ഗണിതം

ഭാഗം - 2

സ്റ്റാൻഡേർഡ്

X

കേരളസർക്കാർ
പൊതുവിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

തയ്യാറാക്കിയത്
സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT) കേരളം
2025

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണ്ണവും വൈവിധ്യപൂർണ്ണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

ഗണിതം

10

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala
Website: www.scertkerala.gov.in
e-mail: scertkerala@gmail.com, Phone: 0471 - 2341883
Typesetting and Layout: SCERT
First Edition: 2025
Printed at: KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of General Education, Government of Kerala

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

അളവുകളെ സംഖ്യകളായി മാറ്റുന്നതും, അളവുകളെ സംബന്ധിക്കുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ സംഖ്യാപ്രശ്നങ്ങളായും, ബീജഗണിതപ്രശ്നങ്ങളായും മാറ്റി പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതുമെല്ലാം മുൻക്ലാസുകളിൽ കണ്ടു. കേവലസംഖ്യകളുടെ ക്രിയാബന്ധങ്ങൾ ബീജഗണിതതത്വങ്ങളായി വികസിക്കുന്നതും അവ അളവുകളുടെ പ്രശ്നങ്ങളിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നതും തിരിച്ചറിഞ്ഞു. രൂപങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ ജ്യാമിതീയ തത്വങ്ങളാകുന്നതിന്റെ ഉദാഹരണങ്ങളും പരിചയപ്പെട്ടു.
ഈ വഴികളിലൂടെത്തന്നെ അല്പം കൂടി മുന്നോട്ടുപോകുകയാണ് ഈ പാഠപുസ്തകത്തിലും ചെയ്തിരിക്കുന്നത്. വ്യത്യസ്ത ശാഖകളായി വളരുന്ന ബീജഗണിതവും ജ്യാമിതിയും ചേർന്ന് പുതിയൊരു ഗണിതശാഖ രൂപപ്പെടുന്നത് ഇതിൽ കാണാം. എല്ലാ ശാസ്ത്രങ്ങളിലും ഉപയോഗിക്കുന്നതും, ഇന്നു വ്യാപകമായി പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന നിർമിതബുദ്ധിയുടെ സൃഷ്ടിയിൽ ഒഴിച്ചുകൂടാനാവാത്തതുമായ സാധ്യതാസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ആദ്യപാഠങ്ങളും ഇതിൽ ഉൾപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.
ഗണിതം ഇഷ്ടവിഷയമായി തുടർന്നു പഠിക്കുന്നവർക്ക് ആവശ്യമായ അടിസ്ഥാന ഗണിതമെല്ലാം ഈ പാഠപുസ്തകത്തിലുണ്ട്. പ്രാഥമിക വിദ്യാഭ്യാസത്തിന്റെ ഒരു ഘട്ടം കഴിയുമ്പോൾ എല്ലാവരുടെയും ചിന്തയിൽ അവശ്യം ഉണ്ടാകേണ്ട ഗണിതസംസ്കാരമാണ് ഈ പുസ്തകങ്ങളുടെ ആന്തരികമൂല്യം. കാര്യകാരണബോധത്തോടുകൂടിയുള്ള വിശകലനങ്ങൾ നടത്താനും, അതിലൂടെ മാത്രം നിഗമനങ്ങൾ രൂപപ്പെടുത്തുവാനുമുള്ള മനോഭാവമാണ് ഈ സംസ്കാരത്തിന്റെ സത്ത.

സ്നേഹാശംസകളോടെ,

ഡോ. ജയപ്രകാശ് ആർ.കെ.
ഡയറക്ടർ
എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി. കേരളം

പാഠപുസ്തകരചനാസമിതി

അഡ്വൈസർ

ഡോ. ഈ. കൃഷ്ണൻ,
ഗണിതവിഭാഗം മേധാവി (റിട്ട.),
യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്, തിരുവനന്തപുരം

ചെയർപേഴ്സൺ

ഡോ. പി. രമേശ് കുമാർ
ഗണിതവിഭാഗം മേധാവി (റിട്ട.),
യൂണിവേഴ്സിറ്റി ഓഫ് കേരള,
കാര്യവട്ടം, തിരുവനന്തപുരം

വിദഗ്ധർ

ഡോ. ഷിഖി എം.
പ്രൊഫസർ,
കോളേജ് ഓഫ് എഞ്ചിനിയറിംഗ് ട്രിവാൻഡ്രം,
തിരുവനന്തപുരം

ഡോ. സുമേഷ്
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫസർ,
മാർ ഇവാനിയസ് കോളേജ്,
തിരുവനന്തപുരം

അംഗങ്ങൾ

ആർ. രാമാനുജം
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
എം.എൻ.കെ.എം.
ഗവ: ഹയർസെക്കന്ററി സ്കൂൾ
പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്

വിജയകുമാരൻ ടി. കെ.
എച്ച് എസ് എസ് ടി (റിട്ട.),
ജി.എം.ആർ.എച്ച്.എസ്.എസ്.
ഫോർ ഗേൾസ്, പരവനടുക്കം,
കാസറഗോഡ്

സി. ടി. ഫിറോസ് ബാബു
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.ജി.വി.എച്ച്.എസ്.എസ്.
വണ്ടൂർ, മലപ്പുറം

ഉണ്ണികൃഷ്ണൻ എം. വി.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. കടന്നപ്പള്ളി
പി.ഒ കടന്നപ്പള്ളി കണ്ണൂർ

നന്ദകുമാർ സി.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ചോതാവൂർ ഹയർ
സെക്കൻഡറി സ്കൂൾ
ചമ്പാട്, കണ്ണൂർ

ശ്രീജിത്ത് മുറിയമ്പത്ത്
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. മടപ്പള്ളി,
വടകര, കോഴിക്കോട്

പത്മപ്രസാദ് കെ.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
പന്തല്ലൂർ എച്ച്.എസ്.എസ്.,
കടമ്പോട് പോസ്റ്റ്, മലപ്പുറം

ഉബൈദുള്ള കെ.സി.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം
എസ്.ഒ.എച്ച്.എസ്., അരീക്കോട്,
മലപ്പുറം

ഫിറോസ മൊയ്തു
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
കാലിക്കറ്റ് ഗേൾസ് വി.എച്ച്.എസ്.
എസ്., കുണ്ടുങ്ങൽ, കല്ലായി,
കോഴിക്കോട്

പ്രിയ രാജ്
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
എം. ജി. ഡി. ഹൈസ്കൂൾ
പുതുശ്ശേരി,
പുതുശ്ശേരി സൗത്ത് പി.ഒ,
പത്തനംതിട്ട

ആയിഷകുട്ടി കെ.കെ
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.എച്ച്.എസ്. ബീനാച്ചി,
സുൽത്താൻബത്തേരി, വയനാട്

രാജേഷ് എം.
എച്ച്. എസ്. ടി. (ഗണിതം)
കല്ലടി എച്ച്.എസ്.എസ്
കുമരംപുത്തൂർ, മണ്ണാർക്കാട്,
പാലക്കാട്

ഉല്ലാസ് യു.ജി., (ആർട്ടിസ്റ്റ്)
എച്ച്.എസ്.ടി. ഫിസിക്കൽ സയൻസ്, സി.ബി.എച്ച്.എസ്.എസ്. വള്ളിക്കുന്ന്, മലപ്പുറം

അക്കാദമിക് കോഡിനേറ്റർ

ഡോ. അനിൽകുമാർ എ.കെ.
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT)
വിദ്യാഭവൻ, പൂജപ്പുര, തിരുവനന്തപുരം 695 012

ഉള്ളടക്കം

8	തൊടുവരകൾ	159
9	ബഹുപദങ്ങളും സമവാക്യങ്ങളും	189
10	വൃത്തങ്ങളും വരകളും	207
11	ജ്യാമിതിയും ബീജഗണിതവും	225
12	ഘനരൂപങ്ങൾ	255
13	സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക്	277

ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി
ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു

കണക്കു ചെയ്തുനോക്കാം

ഗവേഷണം

ഐ.സി.റ്റി. സാധ്യത

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ആമുഖം

ഭാരതത്തിലെ ജനങ്ങളായ നാം ഭാരതത്തെ ഒരു [1]**[പരമാധികാര സ്ഥിതിസമത്വ മതേതര ജനാധിപത്യ റിപ്പബ്ലിക്കായി]** സംവിധാനം ചെയ്യുവാനും അതിലെ പൗരന്മാർക്കെല്ലാം:

സാമൂഹ്യവും സാമ്പത്തികവും രാഷ്ട്രീയവും ആയ **നീതിയും;**

ചിന്തയ്ക്കും ആശയപ്രകടനത്തിനും വിശ്വാസത്തിനും മതനിഷ്ഠയ്ക്കും ആരാധനയ്ക്കും ഉള്ള **സ്വാതന്ത്ര്യവും;**

പദവിയിലും അവസരത്തിലും **സമത്വവും;**
സംപ്രാപ്തമാക്കുവാനും;

അവർക്കെല്ലാമിടയിൽ

വ്യക്തിയുടെ അന്തസ്സും [2][രാഷ്ട്രത്തിന്റെ ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും] ഉറപ്പുവരുത്തിക്കൊണ്ട് **സാഹോദര്യം** പുലർത്തുവാനും;

സഗൗരവം തീരുമാനിച്ചിരിക്കയാൽ;

നമ്മുടെ ഭരണഘടനാനിർമ്മാണസഭയിൽ ഈ 1949 നവംബർ ഇരുപത്താറാം ദിവസം **ഇതിനാൽ ഈ ഭരണഘടനയെ സ്വീകരിക്കുകയും നിയമമാക്കുകയും നമുക്കു തന്നെ പ്രദാനം ചെയ്യുകയും ചെയ്യുന്നു.**

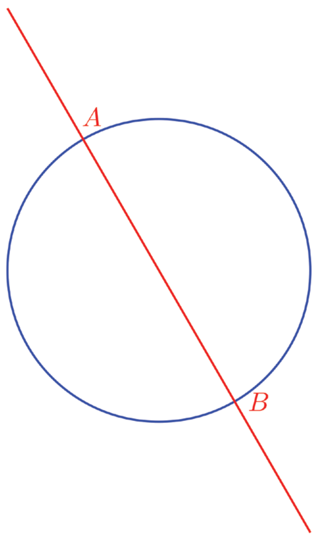
---

1. 1976 - ലെ ഭരണഘടന (നാല്പത്തിരണ്ടാം ഭേദഗതി) ആക്റ്റ് 2-ാം വകുപ്പു പ്രകാരം "പരമാധികാര ജനാധിപത്യ റിപ്പബ്ലിക്" എന്നതിന് പകരം ചേർത്തത് (3.1.1977 മുതൽ പ്രാബല്യം).
2. മേല്പറഞ്ഞ ആക്റ്റ് 2-ാം വകുപ്പു പ്രകാരം "രാഷ്ട്രത്തിന്റെ ഐക്യം" എന്നതിനു പകരം ചേർത്തത് (3.1.1977 മുതൽ പ്രാബല്യം).

8 തൊടുവരകൾ

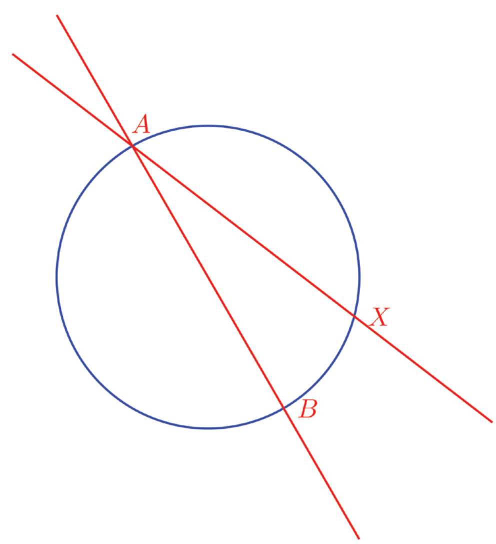
വരയും വട്ടവും

ചിത്രം നോക്കൂ:

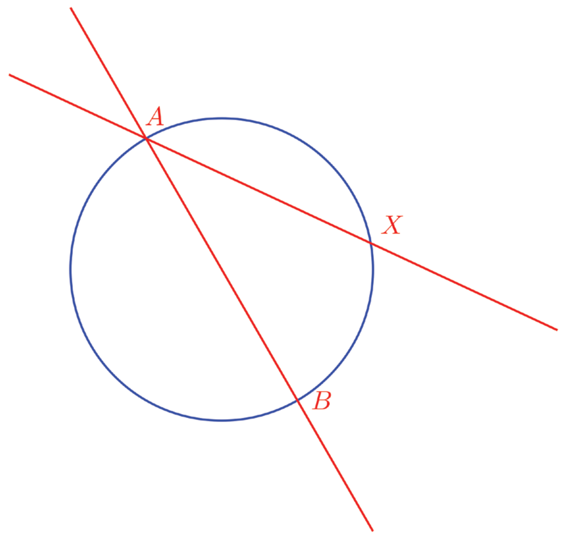


വൃത്തത്തിലെ A എന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടിയുള്ള വ്യാസമാണ് AB; ഇത് ഇരുവശത്തേക്കും അല്പം നീട്ടിയിട്ടുമുണ്ട്.

