൽ ഈ ബന്ധം എങ്ങനെ പറയാം?

(3) ഒരേ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണങ്ങളിൽ, ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിന്റെ നീളവും, എതിർ മൂലയിൽ നിന്ന് ആ വശത്തിലേക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം അനുപാതമായി എങ്ങനെ പറയാം? ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിനു പകരം, ഏറ്റവും ചെറിയ വശമെടുത്താലോ?

(4) സമബഹുഭുജങ്ങളിൽ, വശങ്ങളുടെ എണ്ണവും, ഒരു പുറംകോണിന്റെ അളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ സമവാക്യമെന്താണ്? ഈ ബന്ധം അനുപാതമായി പറയാൻ കഴിയുമോ? ആനുപാതികസ്ഥിരം എന്താണ്?

വ്യാപ്തവും ഭാരവും

ഒരേ പദാർത്ഥം കൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കിയ പല വസ്തുക്കളിൽ, വ്യാപ്തം കൂടുന്നതനുസരിച്ച് ഭാരവും കൂടുമല്ലോ. ഈ മാറ്റം ആനുപാതികമാണ്.

ഉദാഹരണമായി ഇരുമ്പു കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഏതു വസ്തുവിലും വ്യാപ്തം ഘനസെന്റിമീറ്ററായും, ഭാരം ഗ്രാം ആയും അളന്നെടുത്താൽ, വ്യാപ്തത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയുടെ 7.87 മടങ്ങായിരിക്കും ഭാരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യ. അതായത്, ഈ മാറ്റത്തിലെ ആനുപാതികസ്ഥിരം 7.87 ആണ്. ചെമ്പു കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ വസ്തുക്കളിലാണെങ്കിൽ, ഈ ആനുപാതികസ്ഥിരം 8.96 ആണ്.

ഇരുമ്പിന്റെ സാന്ദ്രത (density), ഘനസെന്റിമീറ്ററിന് 7.87 ഗ്രാം; ചെമ്പിന്റെ സാന്ദ്രത, ഘനസെന്റിമീറ്ററിന് 8.96 ഗ്രാം എന്നൊക്കെയാണ് ഇക്കാര്യം പറയുന്നത്.

15

സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക്

ശരാശരി

ഒരു ഏകദിന ക്രിക്കറ്റ് മത്സരത്തിൽ ആദ്യത്തെ 10 ഓവറിലെ റൺ കണക്ക് ഇങ്ങനെയാണ്:

ഓവർ \ പന്ത്	1	2	3	4	5	6
1	2	1	0	2	0	0
2	1	4	0	1	0	0
3	0	0	4	0	0	1
4	4	0	2	0	1	0
5	0	0	4	1	0	3
6	2	0	2	2	0	0
7	1	0	4	0	2	1
8	2	0	2	0	3	0
9	0	0	6	2	2	0
10	2	0	0	4	0	2

ഇതിൽ ഓരോ പന്തിലും കിട്ടിയ റണ്ണിന്റെ കണക്കുകളെല്ലാം ഉണ്ട്. പക്ഷേ ഇതിൽനിന്ന് ആദ്യത്തെ പത്ത് ഓവറിൽ സംഭവിച്ചതിന്റെ മൊത്തമായ ഒരു ചിത്രം കിട്ടുന്നില്ലല്ലോ.

അതിന് പട്ടിക അൽപം ചുരുക്കി, ഓരോ ഓവറിലും ആകെ കിട്ടിയ റൺ മാത്രം എഴുതുകയാവും നല്ലത്.

ഓവർ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
റൺ	5	6	5	7	8	6	8	7	10	8

ആദ്യത്തെ പട്ടികയിലെ എല്ലാ വിവരങ്ങളും ഈ പട്ടികയിൽ ഇല്ലെങ്കിലും, ഇതിൽനിന്ന് ഒറ്റ നോട്ടത്തിൽത്തന്നെ ചില കാര്യങ്ങൾ കാണാമല്ലോ:

- ഓരോ ഓവറിലും 5 അല്ലെങ്കിൽ അതിൽക്കൂടുതൽ റൺ കിട്ടിയിട്ടുണ്ട്.
- 8 ഓവറുകളിൽ 5ൽ കൂടുതൽ റൺ കിട്ടിയിട്ടുണ്ട്.

ഇനി ആകെ റൺ കൂട്ടിയെടുത്ത് പട്ടികയൊന്നും ഇല്ലാതെ, ഇങ്ങനെ പറയാം:

ആദ്യത്തെ 10 ഓവറിൽ 70 റൺ നേടി.