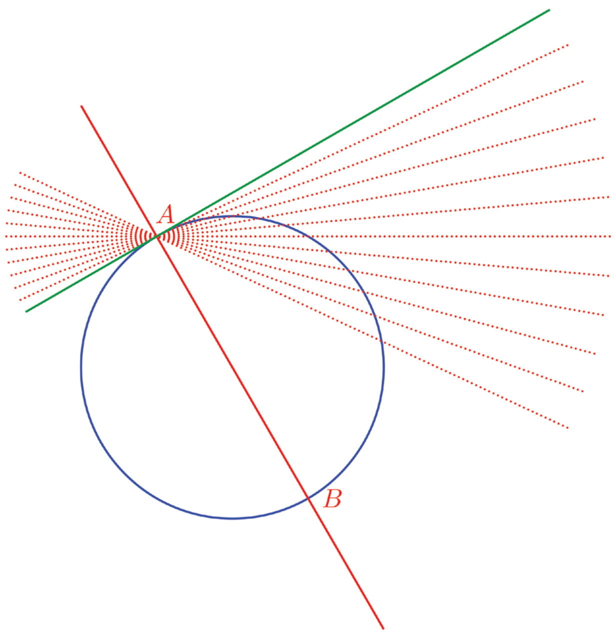
വൃത്തത്തിൽത്തന്നെ മറ്റൊരു ബിന്ദു X എടുത്ത്, AX എന്ന ഞാൺ ഇതുപോലെ നീട്ടിയതാണ് ഈ ചിത്രം:



A യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റാതെ, X അല്പം കൂടി A യോട് അടുപ്പിച്ചാലോ?



ഇങ്ങനെ X വൃത്തത്തിലൂടെ A യോട് കൂടുതൽ അടുപ്പിച്ചുകൊണ്ടേയിരുന്നാലോ ?



ജിയോജിബ്രയിൽ O എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ A, X എന്നിങ്ങനെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. O, A എന്നീ ബിന്ദുക്കളും A, X എന്നീ ബിന്ദുക്കളും യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ട് Line ഉപയോഗിച്ച് വരകൾ വരയ്ക്കുക. X ന്റെ സ്ഥാനം A യിലേക്ക് അടുപ്പിക്കുമ്പോൾ AX എന്ന വരയ്ക്ക് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? X എന്ന ബിന്ദു A യിലെത്തുമ്പോഴോ? O, X ഇവ യോജിപ്പിക്കുക. X ന്റെ സ്ഥാനം A യിലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ OAX, AOX എന്നീ കോണുകൾക്ക് എന്ത് മാറ്റമാണ് സംഭവിക്കുന്നതെന്ന് നോക്കുക.

AX എന്ന വര, ചിത്രത്തിലെ പച്ച വരയോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നില്ലേ ?

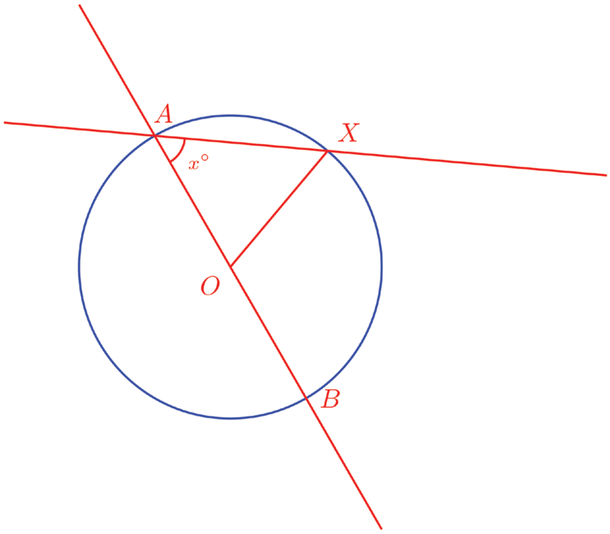
ഈ പച്ച വരയെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

അത് വൃത്തത്തെ A യിൽ മാത്രം ഒന്നു തൊടുന്നു, അല്ലേ ?

ഈ വരയെ വൃത്തത്തിലെ A എന്ന ബിന്ദുവിലെ **തൊടുവര (tangent)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. ചിത്രം ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ; വ്യാസവും തൊടുവരയും തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധം കാണുന്നുണ്ടോ?

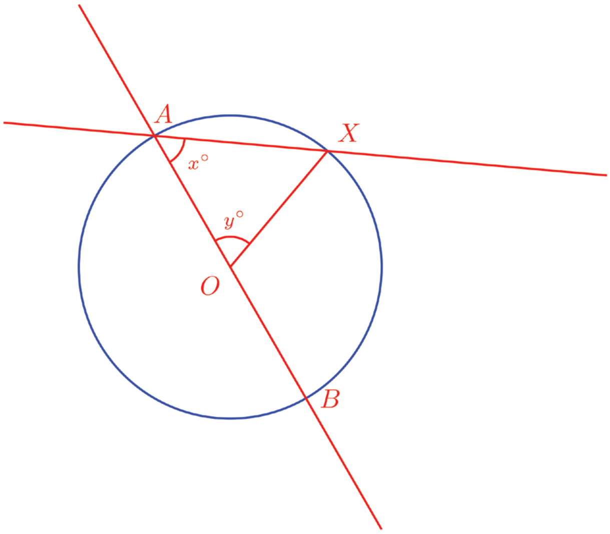
തൊടുവര, വ്യാസത്തിനു ലംബമാണെന്നു തോന്നുന്നില്ലേ ?

ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, X എന്ന ബിന്ദു വൃത്തത്തിലൂടെ A എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ അടുത്തേക്ക് നീങ്ങു മ്പോൾ, ഈ ഞാണും വ്യാസവും തമ്മിലുള്ള കോണിന് എന്തു സംഭവി ക്കുന്നു എന്നു നോക്കാം:



X എന്ന ബിന്ദു A എന്ന ബിന്ദുവിനോട് അടുപ്പിക്കുമ്പോൾ, ചിത്രത്തിൽ x° എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ഈ കോൺ വലുതാകും. എത്ര വരെ വലുതാകും?

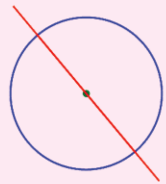
അതു മനസ്സിലാക്കാൻ, AX എന്ന ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ y° എന്നെടുക്കാം.



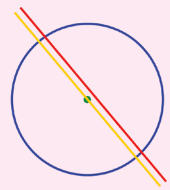
X എന്ന ബിന്ദു A യോട് അടുപ്പിക്കുന്തോറും, AX എന്ന ഞാണിന്റെ നീളവും, അതിന്റെ കേന്ദ്രകോണും ചെറുതാകും; അതായത് y എന്ന സംഖ്യ, പൂജ്യത്തോട് അടുക്കും.

നീങ്ങുന്ന വരകൾ

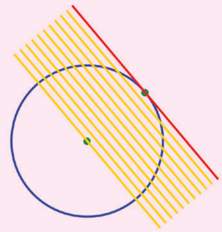
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



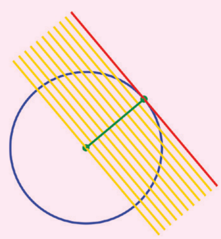
ഒരു വൃത്തവും, കേന്ദ്രത്തിലൂടെ ഒരു വരയും. വര അല്പം മുകളിലേക്കു നീക്കിയാലോ?



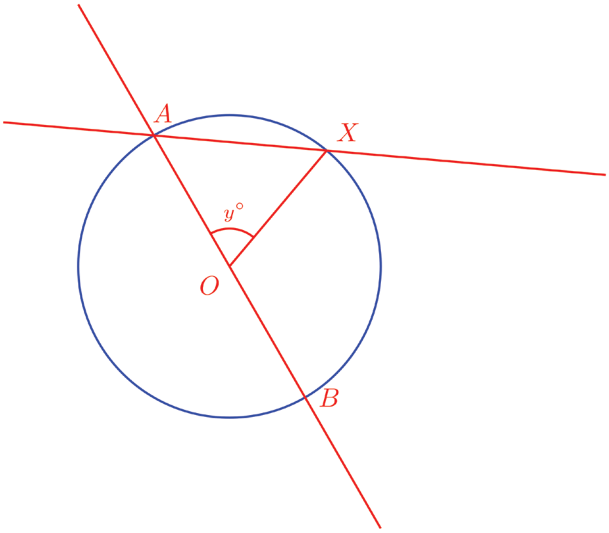
വര വീണ്ടും വീണ്ടും നീക്കിക്കൊണ്ടിരുന്നാൽ വൃത്തത്തിലെ ഒരേയൊരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടിപ്പോ കുന്ന വരയിലെത്തില്ലേ?

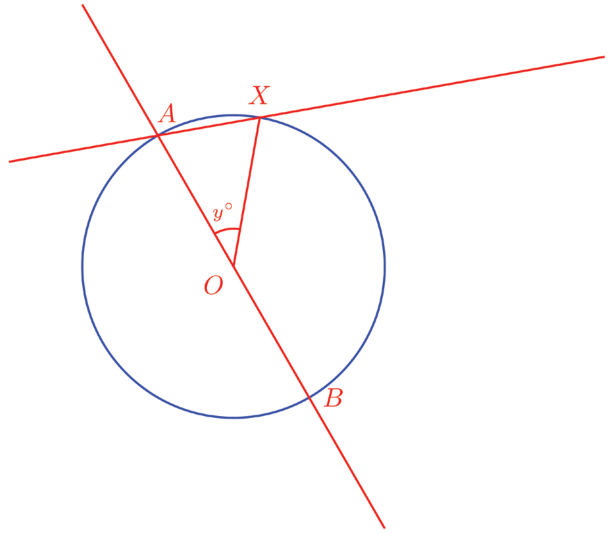


കേന്ദ്രവും, അവസാനം കിട്ടിയ ബിന്ദുവും യോജി പ്പിക്കുന്ന വര, ഈ സമാന്തരവരകൾക്കെല്ലാം ലംബമാണല്ലോ.



ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വൃത്തവും അതിന്റെ ഒരു ആരവും വരയ്ക്കുക. ആരത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു (Point on Object) അടയാളപ്പെടുത്തി അതിലൂടെ ആരത്തിന് ലംബം വരയ്ക്കുക. ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. ഈ ബിന്ദു വൃത്തത്തിലെത്തുമ്പോൾ വരയ്ക്ക് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത് ?



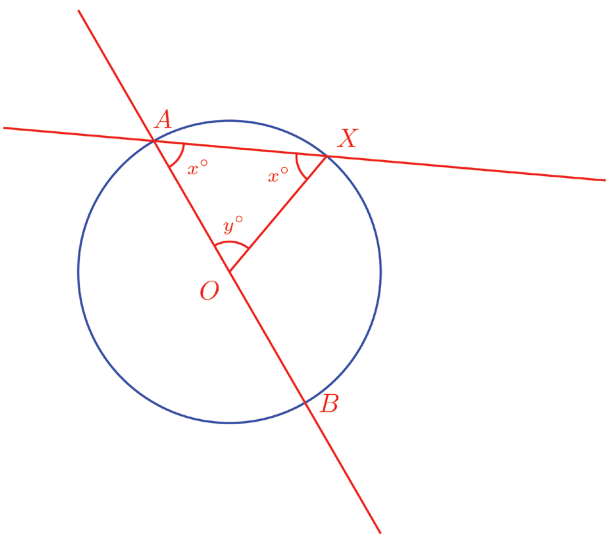


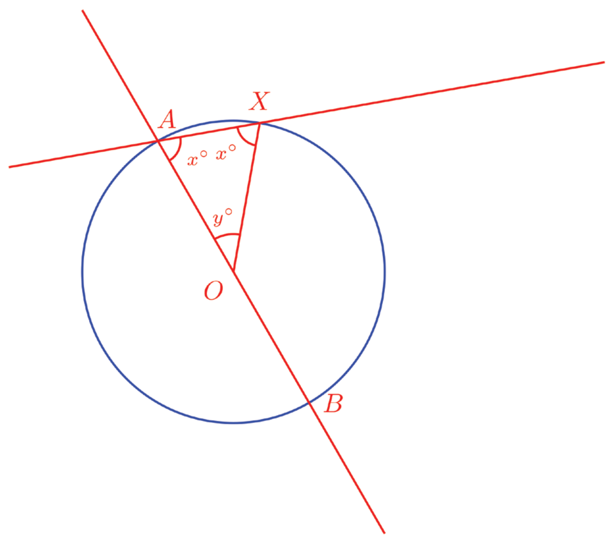
നമുക്കറിയേണ്ടത്, x എന്ന സംഖ്യയ്ക്ക് എന്തു സംഭവിക്കുന്നു എന്നാണല്ലോ;

x ഉം y ഉം തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം ?

OAX എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ OA, OX എന്നീ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങളാണ്; അതിനാൽ അവയ്ക്ക് ഒരേ നീളവുമാണ്. അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിലെ ഇവയ്ക്കെതിരെയുള്ള കോണുകളും തുല്യമാകണമല്ലോ (എട്ടാംക്ലാസിലെ **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

അപ്പോൾ OAX എന്ന ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ കോൺ $x°$ ആണ്.





ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക 180° ആയതിനാൽ

$$2x + y = 180$$

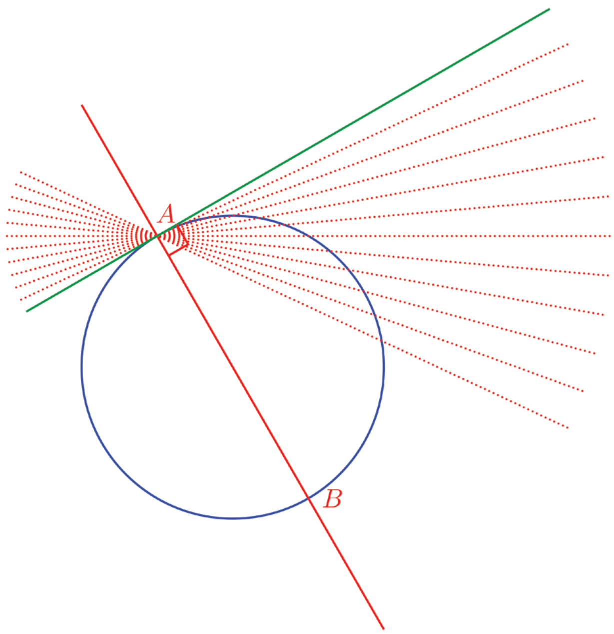
അതായത്

$$x = \frac{1}{2}(180 - y) = 90 - \frac{1}{2}y$$

y എന്ന സംഖ്യ പൂജ്യത്തോട് അടുക്കുമ്പോൾ, x എന്ന സംഖ്യ 90 നോട് അടുക്കും എന്ന് ഈ ബന്ധത്തിൽനിന്നു കാണാമല്ലോ.

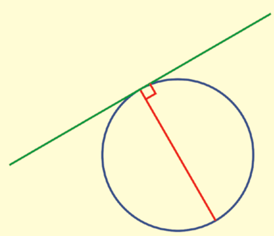
അതായത്, X എന്ന ബിന്ദു A എന്ന ബിന്ദുവിനോടടുക്കുന്തോറും, AX എന്ന ഞാണും, വ്യാസവുമായുള്ള കോൺ $90°$ യോട് അടുത്തടുത്തു വരും;

തൊടുവരയാകുമ്പോൾ, കൃത്യം $90°$ ആകുകയുംചെയ്യും;



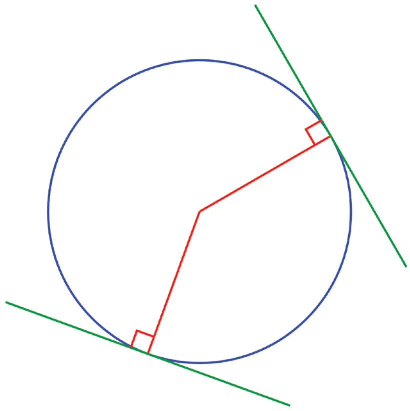
ഇത് ഒരു പൊതുതത്വമായി പറയാം:

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള തൊടുവര, ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസത്തിനു ലംബമാണ്

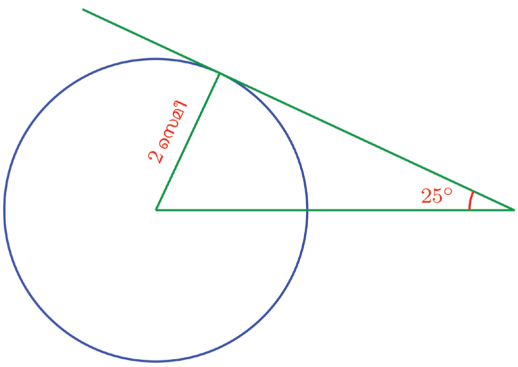


ഇതുപയോഗിച്ച് ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഏതു ബിന്ദുവിലൂടെയും തൊടുവര വരയ്ക്കാം. ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസത്തിന് അതേ ബിന്ദുവിലൂടെ ലംബം വരച്ചാൽ മതിയല്ലോ.

വ്യാസം മുഴുവൻ വരയ്ക്കാതെ ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ആരം വരച്ചാലും മതി:



ഇനി ഈ ചിത്രം നോക്കുക:

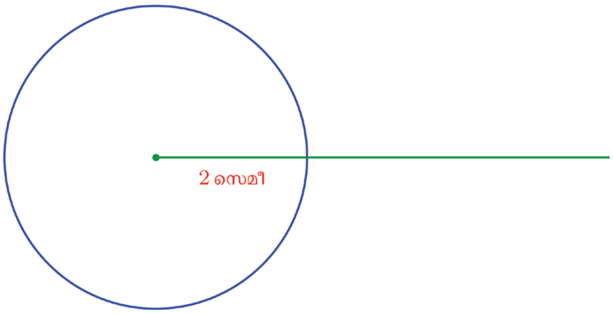


വൃത്തത്തിന് തൊടുവര വരയ്ക്കാൻ ജിയോജിബ്രയിലെ Tangents എടുത്ത് വൃത്തത്തിലും തൊടുവര കടന്നു പോകേണ്ട ബിന്ദുവിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി. ബിന്ദു വൃത്തത്തിലാണെങ്കിൽ ഒരു തൊടുവര ലഭിക്കുമല്ലോ. വൃത്തത്തിന് പുറത്താണെങ്കിലോ?

വൃത്തത്തിന് അതിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ തൊടുവര വരച്ച് അതിന്റെ Trace On നൽകുക. തൊടുവര വരച്ച ബിന്ദുവിന് Animation നൽകി നോക്കൂ.

മുകളിലെ വര, വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരയാണ്. ഈ ചിത്രം നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കാമോ ?

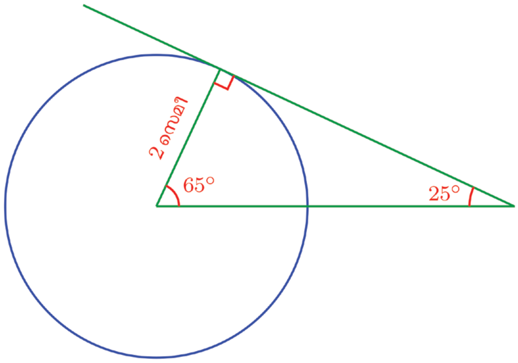
ആദ്യം 2 സെമീ ആരത്തിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കാം. കേന്ദ്രത്തിലൂടെ വിലങ്ങനെ ഒരു വരയും വരയ്ക്കാം:



ഇനി വൃത്തത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിലൂടെ തൊടുവര വരയ്ക്കണം? അത് ആദ്യത്തെ വരയെ 25° ചരിവിൽ കൂട്ടിമുട്ടണമല്ലോ.

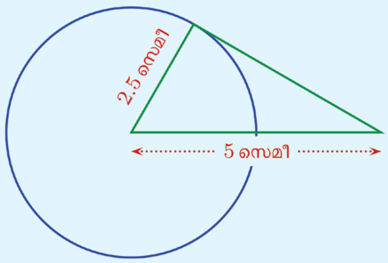
ആദ്യത്തെ ചിത്രം ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ. അതിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലത്തെ കോൺ മട്ടമാണ്; മറ്റൊരു കോൺ 25° യും.

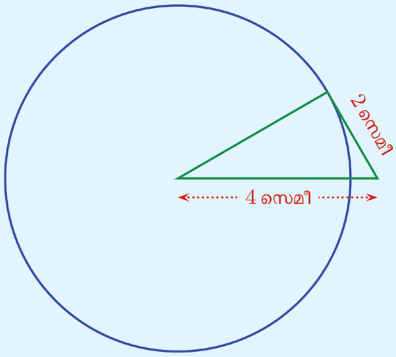
അപ്പോൾ മൂന്നാമത്തെ കോൺ എത്ര ഡിഗ്രിയാണ്?



ഇനി ചിത്രം മുഴുവനാക്കാമല്ലോ.

(1) ചുവടെയുള്ള രണ്ടു ചിത്രത്തിലും വൃത്തത്തിലെ ഒരു തൊടുവരയും, തൊടുന്ന ബിന്ദുവിലേയ്ക്കുള്ള ആരവും, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള മറ്റൊരു വരയും ചേർത്ത് ത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നു.





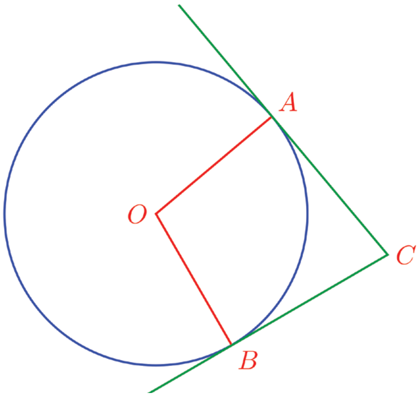
ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക.

(2) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളിൽ വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾ സമാന്തരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(3) ഒരു വൃത്തത്തിലെ പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വ്യാസങ്ങളുടെ അറ്റങ്ങളിൽ വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾ ചേർന്നുണ്ടാകുന്നത് ഏതുതരം ചതുർഭുജമാണ്?

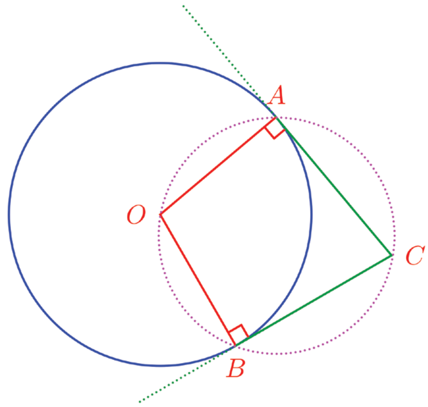
തൊടുവരകളും കോണുകളും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

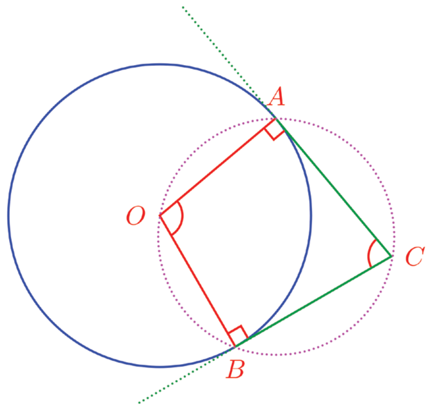


O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിലെ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ, C എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.

$OACB$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ A, B എന്നീ എതിർമൂലകളിലെ കോണുകൾ മട്ടമാണ്; അതിനാൽ, അവയുടെ തുക $180°$. അപ്പോൾ ഈ ചതുർഭുജം ചക്രീയമാണ്.



ഇത്തരമൊരു ചതുർഭുജത്തിലെ മറ്റു രണ്ടു കോണുകളുടെ തുകയും $180°$ തന്നെയാണല്ലോ.



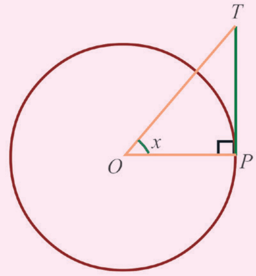
ഇത് ഒരു പൊതുതത്വമായി പറയാം:

ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണിന്റെയും, ഈ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ ചേരുന്ന കോണിന്റെയും തുക $180°$ ആണ്

പേരുവിവരം

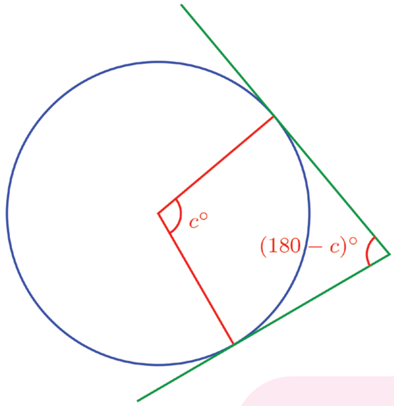
തൊടുക എന്നർഥമുള്ള tangere എന്ന ലാറ്റിൻ വാക്കിൽ നിന്നാണ്, തൊടുവരയ്ക്ക് ഇംഗ്ലീഷിൽ tangent എന്ന പേരു വന്നത്. ത്രികോണമിതിയിലെ tan എന്ന അളവിന്റെയും മുഴുവൻ പേര് tangent എന്നു തന്നെയാണല്ലോ. എന്താണ് ഇതിന് തൊടുവരയുമായുള്ള ബന്ധം ?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

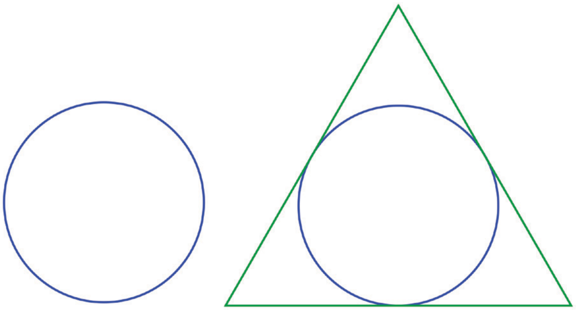


വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 1 എന്നെടുത്താൽ, PT എന്ന തൊടുവരയുടെ നീളം $\tan x$ തന്നെയല്ലേ ?

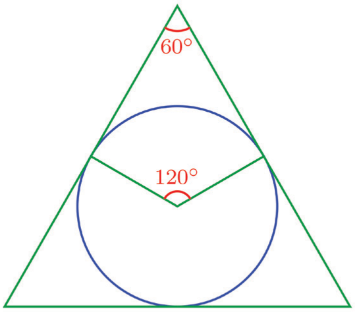
O എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ച് അതിൽ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ വൃത്തത്തിന് തൊടുവരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. ചതുർഭുജം OACB വരച്ചു നോക്കൂ. ഇത് ചക്രീയമാണോ? Circle through Three Points ഉപയോഗിച്ച് O, A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരച്ചു നോക്കാം. A, B ഇവയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. ഇവ അടുത്തടുത്തു വരുമ്പോൾ C യ്ക്ക് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത് ? അകന്നു പോകുമ്പോഴോ? ഈ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കളാകുമ്പോൾ എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്?



ഇതുപയോഗിച്ച് വരയ്ക്കാവുന്ന ഒരു ചിത്രം നോക്കാം: ഒരു വൃത്തത്തെ കൃത്യമായി പൊതിഞ്ഞു നിൽക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കണം:



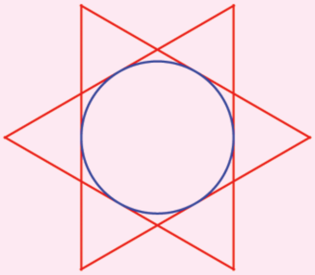
ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരകളാണല്ലോ. ത്രികോണം സമഭുജമായതിനാൽ, ഇവ ചേരുന്ന കോൺ $60°$. ഇവ വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണോ?



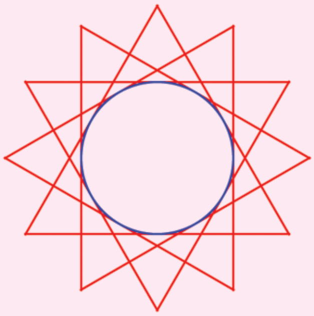
ഇതുപോലെ, ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണുകളെല്ലാം $120°$ ആണെന്നു കാണാം.