ഇപ്പോൾ ആകെ രണ്ടു സംഖ്യകൾ മാത്രമേ പറഞ്ഞിട്ടുള്ളൂ. പക്ഷേ ഇതിൽ നിന്നുതന്നെ പൊതുവായി ചില കാര്യങ്ങൾ പറയാമല്ലോ.

- തരക്കേടില്ലാത്ത റൺ നിരക്കാണ്.
- ഇങ്ങനെ ഓരോ 10 ഓവറിലും ഏതാണ്ട് 70 റൺ വീതം നേടുന്നത് തുടർന്നാൽ, 50 ഓവറിൽ ഏകദേശം 350 റൺ പ്രതീക്ഷിക്കാം.

ഇവിടെ നേടിയ 70 നെ 10 കൊണ്ടു ഹരിച്ച്, ഒരു സംഖ്യ മാത്രമായി ഇങ്ങനെ പറയാം:

റൺ നിരക്ക് ഒരു ഓവറിൽ 7 റൺ.

ഇനി ആദ്യത്തെ പട്ടികയിലെ വിവരങ്ങളൊന്നും അറിയാതെ, ഈ നിരക്കു മാത്രമേ അറിയാൻ കഴിഞ്ഞുള്ളൂ എങ്കിലോ ?

ഓരോ ഓവറിലും കൃത്യം 7 റൺ വീതം നേടി എന്നു പറയാൻ കഴിയില്ല; പകരം ഇങ്ങനെയെല്ലാം പറയാം:

- എല്ലാ ഓവറിലും ഒരേ റൺ വീതമാണ് കിട്ടിയതെങ്കിൽ, അത് 7 റൺ ആണ്.
- എല്ലാ ഓവറിലും 7ൽ കുറവു വീതം ആവില്ല.
  - * അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ, ആകെ 70 ൽ കുറവല്ലേ കിട്ടുള്ളൂ ?
- എല്ലാ ഓവറിലും 7ൽ കൂടുതൽ വീതവും ആവില്ല.
  - * അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ, ആകെ 70 ൽ കൂടുതൽ ആകണമല്ലോ.

മറ്റൊരു കണക്ക് നോക്കാം: ഒരു ക്ലാസ്സിൽ 40 കുട്ടികളുണ്ട്. ഒരു ചികിത്സാ സഹായനിധിയിലേക്ക് ഈ ക്ലാസിലെ കുട്ടികളെല്ലാം സംഭാവന കൊടുത്തു. ഓരോരുത്തരും കൊടുത്ത തുകകളെല്ലാം എഴുതിയതു നോക്കിയാൽ, 40 സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാകും. ഇതിൽനിന്ന് ആകെ എത്ര രൂപ കിട്ടിയെന്നോ, ഓരോരുത്തരും ഏകദേശം എത്ര കൊടുത്തെന്നോ എളുപ്പത്തിൽ പറയാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. പകരം ഇങ്ങനെ പറഞ്ഞാലോ ?

40 കുട്ടികളിൽനിന്ന് ആകെ 2000 രൂപ സംഭാവനയായി കിട്ടി.

എല്ലാ കുട്ടികളും കൊടുത്തത് ഒരേ തുക ആകണമെന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് ഓരോ കുട്ടിയും $2000 \div 40 = 50$ കൊടുത്തു എന്നു പറയാൻ കഴിയില്ല.

എങ്കിലും ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ ചില കാര്യങ്ങൾ പറയാം:

- എല്ലാ കുട്ടികളും ഒരേ തുകയാണ് കൊടുത്തതെങ്കിൽ, ഓരോരുത്തരും 50 രൂപ കൊടുത്തു.
- ഒരു കുട്ടിയെങ്കിലും 50 രൂപയോ അതിൽ കൂടുതലോ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട് (എല്ലാവരും 50 രൂപയേക്കാൾ കുറവാണ് കൊടുത്തതെങ്കിൽ, ആകെ 2000 രൂപയിൽ കുറവാകണമല്ലോ).
- ഒരു കുട്ടിയെങ്കിലും 50 രൂപയോ അതിൽ കുറവോ ആണ് കൊടുത്തത് (എല്ലാവരും 50 രൂപയേക്കാൾ കൂടുതലാണ് കൊടുത്തതെങ്കിൽ, ആകെ 2000 രൂപയിൽ കൂടുതലാകുമല്ലോ).
- എല്ലാവരും ഒരേ തുകയല്ല കൊടുത്തതെങ്കിൽ, ചിലർ 50 രൂപയേക്കാൾ കുറവും, ചിലർ 50 രൂപയേക്കാൾ കൂടുതലും കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

രണ്ടു കണക്കിലും സംഖ്യാപരമായ കുറേ വിവരങ്ങളിൽനിന്ന് മൊത്തത്തിലുള്ള ഏകദേശ രൂപം കിട്ടാനായി, അവയെ ഒരു സംഖ്യയായി ചുരുക്കുകയാണല്ലോ ചെയ്തത്.

രണ്ടിലും ചെയ്തത് ഒരേ ഗണിത ക്രിയയല്ലേ ?

- ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ ആകെ റൺ 70 നെ, ഓവറുകളുടെ എണ്ണം 10 കൊണ്ടു ഹരിച്ച്, 7 എന്ന സംഖ്യ കണക്കാക്കി.
- രണ്ടാമത്തെ കണക്കിൽ ആകെ കിട്ടിയ തുക 2000. ഇതിനെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം 40 കൊണ്ടു ഹരിച്ച്, 50 എന്ന സംഖ്യ കണക്കാക്കി.

ഇങ്ങനെ തുകയെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യയെ സാധാരണ ഭാഷയിൽ **ശരാശരി (average)** എന്നും, കണക്കിന്റെ ഭാഷയിൽ **മാധ്യം (arithmetic mean)** എന്നുമാണ് പറയുന്നത്.

അപ്പോൾ മുകളിലെ രണ്ടു കണക്കുകളിൽ കണ്ടത് ഇങ്ങനെ പറയാം;

- ആദ്യത്തെ 10 ഓവറിൽ കിട്ടിയ റണ്ണിന്റെ മാധ്യം 7 (ആദ്യത്തെ 10 ഓവറിൽ ഓരോന്നിലും ശരാശരി 7 റൺ വീതം കിട്ടി).
- 40 കുട്ടികളുടെ സംഭാവനയുടെ മാധ്യം 50 രൂപ (40 കുട്ടികൾ ശരാശരി 50 രൂപ വീതം സംഭാവന കൊടുത്തു).

തുല്യമല്ലാത്ത കുറേ സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം, അവയിൽ ചില സംഖ്യകളേക്കാൾ കൂടുതലും, ചില സംഖ്യകളെക്കാൾ കുറവും ആയിരിക്കും എന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇക്കാര്യം അൽപം കൂടി വിശദമായി പരിശോധിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി ക്രിക്കറ്റ് കണക്കിൽ മാധ്യം 7 റൺ ആണല്ലോ. ഇതു കണക്കാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച പട്ടിക ഒന്നുകൂടി നോക്കാം:

ഓവർ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
റൺ	5	6	5	7	8	6	8	7	10	8

ഓരോ ഓവറിലും കിട്ടിയ റൺ മാധ്യത്തേക്കാൾ എത്ര കൂടുതൽ, അല്ലെങ്കിൽ കുറവ്, എന്നുംകൂടി കണക്കാക്കി നോക്കാം:

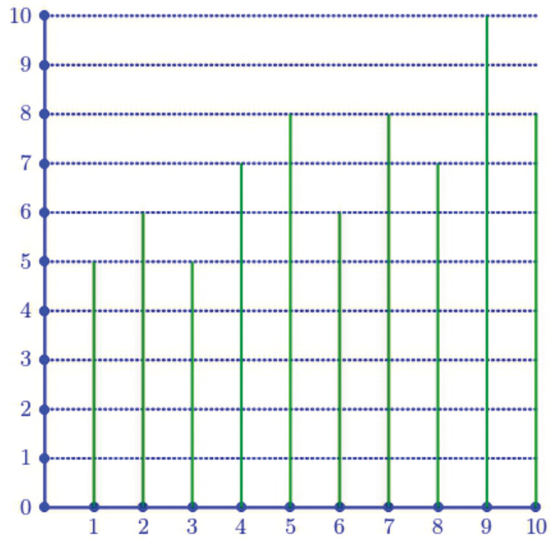
ഓവർ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
റൺ	5	6	5	7	8	6	8	7	10	8
മാധ്യത്തേക്കാൾ കൂടുതൽ					1		1		3	1
മാധ്യത്തേക്കാൾ കുറവ്	2	1	2			1				

കൂടുതലും, കുറവും വെവ്വേറെ കൂട്ടിനോക്കൂ.