വരകൾകൊണ്ടൊരു വൃത്തം

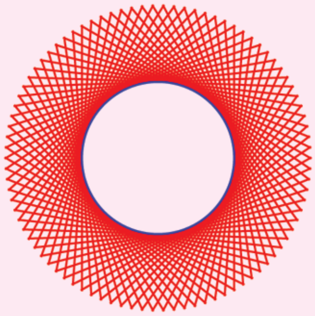
ചിത്രത്തിൽ ഒരു വൃത്തത്തിലെ ആറു ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുവരകൾ വരച്ച്, ഒരു നക്ഷത്രമുണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്നു.

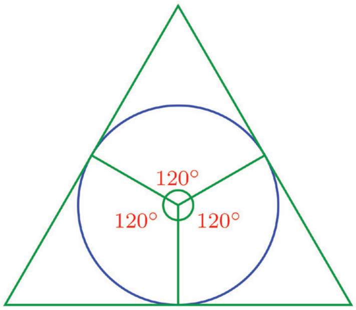


വരകളുടെ എണ്ണം 12 ആക്കിയാലോ ?

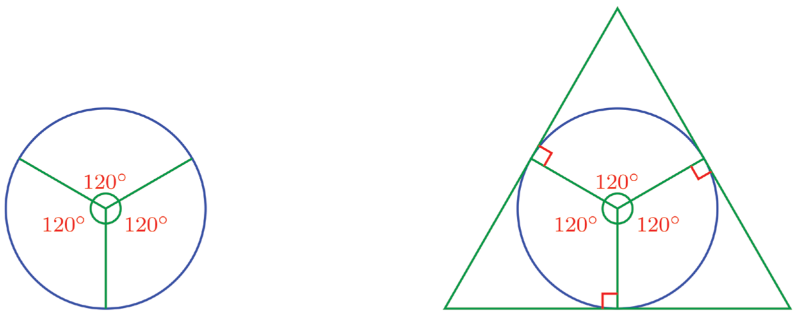


കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച്, 90 വരകൾ വരച്ച ചിത്രമാണ് ഇത്:





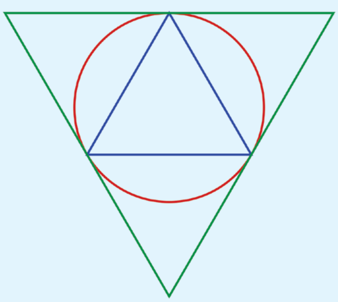
അപ്പോൾ, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ 120° ഇടവിട്ടു മൂന്ന് ആരങ്ങൾ വരച്ച്, അവയുടെ അറ്റങ്ങളിലൂടെ ലംബങ്ങൾ വരച്ചാൽ തൊടുവരകളായി; നമുക്കുവേണ്ട ത്രികോണവുമായി.



3 സെന്റിമീറ്റർ ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, ഇങ്ങനെയൊരു ത്രികോണവും വരച്ചു നോക്കൂ.

(1) ആരം 2.5 സെമീ ആയ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വശങ്ങളെല്ലാം ഈ വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന, കോണുകൾ 40°, 60°, 80° ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

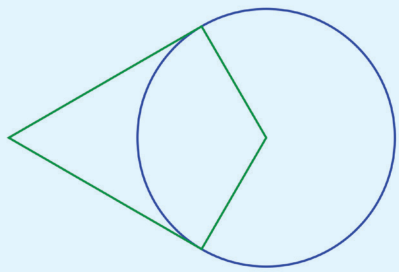
(2) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ ചെറിയ (നീല) ത്രികോണം സമഭുജമാണ്. അതിന്റെ മൂലകളിലൂടെ പരിവൃത്തത്തിനു വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകളാണ് വലിയ (പച്ച) ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ:



(i) വലിയ ത്രികോണം സമഭുജമാണെന്നും, അതിന്റെ വശങ്ങൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണെന്നും തെളിയിക്കുക.

(ii) ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ ആയി ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കുക.

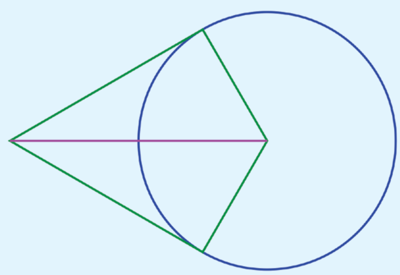
(3) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ടു തൊടുവരകളും, തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങളുമാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



(i) തൊടുവരകളുടെ നീളം തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

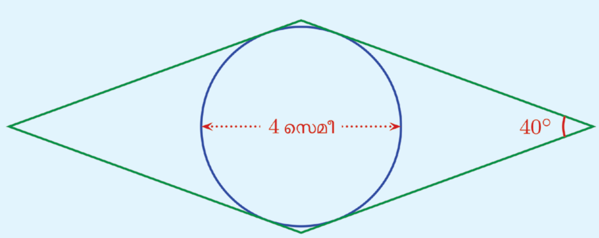
(ii) വൃത്തകേന്ദ്രവും, തൊടുവരകൾ ചേരുന്ന ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ആരങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണിന്റെ സമഭാജിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് ഈ ബിന്ദുവിലും വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലും ക്രമമായി ക്ലിക്കുചെയ്ത് കോണളവ് 120° എന്നു കൊടുത്താൽ വൃത്തത്തിൽ മറ്റൊരു ബിന്ദു കിട്ടും. ഈ ബിന്ദുവിലും കേന്ദ്രത്തിലും ക്ലിക്കു ചെയ്ത് 120° എന്നു കൊടുത്താൽ ഒരു ബിന്ദു കൂടി വൃത്തത്തിൽ ലഭിക്കും. ഈ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടിയും വൃത്തത്തിനു തൊടുവരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Segment ഉപയോഗിച്ച് ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇനി തൊടുവരകൾ മറച്ചുവയ്ക്കാം. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്ക് Trace on നൽകിയശേഷം വൃത്തത്തിൽ ആദ്യമെടുത്ത ബിന്ദുവിന് Animation നൽകി നോക്കൂ.



(iii) ഈ വര, തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഞാണിന്റെ ലംബസമഭാജിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

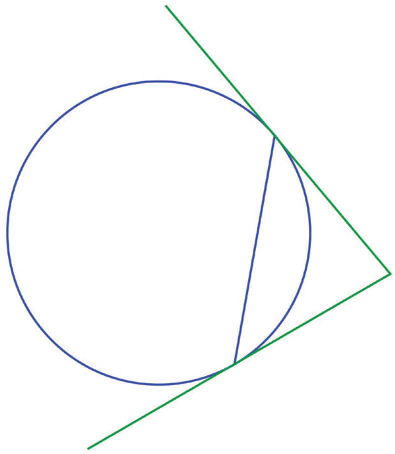
(4) ചിത്രത്തിലെ സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരകളാണ്.



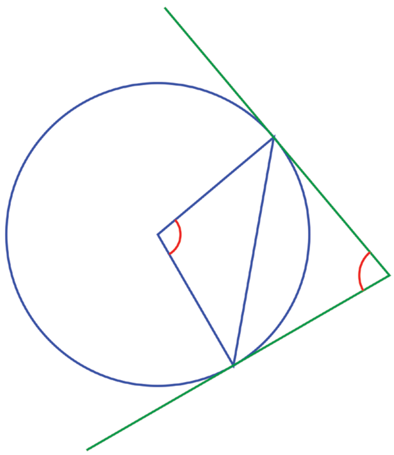
ഈ ചിത്രം നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക.

ഞാണും തൊടുവരയും

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണിന്റെ രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള തൊടുവരകളാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

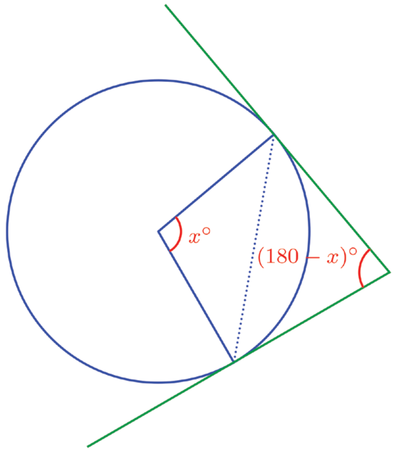


ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, തൊടുവരകൾ ചേരുന്ന കോണും തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?



A എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് വൃത്തത്തിൽ B, C എന്നിങ്ങനെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ തൊടുവര വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. AB, AC എന്നീ വരകളും BC എന്ന ഞാണും വരയ്ക്കുക. BAC, BDC എന്നീ കോണുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ് ? B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

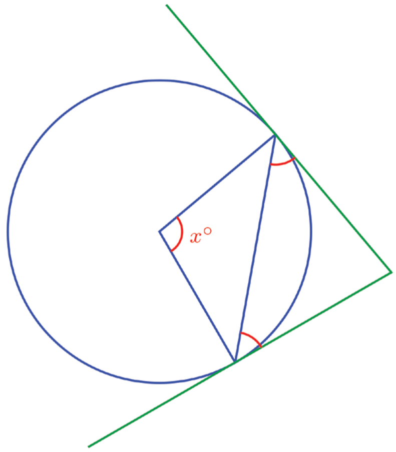
നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്, ഇവയുടെ തുക 180° ആണല്ലോ.



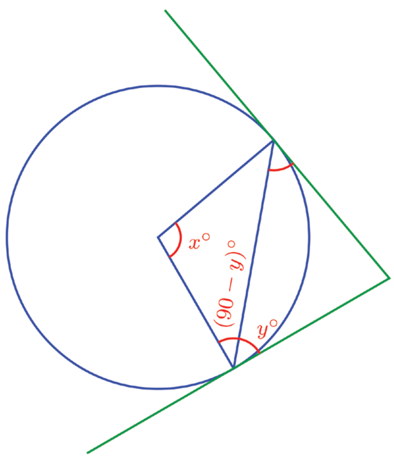
അപ്പോൾ നേരത്തെ കണ്ട തത്വം ഇങ്ങനെയും പറയാം:

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളിലുമുള്ള തൊടുവരകൾ ചേരുന്ന കോൺ, 180° യിൽനിന്ന് ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ കുറച്ചതാണ്

ഇനി ഞാണിന്റെ അറ്റത്തുള്ള തൊടുവരകൾ ഞാണുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾക്ക് ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോണുമായി എന്താണ് ബന്ധമെന്നു നോക്കാം:

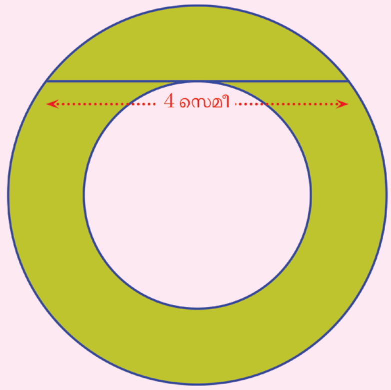


താഴത്തെ തൊടുവര ഞാണുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ y° എന്നെടുക്കാം. ഈ തൊടുവരയും, തൊടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ആരവും തമ്മിലുള്ള കോൺ 90° ആയതിനാൽ, കോണുകൾ ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താം:



പരപ്പളവ് പ്രശ്നം

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ, പച്ച ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?



ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ ഒരു ഞാണും, ഞാണിന്റെ രണ്ട് അറ്റങ്ങളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകളും വരയ്ക്കുക. ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, ഞാൺ തൊടുവരയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണും അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ കോണുകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം? ഞാണിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി പല ഞാണുകൾ വരച്ചു നോക്കൂ.

വൃത്തത്തിനകത്തെ (നീല) ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങളായതിനാൽ, അവയ്ക്ക് ഒരേ നീളമാണ്; അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിൽ ആ വശങ്ങൾക്കെതിരെയുള്ള കോണുകളും തുല്യമാണ്.

അതായത്, ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാമത്തെ കോണും $(90 - y)^\circ$ തന്നെയാണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക 180° ആയതിനാൽ

$$x + (90 - y) + (90 - y) = 180$$

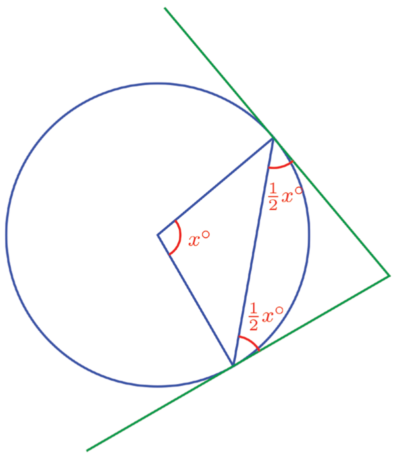
ഇതിൽനിന്ന്

$$x - 2y = 0$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതായത്,

$$y = \frac{1}{2}x$$

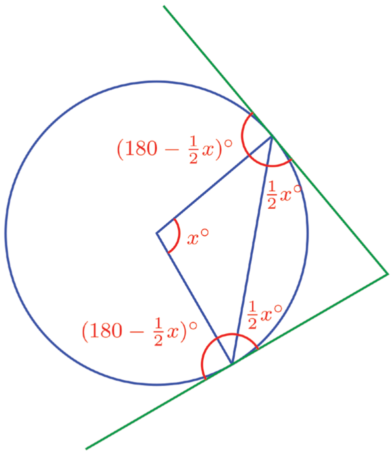
ഇതുപോലെ, മുകളിലെ തൊടുവര ഞാണുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണും $\frac{1}{2}x^\circ$ എന്നു കണക്കാക്കാം:



അതായത്

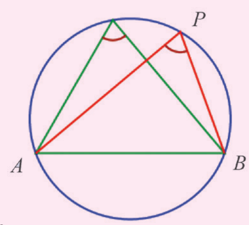
> വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളിലൂടെയുമുള്ള തൊടുവരകൾ ഞാണുമായി ഒരു വശത്ത് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ രണ്ടും, ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയാണ്.

ഞാണിന്റെ മറുവശത്ത് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളോ?