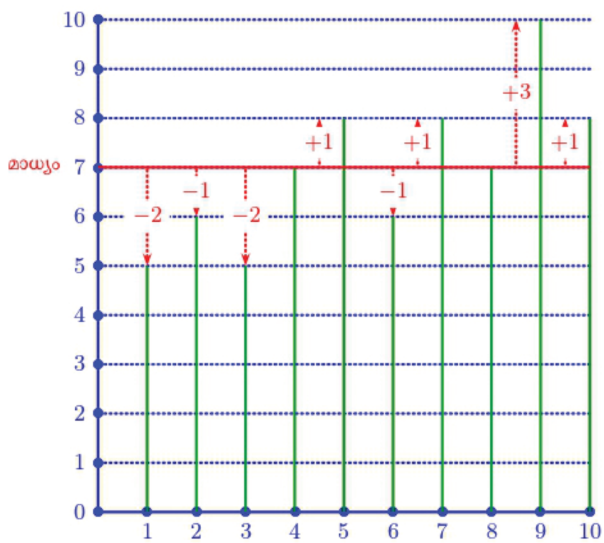
കൂടുതൽ $= 1 + 1 + 3 + 1 = 6$

കുറവ് $= 2 + 1 + 2 + 1 = 6$

ഓരോ ഓവറിലും കിട്ടിയ റൺ അഞ്ചാംക്ലാസിലും ആറാംക്ലാസിലും കണ്ടതുപോലെ ചിത്രരൂപത്തിലും കാണിക്കാം:



ഇതിൽ മാധ്യമായ 7 ൽകൂടി വിലങ്ങനെ ഒരു വര വരച്ച്, മാധ്യവുമായുള്ള കൂടുതലും കുറവും അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കാം:



ഏതെങ്കിലും കുറേ സംഖ്യകൾ എടുത്തു മാധ്യം കണക്കാക്കുക; ഓരോ സംഖ്യയും മാധ്യത്തേക്കാൾ എത്ര കൂടുതൽ, അല്ലെങ്കിൽ എത്ര കുറവ് എന്നു കണക്കാക്കി, കൂടുതലും കുറവും വെവ്വേറെ കൂട്ടി നോക്കുക. ഒരേ തുകയാണോ ?

ഇത് എന്തുകൊണ്ട് എന്നു വിശദീകരിക്കാമോ ?

പട്ടികകൾ

സംഖ്യാപരമായ വിവരങ്ങളെ പട്ടികയാക്കുമ്പോൾ, ആവർത്തിച്ചുവരുന്ന സംഖ്യകളെ ഒരു കൂട്ടമായി ചേർത്തുവയ്ക്കുകയാണല്ലോ പതിവ്. ഉദാഹരണമായി ഒരു ജോലിസ്ഥലത്ത്, ഒരേ വേതനം കിട്ടുന്നവരുടെ എണ്ണം ഒന്നിച്ചാണ് കാണിക്കുന്നത്.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

ഒരു ഓഫീസിൽ പലതരം ജോലി ചെയ്യുന്നവരുടെ എണ്ണവും ഒരു ദിവസത്തെ വേതനവും ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

പ്രതിദിനവേതനം (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
675	8
730	4
755	4
780	3
840	1

ഇവരുടെ ദിവസവരുമാനത്തിന്റെ മാധ്യം എത്ര രൂപയാണ് ?

ആദ്യം ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണവും അവർക്കെല്ലാം കൂടി ഒരു ദിവസം ആകെ കിട്ടുന്ന വേതനവും കണക്കാക്കണം.

ഒരേ വേതനം കിട്ടുന്നവരുടെ ആകെ വേതനം, ഗുണിച്ചു കണക്കാക്കാമല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, 675 രൂപ കിട്ടുന്ന 8 പേരുടെ ആകെ വേതനം

$$675 \times 8 = 5400 \text{ രൂപ}$$

ഇങ്ങനെ ഒരേ വേതനം കിട്ടുന്നവരെ ഒന്നിച്ചെടുത്ത് ആകെ വേതനം വെവ്വേറെ കണക്കാക്കാം:

പ്രതിദിനവേതനം (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	ആകെ വേതനം (രൂപ)
675	8	5400
730	4	2920
755	4	3020
780	3	2340
840	1	840
ആകെ	20	14520

ഇനി മാധ്യം കണക്കാക്കാമല്ലോ;

$$\text{മാധ്യവേതനം} = 14520 \div 20 = 726 \text{ രൂപ}$$

ഈ കണക്കിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വേതനം 675 രൂപയും, ഏറ്റവും കൂടിയ വേതനം 840 രൂപയും ആണല്ലോ. മാധ്യവേതനമായ 726 രൂപ, 675 രൂപയേക്കാൾ കൂടുതലും, 840 രൂപയേക്കാൾ കുറവു മാണ് ഇതെപ്പോഴും ശരിയാണോ ?

ഈ ഉദാഹരണം നോക്കുക:

- 8 സംഖ്യകളിൽ ഏറ്റവും ചെറുത് 100 ഉം, ഏറ്റവും വലുത് 200 ഉം ആണെന്നു കരുതുക
- അവയുടെ തുക $100 \times 8 = 800$ നേക്കാൾ കൂടുതലും, $200 \times 8 = 1600$ നേക്കാൾ കുറവും ആണ്.
- തുകയെ 8 കൊണ്ട് ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന മാധ്യം $800 \div 8 = 100$ നേക്കാൾ കൂടുതലും, $1600 \div 8 = 200$ നേക്കാൾ കുറവും ആണ്.

100, 200, 8 എന്നതിനു പകരം മറ്റു സംഖ്യകളെടുത്താലും ഇതേ രീതിയിൽ ചിന്തിക്കാം.

പൊതുവെപറഞ്ഞാൽ

ഏതു സംഖ്യകളുടെയും മാധ്യം, അവയിൽ ഏറ്റവും ചെറുതിനും ഏറ്റവും വലുതിനും ഇടയിലാണ്.

(1) ട്വന്റി-ട്വന്റി ക്രിക്കറ്റിൽ ഒരു ടീം ആദ്യത്തെ 5 ഓവറിൽ 51 റൺ നേടി.

(i) അപ്പോഴത്തെ റൺ നിരക്ക് എത്രയാണ് ?

(ii) ഇതേ റൺ നിരക്ക് തുടരുകയാണെങ്കിൽ 20 ഓവറിൽ എത്ര റൺ പ്രതീക്ഷിക്കാം ?

(2) ക്ലാസിൽ ഒരു കണക്കു പരീക്ഷ നടത്തി, മാർക്കിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ കുട്ടികളെ തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്:

മാർക്ക്	കുട്ടികൾ
2	1
3	2
4	5
5	4
6	6
7	11
8	10
9	4
10	2

(i) കുട്ടികൾക്ക് കിട്ടിയ മാർക്കുകളുടെ മാധ്യം കണക്കാക്കുക.

(ii) മാധ്യത്തെക്കാൾ കുറവ് മാർക്ക് കിട്ടിയവർ എത്ര പേരാണ്?

(iii) മാധ്യത്തെക്കാൾ കൂടുതൽ മാർക്ക് കിട്ടിയവർ എത്ര പേരാണ്?

(3) ഒരു കർഷകന് ഒരു മാസം കിട്ടിയ റബ്ബർഷീറ്റിന്റെ വിവരങ്ങൾ ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിലുണ്ട്:

റബ്ബർ (കിഗ്രാം)	ദിവസങ്ങൾ
9	3
10	4
11	3
12	3
13	5
14	6
16	6

(i) ഈ മാസത്തിൽ കിട്ടിയ റബ്ബർഷീറ്റിന്റെ മാധ്യ ഭാരം എത്രയാണ്?

(ii) റബ്ബറിന്റെ വില കിലോഗ്രാമിന് 175 രൂപയാണ്. ഈ മാസത്തിൽ റബ്ബറിൽ നിന്നു കിട്ടിയ മാധ്യ വരുമാനം എത്ര രൂപയാണ്?

(4) ഒരു പ്രദേശത്തു പെയ്ത മഴയുടെ അളവനുസരിച്ച് ഒരു മാസത്തിലെ ദിവസങ്ങളെ തരം തിരിച്ച പട്ടികയാണിത്.

മഴ (മിമീ)	ദിവസങ്ങൾ
54	3
56	5
58	6
55	3
50	2
47	4
44	5
41	2

ആ മാസം അവിടെ ഒരു ദിവസം പെയ്ത മഴയുടെ മാധ്യ അളവെന്താണ്?

വിഭാഗപ്പട്ടികകൾ

വിവരങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുമ്പോഴും മറ്റും, വിഭാഗങ്ങളായി തിരിച്ച് പട്ടികയാക്കുന്ന രീതി എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. അത്തരത്തിലൊരു കണക്കുനോക്കാം

മാർക്ക്	എണ്ണം
0 - 10	4
10 - 20	6
20 - 30	16
30 - 40	8
40 - 50	6

50 മാർക്കിന്റെ ഒരു പരീക്ഷ എഴുതിയ 40 ആളുകളെ, അവർക്കു കിട്ടിയ മാർക്കിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണിത്. ഇവരുടെ മാർക്കുകളുടെ മാധ്യം എത്രയാണ്?

മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, മാർക്കുകളുടെ തുകയെ പരീക്ഷ എഴുതിയവരുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഹരിക്കണം.

മാർക്കുകളുടെ തുക എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

പട്ടികയിലെ ആദ്യത്തെ വരിയിൽനിന്ന് 4 പേർക്ക് കിട്ടിയത് 0 മാർക്കിനും 10 മാർക്കിനും ഇടയ്ക്കാണ് എന്നു മാത്രമല്ലേ അറിയാൻ കഴിയൂ? ഇവർ ഓരോരുത്തർക്കും കിട്ടിയ മാർക്ക് കൃത്യം എത്രയാണ് എന്നറിയാതെ ഇവരുടെ ആകെ മാർക്ക് കണക്കാക്കാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. പട്ടികയിലെ മറ്റു വരികളിലും ഇതേ പ്രശ്നമുണ്ട്.

ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ അറിയാത്ത വിവരങ്ങളെക്കുറിച്ച് ചില സങ്കൽപങ്ങൾ വേണ്ടിവരും.

പട്ടികയിലെ ആദ്യവരിയിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള 4 പേരുടെ മാർക്ക് വെവ്വേറെ അറിയില്ലെങ്കിലും, അവ 0 മാർക്കിനും 10 മാർക്കിനും ഇടയിൽ ആണെന്നറിയാം; അപ്പോൾ ഈ 4 പേരുടെ മാർക്കുകളുടെ മാധ്യവും 0 മാർക്കിനും 10 മാർക്കിനും ഇടയിലാണ് (സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം, അവയിലെ ഏറ്റവും ചെറുതിനും ഏറ്റവും വലുതിനും ഇടയ്ക്കാണെന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ).

മാത്രവുമല്ല, സാധാരണഗതിയിൽ ഈ മാധ്യം 0 മാർക്കിന്റെയും 10 മാർക്കിന്റെയും ഏതാണ്ട് നടുക്കായിരിക്കുകയും ചെയ്യും.

അതിനാൽ ഓരോ വിഭാഗത്തിലുമുള്ളവരുടെ മാർക്കിന്റെ മാധ്യം, ആ വിഭാഗത്തിന്റെ കൃത്യം നടുക്കു വരുന്ന സംഖ്യ (വിഭാഗമാധ്യം) എന്ന സങ്കൽപമനുസരിച്ചാണ് ഇത്തരം പട്ടികകളിൽനിന്ന് ആകെ തുക കണക്കാക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി പട്ടികയിലെ ആദ്യത്തെ വരിയിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന 4 പേരുടെ മാർക്കിന്റെ മാധ്യം, 0 മാർക്കിന്റെയും 10 മാർക്കിന്റെയും കൃത്യം നടുക്കു വരുന്ന 5 മാർക്ക് എന്നു കരുതിയാൽ, അവരുടെ ആകെ മാർക്ക് $5 \times 4 = 20$ എന്നു കണക്കാക്കാം.

ഇതുപോലെ ഓരോ വിഭാഗത്തിലും ഉള്ളവരുടെ മാർക്ക് കണക്കാക്കി, പട്ടിക ഇങ്ങനെ വലുതാക്കാം:

മാർക്ക്	എണ്ണം	വിഭാഗ മാധ്യം	ആകെ മാർക്ക്
0 - 10	4	5	20
10 - 20	6	15	90
20 - 30	16	25	400
30 - 40	8	35	280
40 - 50	6	45	270
ആകെ	40		1060

ഇനി മാധ്യം കണക്കാക്കാമല്ലോ.

$$1060 \div 40 = 26.5$$

(1) ഒരു ക്ലാസിലെ കുട്ടികളെ ഉയരത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെ കാണുന്നത്:

ഉയരം (സെമീ)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
148 - 152	8
152 - 156	10
156 - 160	15
160 - 164	10
164 - 168	7

ഈ ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ മാധ്യ ഉയരം എത്രയാണ് ?

(2) ഒരു സർവകലാശാലയിലെ അധ്യാപകരുടെ എണ്ണം പ്രായമനുസരിച്ച് തരംതിരിച്ചെഴുതിയ പട്ടികയാണ് ചുവടെയുള്ളത്.