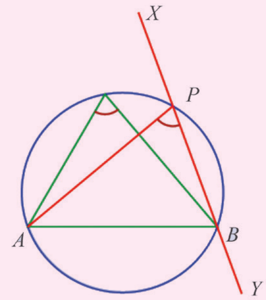


മാറാത്ത കോൺ

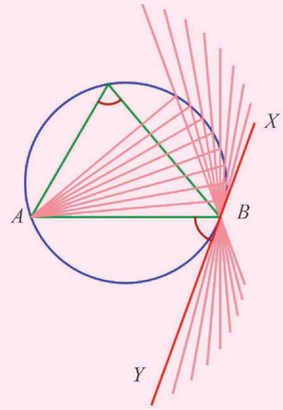
ഒരേ വൃത്തഭാഗത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണല്ലോ.



PB അല്പം നീട്ടി വരയ്ക്കാം:

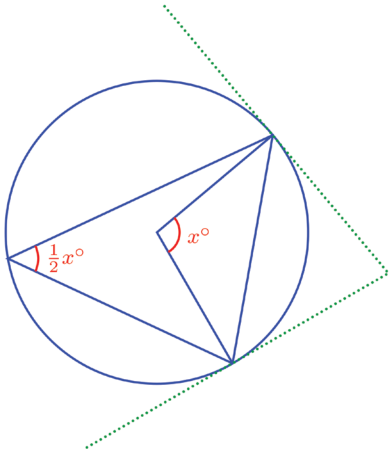


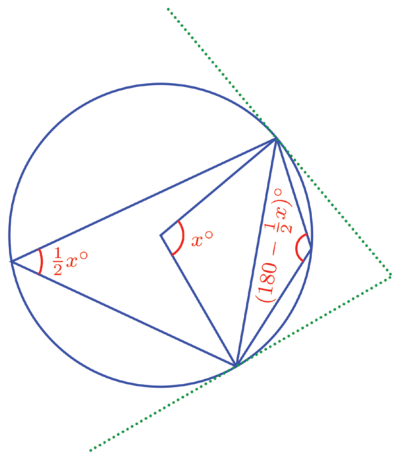
ഇനി P വൃത്തത്തിലൂടെ നീങ്ങി, B യിലെത്തിയാലോ?



XY എന്ന വര B യിലെ തൊടുവരയാകും; കോണൊട്ടു മാറുന്നുമില്ല.

ഇവിടെ **വൃത്തങ്ങളും കോണുകളും** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ട ഒരു കാര്യം ഓർക്കാം. കേന്ദ്രകോൺ x° ആയ ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ മറുചാപത്തിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ $\frac{1}{2}x^\circ$ യും, അതേ ചാപത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ $\left(180-\frac{1}{2}x\right)^\circ$ യും അല്ലേ?



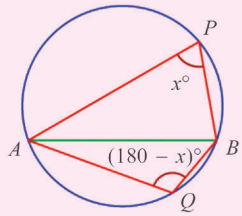


മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഇവിടെ തൊടുവരകൾ ഞാണുമായി വലതു വശത്തുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ $\frac{1}{2}x^\circ$ ആണ്. ഞാണിന്റെ ഇടതുവശത്തുള്ള വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ ഏതു കോണെടുത്താലും $\frac{1}{2}x^\circ$ തന്നെയാണ്.

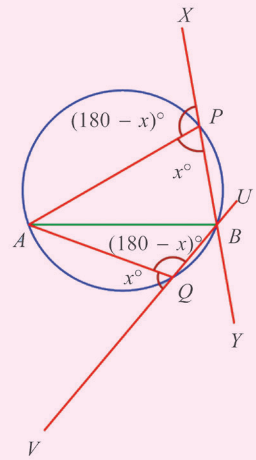
തൊടുവരകൾ ഞാണിന്റെ വലതുവശത്തുണ്ടാക്കുന്ന $\left(180-\frac{1}{2}x\right)^\circ$ കോണുകളോ?

മറിയുന്ന കോണുകൾ

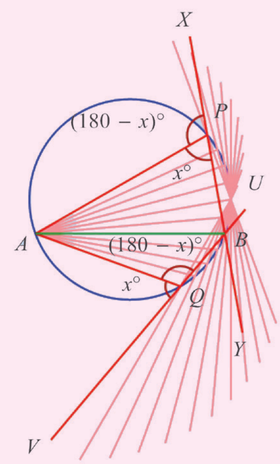
വൃത്തത്തിലെ ഇരു ഭാഗങ്ങളിലുള്ള കോണുകളുടെ തുക 180° ആണല്ലോ.



നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ വരകൾ നീട്ടിവരയ്ക്കാം,



P വൃത്തത്തിലൂടെ Q വിലേക്കു നീങ്ങിയാലോ?

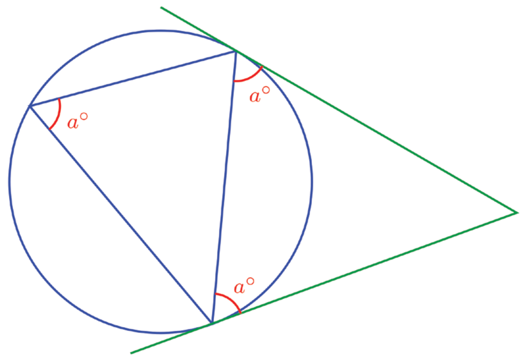


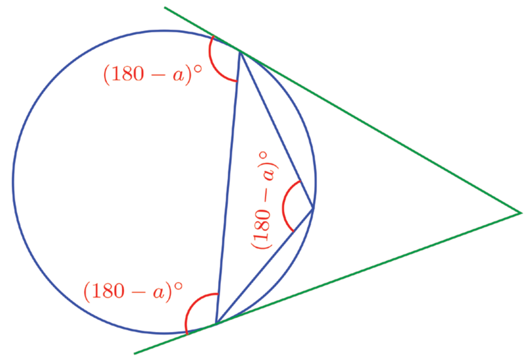
AP യുടെ താഴെ x° യും, മുകളിൽ $(180-x)^\circ$ ഉം ആണ്. ചലനത്തിലുടനീളം അങ്ങനെതന്നെയല്ലേ?

അപ്പോൾ പൊതുവേ വൃത്തത്തിലെ ഞാണുമായി അതിന്റെ അറ്റങ്ങളിലുള്ള തൊടുവരകൾ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളെക്കുറിച്ച് ഇങ്ങനെ പറയാം:

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണിന്റെ അറ്റങ്ങളിൽ വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾ ഞാണുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളിൽ ഒരു വശത്തുള്ള കോണുകൾ രണ്ടും, മറുവശത്തെ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകൾക്ക് തുല്യമാണ്

A എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ B, C എന്നിങ്ങനെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കുക. BC എന്ന ഞാൺ വരയ്ക്കുക. ഈ ഞാൺ തൊടുവരകളുമായി ഒരു വശത്ത് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളും ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോണും അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം? ഞാണിന്റെ മറുവശത്തെ വൃത്തഖണ്ഡത്തിൽ D എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. BD, CD എന്നീ വരകൾ വരച്ച് കോൺ D അടയാളപ്പെടുത്തുക. തൊടുവരകൾ ഞാണുമായി ഒരു വശത്തുണ്ടാക്കുന്ന കോണും മറുവശത്തെ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണും (കോൺ D) തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?

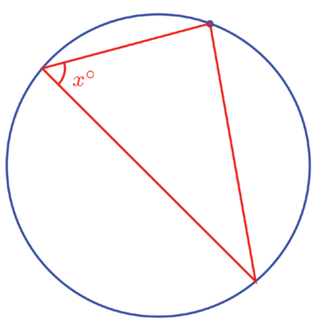


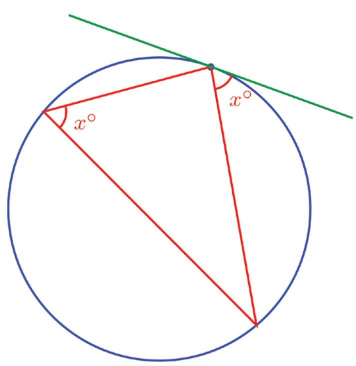


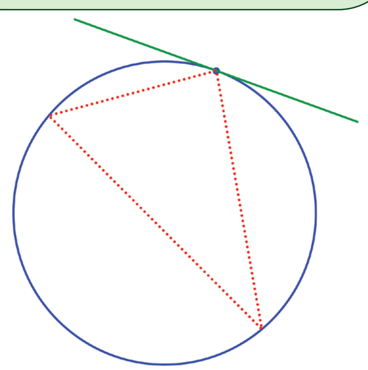
വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ തൊടുവര വരയ്ക്കുന്നത്, ഈ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസത്തിന് ലംബം വരച്ചാണല്ലോ, കേന്ദ്രം അറിയില്ലെങ്കിലും തൊടുവര വരയ്ക്കാൻ, മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന തത്വം ഉപയോഗിക്കാം.

ബിന്ദുവിലൂടെ ഒരു ഞാൺ വരച്ച്, അത് വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ, ഞാണിന്റെ മറുഭാഗത്ത് ഉണ്ടാക്കിയാൽ മതി.

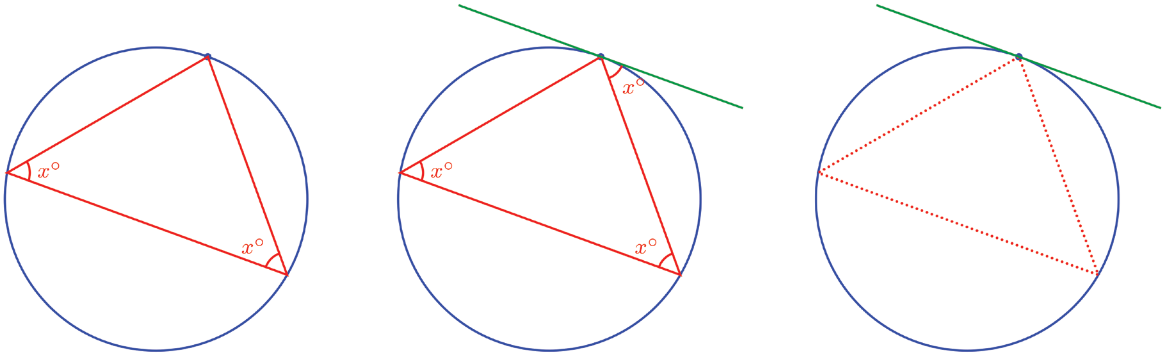
ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. AB എന്ന ഞാൺ വരയ്ക്കുക. A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ തൊടുവരകൾ വരച്ച് തൊടുവരയും ഞാണും തമ്മിലുള്ള കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. വൃത്തത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തി AC, BC ഇവ വരച്ച് $\angle ACB$ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ കോണുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്? A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.



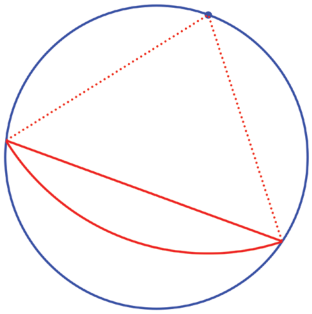




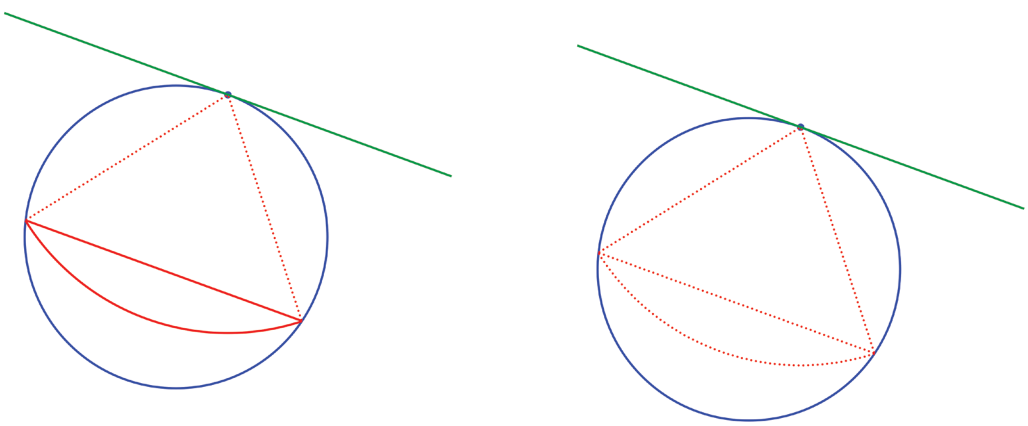
ഇതിലെ ത്രികോണം സമപാർശ്വമായി വരച്ചാൽ, താഴത്തെ വശത്തിന് ബിന്ദുവിലൂടെ സമാന്തരവര വരച്ചാൽ മതിയാകും.



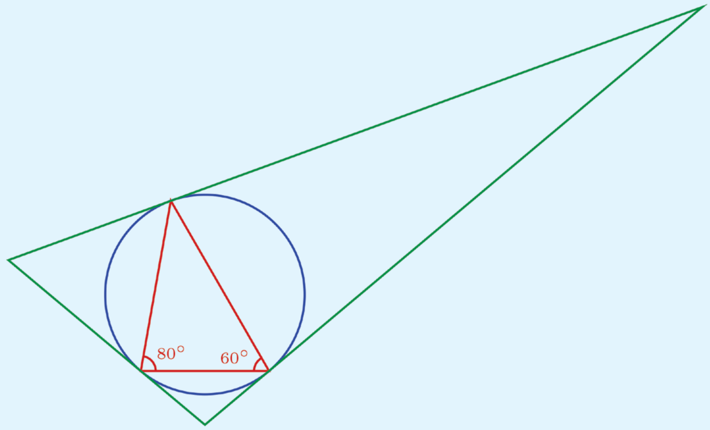
അപ്പോൾ ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവിലൂടെ തൊടുവര വരയ്ക്കാൻ, ആദ്യം ഈ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ഒരു ചാപം വരച്ച്, അത് ആദ്യത്തെ വൃത്തത്തിനെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുക:



ഇനി തൊടുവര വരയ്ക്കേണ്ട ബിന്ദുവിലൂടെ, ഈ വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായ വര വരച്ചാൽ മതി.

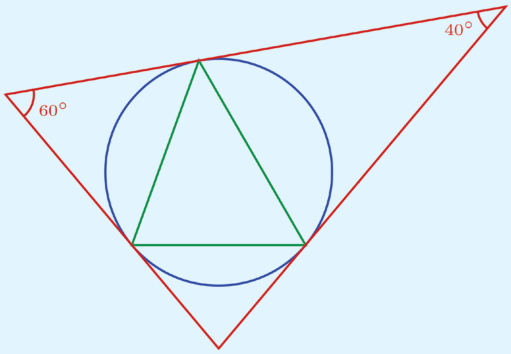


(1) ചിത്രത്തിലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലൂടെ പരിവൃത്തത്തിനു വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകളാണ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ.



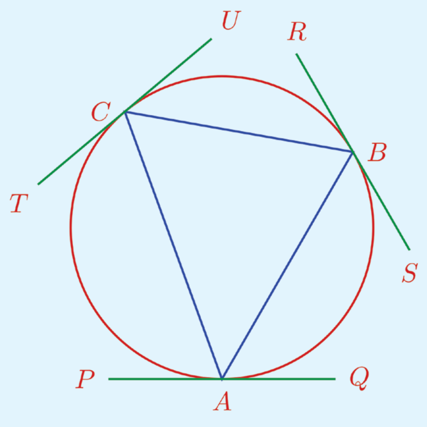
വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.

(2) ചിത്രത്തിലെ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരകളാണ്. അവ വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ.



ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.

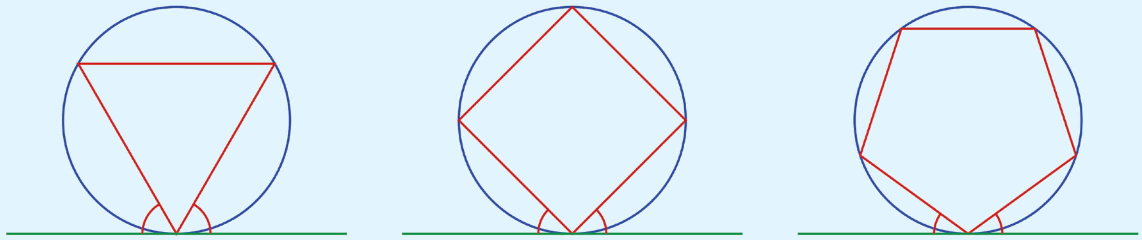
(3) ചിത്രത്തിൽ, *ABC* എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലൂടെ പരിവൃത്തത്തിനു വരച്ച തൊടുവരകളാണ് *PQ*, *RS*, *TU* എന്നീ വരകൾ:



ചിത്രത്തിലെ കോണുകളിൽ തുല്യമായവ തരംതിരിച്ച് എഴുതുക.

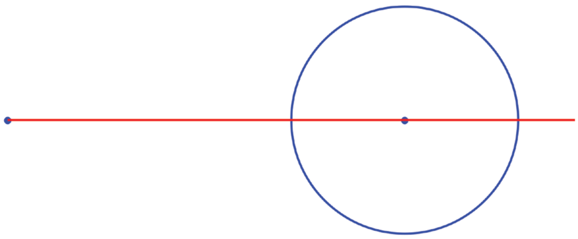
(4) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ ചില സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ ഒരു മൂലയിൽക്കൂടി അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന് തൊടുവര വരച്ചിരിക്കുന്നു.

ഓരോ ചിത്രത്തിലും, തൊടുവരയും തൊടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളും തമ്മിലുള്ള കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.



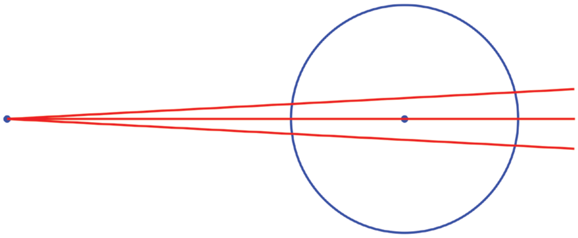
പുറത്തുനിന്നും തൊടുവര

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

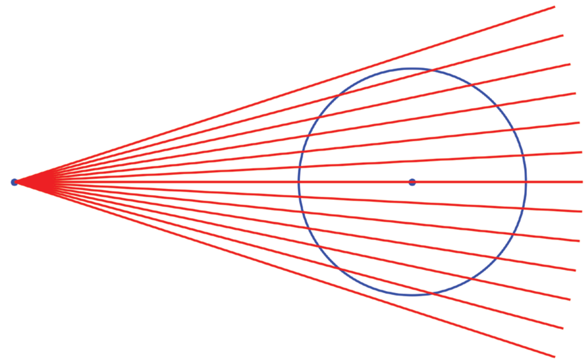


വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവും വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ച് ഒരു വര നീട്ടി വരച്ചിരിക്കുന്നു. അത് വൃത്തത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു; ഈ ബിന്ദുക്കൾ, ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളുമാണ്.

വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഈ ബിന്ദുതന്നെ, വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ കേന്ദ്രത്തിനല്പം മുകളിലോ, താഴെയോ ആയ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചു വരച്ചാലോ ?

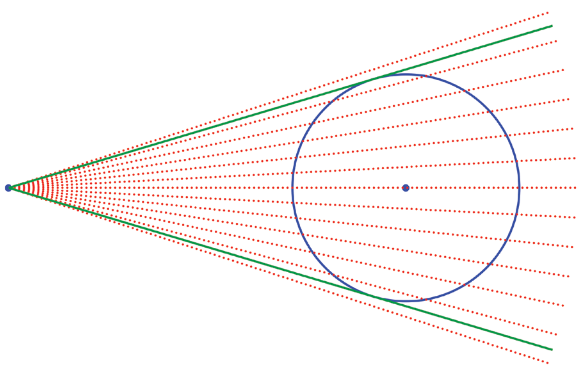


വര വൃത്തത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അല്പം കൂടി അടുത്തു. ഇങ്ങനെ തുടർന്നാലോ ?



അടുത്തടുത്തുവരുന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ വൃത്തത്തെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന വരകൾക്ക്, ഒരു ഘട്ടം കഴിയുമ്പോൾ വൃത്തവുമായി ഒരു ബന്ധവുമില്ലാതാകുന്നു.

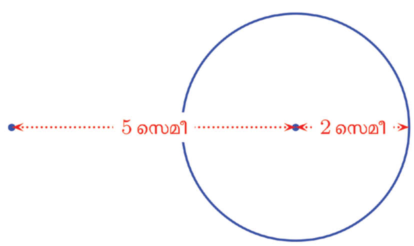
പക്ഷേ അതിനിടയിലെവിടെയോ, മുകളിലും താഴെയുമായി രണ്ടു വരകൾ വൃത്തത്തെ ഒരേ ഒരു ബിന്ദുവിൽ തൊടുക മാത്രം ചെയ്യില്ലേ ?



ഇതിൽനിന്ന് എന്തു മനസ്സിലാക്കാം ?

വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് വൃത്തത്തിലേക്ക് രണ്ടു തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കാം

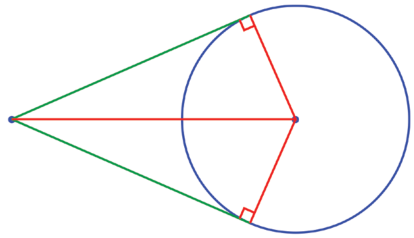
വരയ്ക്കാമെന്നു പറഞ്ഞതല്ലാതെ ഈ തൊടുവരകൾ എങ്ങനെ വരയ്ക്കാമെന്നു പറഞ്ഞില്ലല്ലോ.
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ആരം 2 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് 5 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.

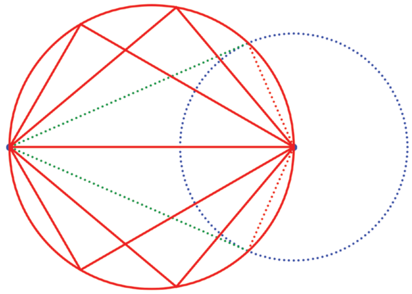
ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിന് രണ്ടു തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

വരച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ എങ്ങനെയിരിക്കുമെന്ന് ആലോചിച്ചാൽ, വരയ്ക്കാനുള്ള വഴി ഒരുപക്ഷേ തെളിഞ്ഞുവരും. തൊടുവരകൾ, തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങൾക്ക് ലംബമാണെന്നത് ഓർക്കുക:



പുറത്തുള്ള ബിന്ദുവിൽനിന്നും, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വരകളാണ് വേണ്ടത്.

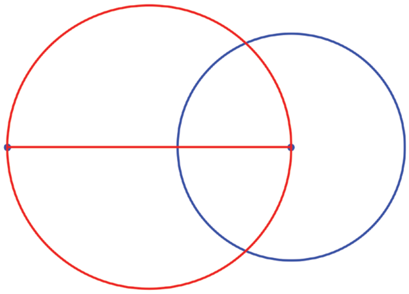
ഇത്തരം വരകൾ വരയ്ക്കാൻ, ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ മതിയല്ലോ.



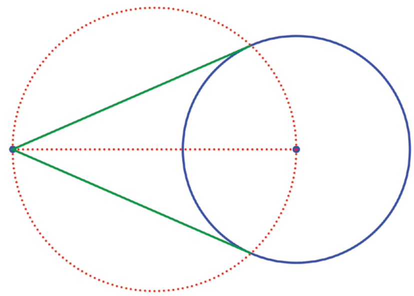
(അർധവൃത്തത്തിലെ കോണുകൾ മട്ടമാണെന്ന് **വൃത്തങ്ങളും കോണുകളും** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടത് ഓർക്കുക).

നമുക്കു വേണ്ട ലംബജോടിയിൽ, ഒരു വര ആദ്യവൃത്തത്തിന്റെ ആരം തന്നെയാകണം; അതായത്, വരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്നത്, ആദ്യവൃത്തത്തിലുമാകണം. അതിന് പഴയ വൃത്തവും പുതിയ വൃത്തവും മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളിലൂടെ വരച്ചാൽപ്പോരേ ?

ഇനി വരയ്ക്കാമല്ലോ. ആദ്യം, പുറത്തെ ബിന്ദുവും വൃത്തകേന്ദ്രവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വ്യാസമായി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.



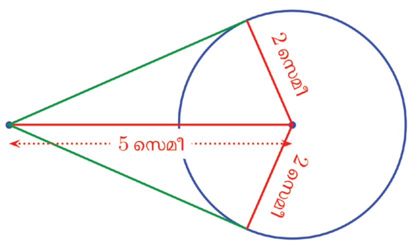
ഈ വൃത്തവും ആദ്യവൃത്തവും മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ, പുറത്തെ ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ നമുക്കു വേണ്ട തൊടുവരകളായി.



(1) ആരം 2.5 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിനിന്ന് 7 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിലേയ്ക്കുള്ള തൊടുവരകളും വരയ്ക്കുക.

(2) ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിനിന്ന് 7.5 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിലേയ്ക്കുള്ള തൊടുവരകളും വരയ്ക്കുക.

നേരത്തെ കണ്ട ഉദാഹരണത്തിൽ, വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 2 സെന്റിമീറ്ററും, പുറത്തെ ബിന്ദു വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് 5 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുമാണല്ലോ.



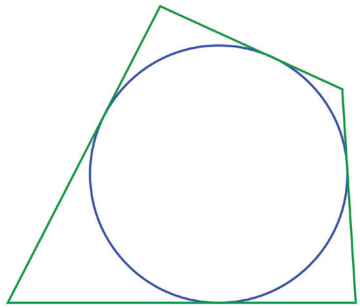
അപ്പോൾ, പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമുപയോഗിച്ച്, തൊടുവരകളുടെ നീളം (പുറത്തെ ബിന്ദു മുതൽ തൊടുന്ന ബിന്ദു വരെയുള്ള നീളം) കണക്കാക്കാം:

$$\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} \text{ സെമീ}$$

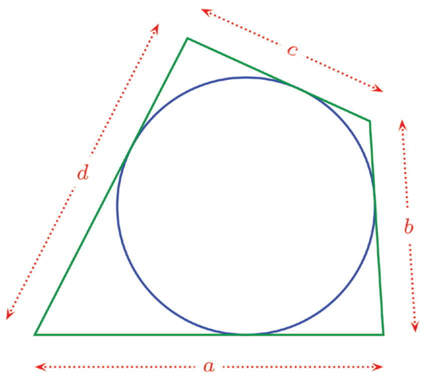
വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെ തൊടുവരകൾ വരച്ചാൽ, തൊടുന്ന ബിന്ദു മുതൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു വരെയുള്ള തൊടുവരയുടെ നീളം തുല്യമാണെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടതാണ് (**തൊടുവരകളും കോണുകളും** എന്ന ഭാഗത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ ചോദ്യം). അത് ഇനി ഇങ്ങനെയും പറയാം:

വൃത്തത്തിനു പുറത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നുള്ള രണ്ടു തൊടുവരകൾക്കും ഒരേ നീളമാണ്

ഇതുപയോഗിച്ചൊരു കണക്കു നോക്കാം. ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു വൃത്തത്തിലെ നാലു ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ വശങ്ങളായി ഒരു ചതുർഭുജം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

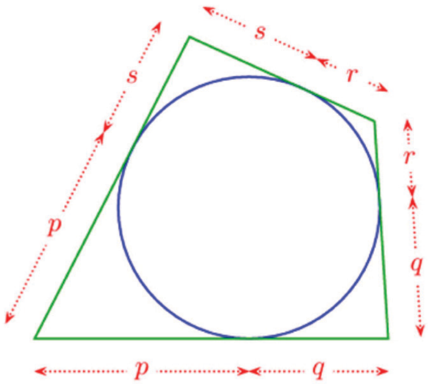


ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം a, b, c, d എന്നെടുക്കാം:



ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ നാലു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ നാലു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും വൃത്തത്തിന് തൊടുവരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കൾ മൂലകളായി വരുന്ന ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. ഇനി തൊടുവരകൾ മറച്ചു വയ്ക്കാം. ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തി അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം നിരീക്ഷിക്കുക. വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

ഓരോ മൂലയിൽ നിന്നുമുള്ള തൊടുവരകളുടെ നീളം, p, q, r, s എന്നെടുത്താൽ, ഈ നീളങ്ങൾ ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താം:



ഈ ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്ന് ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയും തൊടുവരകളുടെയും നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$a = p + q$$
$$b = q + r$$
$$c = r + s$$
$$d = s + p$$

ഇതിൽ നിന്ന് a, b, c, d ഇവ തമ്മിലുള്ള എന്തെങ്കിലും ബന്ധം കാണുന്നുണ്ടോ ?

$$a + c = p + q + r + s$$

$$b + d = q + r + s + p$$

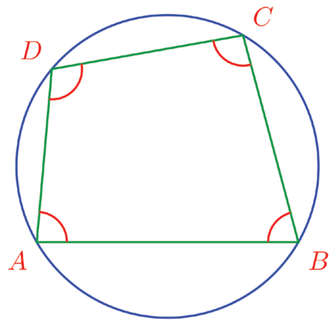
അതായത്,

$$a + c = b + d$$

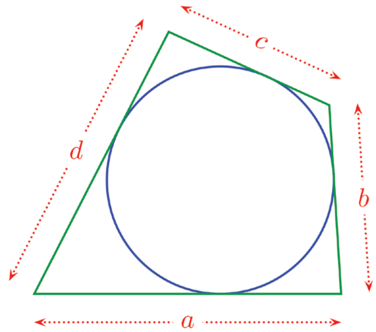
വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളായി പറഞ്ഞാലോ?