പ്രായം	അധ്യാപകരുടെ എണ്ണം
25 - 30	6
30 - 35	14
35 - 40	18
40 - 45	20
45 - 50	5
50 - 55	4
55 - 60	3

അധ്യാപകരുടെ മാധ്യ പ്രായം കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു ക്ലാസിലെ കുട്ടികളെ ഭാരമനുസരിച്ചു തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണിത്.

ഭാരം (കിഗ്രാം)	21 - 23	23 - 25	25 - 27	27 - 29	29 - 31	31 - 33
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	4	7	8	6	3	1

മാധ്യഭാരം കണക്കാക്കുക.

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ഭാഗം IV ക

മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ

51 ക. മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ - താഴെപ്പറയുന്നവ ഭാരതത്തിലെ ഓരോ പൗരന്റെയും കർത്തവ്യം ആയിരിക്കുന്നതാണ് :

(ക) ഭരണഘടനയെ അനുസരിക്കുകയും അതിന്റെ ആദർശങ്ങളെയും സ്ഥാപനങ്ങളെയും ദേശീയപതാകയെയും ദേശീയഗാനത്തെയും ആദരിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഖ) സ്വാതന്ത്ര്യത്തിനുവേണ്ടിയുള്ള നമ്മുടെ ദേശീയസമരത്തിന് പ്രചോദനം നൽകിയ മഹനീയാദർശങ്ങളെ പരിപോഷിപ്പിക്കുകയും പിൻതുടരുകയും ചെയ്യുക;

(ഗ) ഭാരതത്തിന്റെ പരമാധികാരവും ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും നിലനിർത്തുകയും സംരക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഘ) രാജ്യത്തെ കാത്തുസൂക്ഷിക്കുകയും ദേശീയസേവനം അനുഷ്ഠിക്കുവാൻ ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ അനുഷ്ഠിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ങ) മതപരവും ഭാഷാപരവും പ്രാദേശികവും വിഭാഗീയവുമായ വൈവിധ്യങ്ങൾക്കതീതമായി ഭാരതത്തിലെ എല്ലാ ജനങ്ങൾക്കുമിടയിൽ, സൗഹാർദവും പൊതുവായ സാഹോദര്യമനോഭാവവും പുലർത്തുക, സ്ത്രീകളുടെ അന്തസ്സിന് കുറവു വരുത്തുന്ന ആചാരങ്ങൾ പരിത്യജിക്കുക;

(ച) നമ്മുടെ സമ്മിശ്രസംസ്കാരത്തിന്റെ സമ്പന്നമായ പാരമ്പര്യത്തെ വിലമതിക്കുകയും നിലനിറുത്തുകയും ചെയ്യുക;

(ഛ) വനങ്ങളും തടാകങ്ങളും നദികളും വന്യജീവികളും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രകൃത്യാ ഉള്ള പരിസ്ഥിതി സംരക്ഷിക്കുകയും അഭിവൃദ്ധിപ്പെടുത്തുകയും, ജീവികളോട് കാരുണ്യം കാണിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ജ) ശാസ്ത്രീയമായ കാഴ്ചപ്പാടും മാനവികതയും, അന്വേഷണത്തിനും പരിഷ്കരണത്തിനും ഉള്ള മനോഭാവവും വികസിപ്പിക്കുക;

(ഝ) പൊതുസ്വത്ത് പരിരക്ഷിക്കുകയും ശപഥം ചെയ്ത് അക്രമം ഉപേക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഞ) രാഷ്ട്രം യത്നത്തിന്റെയും ലക്ഷ്യപ്രാപ്തിയുടെയും ഉന്നതതലങ്ങളിലേക്ക് നിരന്തരം ഉയരത്തക്കവണ്ണം വ്യക്തിപരവും കൂട്ടായതുമായ പ്രവർത്തനത്തിന്റെ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും ഉൽക്കൃഷ്ടതയ്ക്കുവേണ്ടി അധ്വാനിക്കുക;

(ട) ആറിനും പതിനാലിനും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ള തന്റെ കുട്ടിക്കോ തന്റെ സംരക്ഷണയിലുള്ള കുട്ടികൾക്കോ, അതതു സംഗതി പോലെ, മാതാപിതാക്കളോ രക്ഷാകർത്താവോ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനുള്ള അവസരങ്ങൾ ഏർപ്പെടുത്തുക.