ഒരു വൃത്തത്തിലെ നാലു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളുടെ തുക തുല്യമാണ്

വൃത്തത്തിലെ നാലു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു വരയ്ക്കുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഓരോ ജോടി എതിർ കോണുകളുടെയും തുക 180° ആണെന്ന് **വൃത്തങ്ങളും കോണുകളും** എന്ന പാഠഭാഗത്ത് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. അതായത്, എതിർകോണുകളുടെ തുക തുല്യമാണ്.

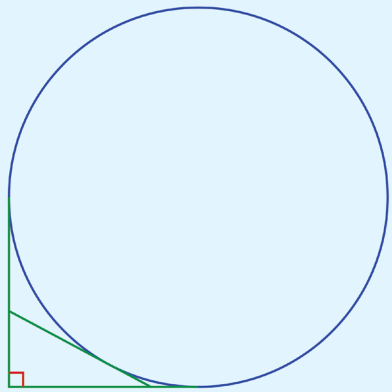


$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$



$a + c = b + d$

(1) ഒരു വൃത്തത്തിലെ പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു തൊടുവരകളും, മറ്റൊരു തൊടുവരയും ചേർന്ന് ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കിയ ചിത്രമാണ് ചുവടെയുള്ളത്.

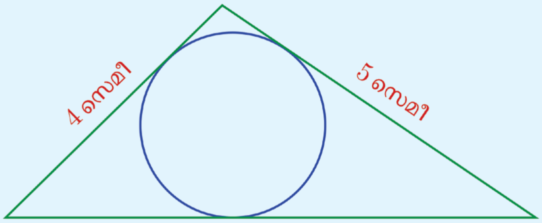


(i) ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, പരസ്പരം ലംബമായ തൊടുവരകളുടെ നീളങ്ങളുടെ തുകയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(ii) പരസ്പരം ലംബമായ തൊടുവരകൾ ഓരോന്നിന്റെയും നീളം, വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

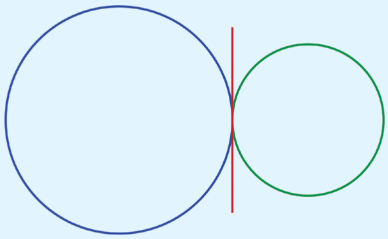
(iii) ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) ഒരു വൃത്തത്തിലെ മൂന്നു തൊടുവരകൾ ചേർന്ന ത്രികോണമാണ് ചുവടെ കാണുന്നത്.

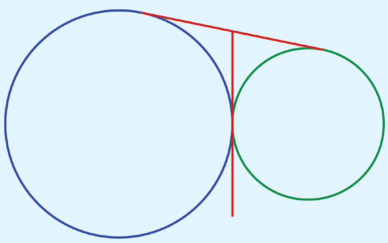


ഓരോ മൂലയിൽനിന്നും തൊടുന്ന ബിന്ദു വരെയുള്ള തൊടുവരകളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക

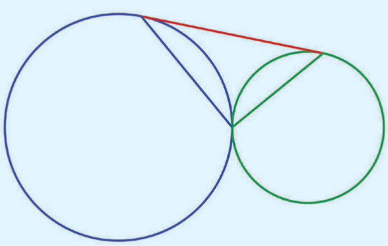
(3) ചിത്രത്തിൽ, ഒരു ബിന്ദുവിൽ തൊടുന്ന രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾക്ക് ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള പൊതുവായ തൊടുവര വരച്ചിരിക്കുന്നു.



(i) ഈ വൃത്തങ്ങൾക്ക് പൊതുവായ മറ്റൊരു തൊടുവരയെ, ആദ്യത്തെ തൊടുവര സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.



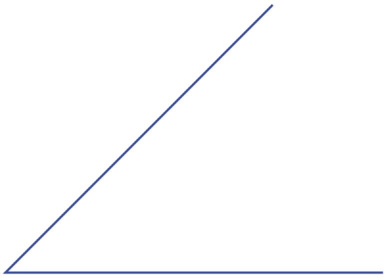
(ii) ഈ രണ്ടു തൊടുവരകളും വൃത്തങ്ങളെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ത്രികോണം മട്ടമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

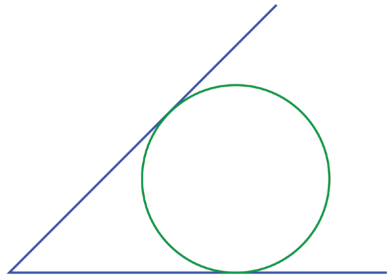


വരയെ തൊടുന്ന വട്ടം

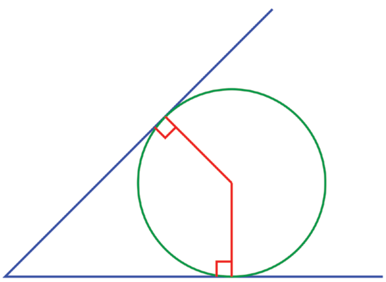
ഒരു വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന രണ്ടു വരകൾ പുറത്തുനിന്നുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു വരയ്ക്കാമെന്നും, എങ്ങനെ വരയ്ക്കണമെന്നും കണ്ടു.

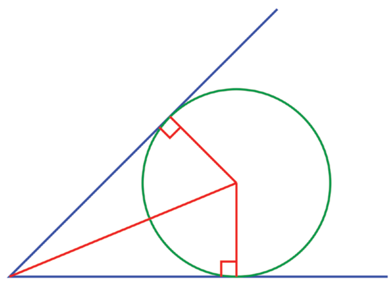
അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യം: ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന രണ്ടു വരകളെ തൊടുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാമോ ? ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



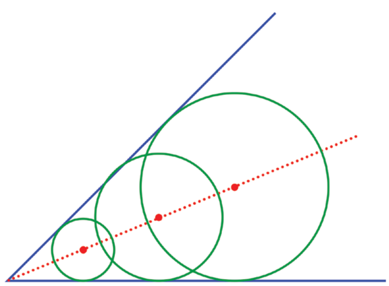


വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഈ വരകളിലേക്കുള്ള ലംബങ്ങൾ, വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങളാണല്ലോ; അതിനാൽ ഈ ലംബങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്. തിരിച്ചു പറഞ്ഞാൽ, ഈ വരകളിൽനിന്ന് ഒരേ ലംബദൂരത്തിലാണ് വൃത്തകേന്ദ്രം. അപ്പോൾ വൃത്തകേന്ദ്രം, ഈ വരകൾ ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന കോണിന്റെ സമഭാജിയിൽ ആയിരിക്കണമല്ലോ (എട്ടാംക്ലാസിലെ **സമഭാജികൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ **കോണിന്റെ സമഭാജി** എന്ന ഭാഗം).

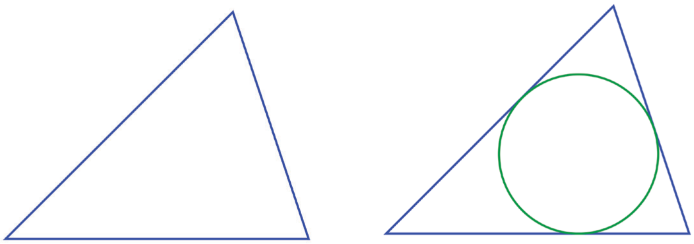




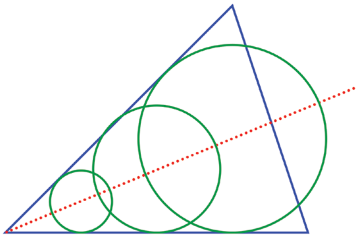
കോണിന്റെ സമഭാജിയിൽ എവിടെ കേന്ദ്രം എടുത്താലും, ഈ രണ്ടു വരകളെയും തൊടുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാം.



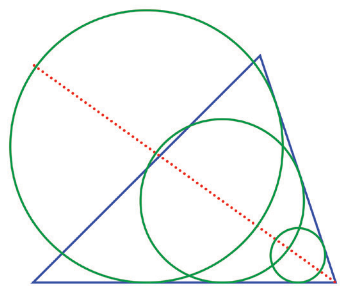
അപ്പോൾ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളെയും തൊടുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ എന്നതാണ് അടുത്ത ചോദ്യം.



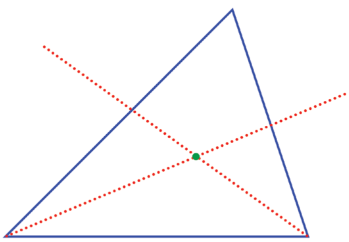
താഴത്തെയും ഇടത്തെയും വശങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണിന്റെ സമഭാജിയിൽ ഏതു ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി എടുത്താലും, ആ രണ്ടു വശങ്ങളെ തൊടുന്ന വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.



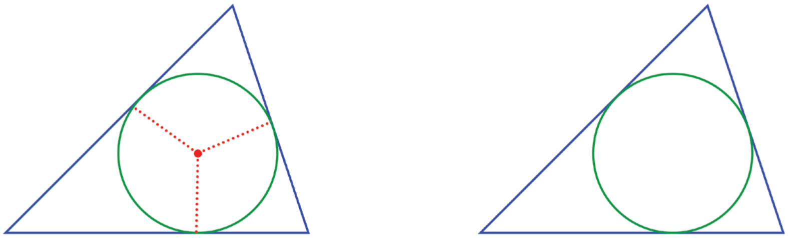
താഴത്തെയും വലത്തെയും വശങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണിന്റെ സമഭാജിയിലെ ബിന്ദുക്കളെടുത്താൽ ആ രണ്ടു വശങ്ങളെ തൊടുന്ന വൃത്തങ്ങളും വരയ്ക്കാം.



അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു സമഭാജികളിലുമുള്ള ബിന്ദു, എടുത്താലോ? അതായത്, അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു.



ഈ ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മൂന്നു വശങ്ങളിലേക്കുമുള്ള ലംബങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമല്ലേ? അപ്പോൾ ഈ നീളം ആരമായി, ഈ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി വൃത്തം വരച്ചാൽ, മൂന്നു വശങ്ങളും ഈ വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരകളാകും:



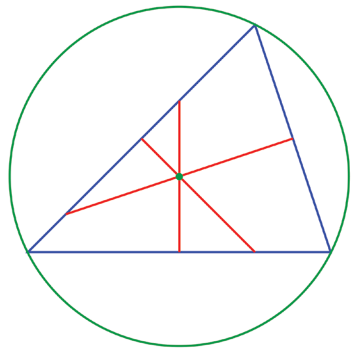
ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു കോണും അതിന്റെ സമഭാജിയും വരയ്ക്കുക. സമഭാജിയിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി ആ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് കോണിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വശത്തേക്കുള്ള ലംബം വരച്ച്, ലംബവും വശവും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. സമഭാജിയിലെ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി, വശത്തിലെ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തം, കോണിന്റെ രണ്ടാമത്തെ വശത്തേയും തൊടുന്നില്ലേ? വൃത്തകേന്ദ്രം സമഭാജിയിലൂടെ മാറ്റി നോക്കൂ.

> ജിയോജിബ്രയിൽ ത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക.

ഇങ്ങനെ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളെയും തൊട്ടു കൊണ്ട് അതിനുള്ളിലുള്ള വൃത്തത്തിന് ത്രികോണത്തിന്റെ **അന്തർവൃത്തം (incircle)** എന്നാണു പേര്.

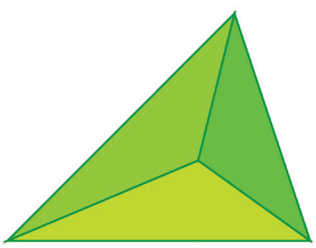
ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി കാണാം. അന്തർവൃത്തം, ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളെയും തൊടുന്നതിനാൽ, അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് മൂന്നു വശങ്ങളിലേക്കുമുള്ള ലംബങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്. അതായത് വൃത്തകേന്ദ്രം, ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു കോണുകളുടെയും സമഭാജി കളിലെ ബിന്ദുവാണ്. മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നു കോണുകളുടെയും സമഭാജികൾ, അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകും. ഈ ബിന്ദുവിനെ **അന്തർവൃത്ത കേന്ദ്രം** (incentre) എന്നു പറയും.