കുട്ടികളുടെ അവകാശങ്ങൾ

പ്രിയമുള്ള കുട്ടികളേ,

നിങ്ങൾക്കുള്ള അവകാശങ്ങളെന്തെല്ലാമെന്ന് അറിയേണ്ടതില്ലേ? അവകാശങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള അറിവ് നിങ്ങളുടെ പങ്കാളിത്തം, സംരക്ഷണം, സാമൂഹികനീതി എന്നിവ ഉറപ്പാക്കാൻ പ്രേരണയും പ്രചോദനവും നൽകും. നിങ്ങളുടെ അവകാശങ്ങൾ സംരക്ഷിക്കാൻ ഇപ്പോൾ ഒരു കമ്മീഷൻ പ്രവർത്തിക്കുന്നുണ്ട്. കേരള സംസ്ഥാന ബാലാവകാശസംരക്ഷണ കമ്മീഷൻ എന്നാണ് അതിന്റെ പേര്. എന്തെല്ലാമാണ് നിങ്ങൾക്കുള്ള അവകാശങ്ങൾ എന്നു നോക്കാം.

- സംസാരത്തിനും ആശയപ്രകടനത്തിനുമുള്ള സ്വാതന്ത്ര്യം
- ജീവന്റെയും വ്യക്തിസ്വാതന്ത്ര്യത്തിന്റെയും സംരക്ഷണം
- അതിജീവനത്തിനും പൂർണ്ണവികാസത്തിനുമുള്ള അവകാശം
- ജാതി-മത-വർഗ-വർണ്ണ ചിന്തകൾക്കതീതമായി ബഹുമാനിക്കപ്പെടാനും അംഗീകരിക്കപ്പെടാനുമുള്ള അവകാശം
- മാനസികവും ശാരീരികവും ലൈംഗികവുമായ പീഡനങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള സംരക്ഷണത്തിനും പരിചരണത്തിനുമുള്ള അവകാശം
- പങ്കാളിത്തത്തിനുള്ള അവകാശം
- ബാലവേലയിൽനിന്നും ആപൽക്കരമായ ജോലികളിൽനിന്നുമുള്ള മോചനം
- ശൈശവവിവാഹത്തിൽനിന്നുള്ള സംരക്ഷണം
- സ്വന്തം സംസ്കാരം അറിയുന്നതിനും അതനുസരിച്ച് ജീവിക്കുന്നതിനുമുള്ള സ്വാതന്ത്ര്യം
- അവഗണനകളിൽനിന്നുള്ള സംരക്ഷണം
- സൗജന്യവും നിർബന്ധിതവുമായ വിദ്യാഭ്യാസ അവകാശം
- കളിക്കാനും പഠിക്കാനുമുള്ള അവകാശം
- സ്നേഹവും സുരക്ഷയും നൽകുന്ന കുടുംബവും സമൂഹവും ലഭ്യമാകാനുള്ള അവകാശം

നിങ്ങളുടെ ചില ഉത്തരവാദിത്വങ്ങൾ

- സ്കൂൾ, പൊതുസംവിധാനങ്ങൾ എന്നിവ നശിപ്പിക്കാതെ സംരക്ഷിക്കുക.
- സ്കൂളിലും പഠനപ്രവർത്തനങ്ങളിലും കൃത്യനിഷ്ഠ പാലിക്കുക.
- സ്കൂൾ അധികാരികളെയും അധ്യാപകരെയും മാതാപിതാക്കളെയും സഹപാഠികളെയും ബഹുമാനിക്കുകയും അംഗീകരിക്കുകയും ചെയ്യുക.
- ജാതി-മത-വർഗ-വർണ്ണ ചിന്തകൾക്കതീതമായി മറ്റുള്ളവരെ ബഹുമാനിക്കാനും അംഗീകരിക്കാനും സന്നദ്ധരാവുക.

ബന്ധപ്പെടേണ്ട വിലാസം:

കേരള സംസ്ഥാന ബാലാവകാശസംരക്ഷണ കമ്മീഷൻ

ശ്രീ ഗണേഷ്, റ്റി.സി. 14/2036, വാൻറോസ് ജംങ്ഷൻ,

കേരള യൂണിവേഴ്സിറ്റി പി.ഒ, തിരുവനന്തപുരം – 34

ഫോൺ 0471 – 2326603

ഇ- മെയിൽ childrights.cpcr@kerala.gov.in, rte.cpcr@kerala.gov.in

വെബ്സൈറ്റ് : www.kescpcr.kerala.gov.in

ചൈൽഡ് ഹെൽപ്പ് ലൈൻ - 1098, ക്രൈം സ്റ്റോപ്പർ - 1090, നിർഭയ – 1800 425 1400

കേരള പൊലീസ് ഹെൽപ്പ് ലൈൻ - 0471 – 3243000/44000/45000

online ***R.T.E Monitoring : www.nireekshana.org.in***