> **ഏതു ത്രികോണത്തിലും, കോണുകളുടെ സമഭാജികളെല്ലാം ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെയാണ് മുറിച്ചു കടക്കുന്നത്**

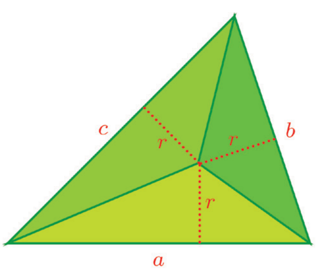


ഏതു ത്രികോണത്തിലെയും വശങ്ങളുടെ ലംബസമഭാജികളെല്ലാം ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെയാണ് മുറിച്ചു കടക്കുന്നത് എന്നും, ഈ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിലൂടെയും കടന്നു പോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാമെന്നും എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർ ക്കുക (**വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **പരിവൃത്തം** എന്ന ഭാഗം).

അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരവും, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവും തമ്മിൽ ബന്ധമുണ്ട്. ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ അന്തർവൃത്ത ത്തിന്റെ കേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ, ത്രികോണത്തെ മൂന്നു ചെറുത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കാമല്ലോ.



ഈ ത്രികോണങ്ങൾ ഓരോന്നിലും ഒരു വശം, ആദ്യ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം തന്നെയാണ്; അതിൽ നിന്നുള്ള ഉയരം അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരവും. അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം a, b, c എന്നും, അന്തർ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നു മെടുത്താൽ, ഈ ത്രികോണ ങ്ങളുടെ പരപ്പളവ്,

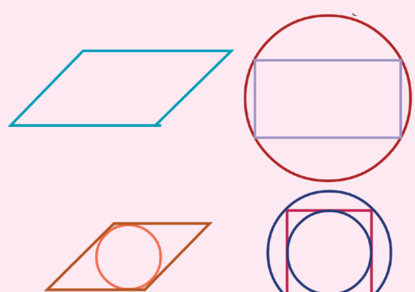


$$\frac{1}{2}ar,\ \frac{1}{2}br,\ \frac{1}{2}cr$$

എന്നിങ്ങനെയാകും.

പരിവൃത്തവും അന്തർവൃത്തവും

ഏതു ത്രികോണത്തിനും പരിവൃത്തവും അന്തർ വൃത്തവും വരയ്ക്കാം. എന്നാൽ ചതുർഭുജങ്ങളെടു ത്താൽ, ചിലതിന് രണ്ടുമുണ്ടാകില്ല, ചിലതിന് ഏതെങ്കിലും ഒന്നു മാത്രം, ചിലതിന് രണ്ടു മുണ്ടാകും.



ഇവയുടെ തുക, മൊത്തം ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവാണ്; അത് A എന്നെടുത്താൽ

$$A = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$

ഇതിലെ $\frac{1}{2}(a+b+c)$ എന്നത്, ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ. ഈ അളവിനെ സാധാരണയായി s എന്നാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നതെന്ന് ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ (**അഭിന്നക ഗുണനം** എന്ന പാഠത്തിലെ **ത്രികോണപരപ്പ്** എന്ന ഭാഗം). അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവും അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$A = sr$$

ഇതുതന്നെ ഇങ്ങനെയും എഴുതാം:

$$r = \frac{A}{s}$$

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതികൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടുന്നതാണ്

ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം a, b, c എന്നെടുത്താൽ, പരപ്പളവ്

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

എന്ന് ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. ഇതിനെ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിയായ s കൊണ്ട് ഹരിച്ചതാണ് അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം; അതായത്

$$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}}$$

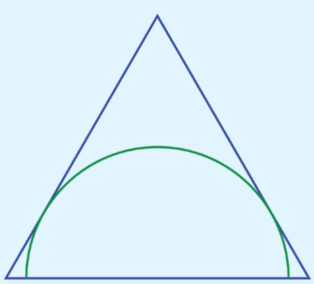
ഇത് ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

(1) വശങ്ങളുടെ നീളം 7 സെന്റിമീറ്റർ, 8 സെന്റിമീറ്റർ, 9 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക.

(2) വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും, ഒരു കോൺ 50° യും ആയ സമഭുജസാമാന്തരികം വരച്ച്, അതിന്റെ അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക.

(3) ഒരു സമഭുജത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളെ തൊടുന്ന ഒരു അർധവൃത്തം ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ വരയ്ക്കുക.



(4) വശങ്ങളുടെ നീളം 12 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം കണക്കാക്കുക.

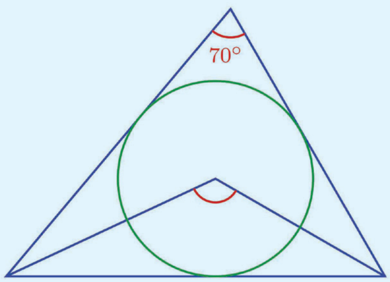
(5) വശങ്ങളുടെ നീളം 13, 14, 15 സെന്റിമീറ്ററായ ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം കണക്കാക്കുക.

(6) ഏതു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെയും അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം, അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ പകുതിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(7) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം h ഉം, അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം r ഉം ആണെങ്കിൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $r(h + r)$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(8) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം a യും b യും, കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം c യും ആണ്. അതിന്റെ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം $\frac{1}{2}(a + b - c)$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(9) ചിത്രത്തിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു മൂലകൾ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.



(i) ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോൺ കണക്കാക്കുക.

(ii) ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഒരു മൂലയിലെ കോണും, മറ്റു രണ്ടു മൂലകൾ അന്തർവൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾക്കിടയിലെ കോണും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ്?

(iii) ഈ രണ്ടു കോണുകളിൽ ഒന്നു മറ്റൊന്നിന്റെ പകുതിയാണെങ്കിൽ, ത്രികോണത്തിലെ കോൺ എത്രയാണ്?

9 ബഹുപദങ്ങളും സമവാക്യങ്ങളും

ഗുണനക്രിയകൾ

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം കണക്കാക്കാൻ പല എളുപ്പവഴികളും കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഈ ഗുണനം മനക്കണക്കായി ചെയ്യാമോ ?

$$38 \times 32$$

38 നെ 30 + 8 എന്നും, 32 നെ 30 + 2 എന്നും എഴുതിയാലോ ?

രണ്ടു തുകകളുടെ ഗുണനഫലത്തെക്കുറിച്ച് ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **ഗുണനസമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ പറഞ്ഞത് ഓർമ്മയുണ്ടോ ?

> തുകയെ തുക കൊണ്ടു ഗുണിക്കാൻ, ആദ്യത്തെ തുകയിലെ ഓരോ സംഖ്യയേയും രണ്ടാമത്തെ തുകയിലെ ഓരോ സംഖ്യകൊണ്ടും ഗുണിച്ച്, ഗുണനഫലങ്ങളെല്ലാം കൂട്ടണം.

ഇതു ചുരുക്കി ബീജഗണിതസമവാക്യമായും എഴുതിയില്ലേ ?

x, y, u, v എന്ന ഏതു നാല് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$(x + y)(u + v) = xu + xv + yu + yv$$

ഇതനുസരിച്ച്,

$$38 \times 32 = (30 + 8) \times (30 + 2)$$
$$= (30 \times 30) + (30 \times 2) + (8 \times 30) + (8 \times 2)$$

ഇതിൽ നടുക്കുള്ള $(30 \times 2) + (8 \times 30)$ എന്നതിനെ ഇങ്ങനെ മാറ്റി എഴുതാമല്ലോ.

$$(30 \times 2) + (8 \times 30) = (30 \times 2) + (30 \times 8)$$
$$= 30 \times (2 + 8)$$
$$= 30 \times 10$$
$$= 300$$

അപ്പോൾ

$$\begin{aligned} 38 \times 32 &= (30 \times 30) + (30 \times 2) + (8 \times 30) + (8 \times 2) \\ &= 900 + 300 + 16 \\ &= 1216 \end{aligned}$$

ഇതുപോലെ 48 × 42 ചെയ്യാമോ ?

$$\begin{aligned} 48 \times 42 &= 40^2 + (40 \times (8 + 2)) + (8 \times 2) \\ &= 1600 + 400 + 16 \\ &= 2016 \end{aligned}$$

78 × 72 ആയാലോ ?

$$78 \times 72 = 4900 + 700 + 16 = 5616$$

ഈ മൂന്നു കണക്കുകളിലും ചെയ്ത ക്രിയകൾ ഒരു പൊതുതത്വമായി എഴുതാമല്ലോ:

x ഏതു എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലും

$$\begin{aligned} (x + 2)(x + 8) &= x^2 + (8 + 2)x + 16 \\ &= x^2 + 10x + 16 \end{aligned}$$

ഇതിൽ 2 നും 8 നും പകരം, മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യകൾ എടുത്താലോ ?

ചുവടെയുള്ള ഓരോ കൂട്ടത്തിലെയും ഗുണനങ്ങൾ മനക്കണക്കായി ചെയ്യുക. ഓരോ കൂട്ടത്തിൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന പൊതുതത്വം ബീജഗണിത സമവാക്യമായി എഴുതുക.

(1) (i) 43 × 47 (ii) 63 × 67 (iii) 103 × 107

(2) (i) 51 × 52 (ii) 81 × 82 (iii) 301 × 302

ബഹുപദഗുണനം

കഴിഞ്ഞ ഭാഗത്ത് ചെയ്ത രണ്ടാമത്തെ കൂട്ടം ഗുണനഫലങ്ങളിൽ നിന്നു കിട്ടുന്ന പൊതുതത്വം എന്താണ് ?

x ഏതു എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലും

$$(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$$

തുകകളുടെ ഗുണനത്തെക്കുറിച്ച് തുടക്കത്തിൽ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, x ആയി എണ്ണൽസംഖ്യയ്ക്കു പകരം ഏത് സംഖ്യ എടുത്താലും ഇതു ശരിയാകുമല്ലോ. അതായത്

x ഏത് സംഖ്യ ആയാലും $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$

ഇതിൽ x ആയി പല സംഖ്യകൾ എടുക്കുമ്പോൾ $x + 1$ ആയും $x + 2$ ആയും $x^2 + 3x + 2$ ആയും പല സംഖ്യകൾ കിട്ടുന്നു; അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമാണ് ഈ സമവാക്യം.

ഈ ബിജഗണിത വാചകങ്ങളെയെല്ലാം ബഹുപദങ്ങളായി കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ മുകളിലെ സമവാക്യത്തിനെ ഇങ്ങനെ കാണാം.

$x + 1$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെയും $x + 2$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം $x^2 + 3x + 2$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദമാണ്.

ഇതുപോലെ ആദ്യത്തെ രണ്ടു ഗുണനഫലങ്ങളിൽ നിന്നു കിട്ടിയ ബീജഗണിത സമവാക്യത്തെ ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി പറയാമോ ?

ഇവിടെ ചെയ്ത കണക്കുകളിൽനിന്നു കിട്ടിയ ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളെല്ലാം നോക്കാം:

- $(x + 2)(x + 8) = x^2 + 10x + 16$
- $(x + 3)(x + 7) = x^2 + 10x + 21$
- $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$

ഇതിലെല്ലാം ഗുണിച്ചു കിട്ടിയ രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിലെ സംഖ്യകൾക്ക്, ഗുണിച്ച ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളിലെ സംഖ്യകളുമായി എന്താണ് ബന്ധം ?

അപ്പോൾ ഇത്തരം ഗുണനങ്ങളെയെല്ലാം ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വിശാലമായ ഒരു പൊതുതത്വം ബീജഗണിത രൂപത്തിൽ എഴുതാമോ ?

x, a, b ഏതു സംഖ്യകളായാലും

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

ബഹുപദങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാലോ ?

$x + a$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെയും $x + b$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം $x^2 + (a + b)x + ab$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദമാണ്

ഇതുപയോഗിച്ച്, $(x + 5)(x + 3)$ എങ്ങനെ എഴുതാം ?

$$(x + 5)(x + 3) = x^2 + 8x + 15$$

തുകകൾ തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലത്തിന്റെ മാത്രമല്ല, തുകയും വ്യത്യാസവും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലത്തിന്റെയും, വ്യത്യാസങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലത്തിന്റെയുമെല്ലാം പൊതുരൂപങ്ങൾ ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **ഗുണനസമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ:

- $(x + y)(u - v) = xu - xv + yu - yv$
- $(x - y)(u - v) = xu - xv - yu + yv$

ഇവ ഉപയോഗിച്ച്, മറ്റു ചില ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലങ്ങൾ എഴുതാം:

- $(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$
- $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$

ഉദാഹരണമായി

$$(x + 4)(x - 1) = x^2 + 3x - 4$$

ഇത് മറ്റൊരു രീതിയിലും കാണാം.

$$x - 1 = x + (-1)$$

എന്നെഴുതാമല്ലോ. അപ്പോൾ

$$(x + 4)(x - 1) = (x + 4)(x + (-1))$$

ഇനി തുകകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ സമവാക്യമായ

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

എന്നതിൽ a ആയി 4 ഉം b ആയി -1 ഉം എടുത്താലോ ?

$$(x + 4)(x + (-1)) = x^2 + (4 + (-1))x + (4 \times (-1))$$

$$= x^2 + 3x - 4$$

അതായത്, നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ

$$(x + 4)(x - 1) = x^2 + 3x - 4$$

എന്നുതന്നെ കിട്ടും.

ഇതുപോലെ $(x - 4)(x - 1)$ എന്ന ഗുണനഫലം രണ്ടു രീതിയിൽ കണക്കാക്കാം.

വ്യത്യാസങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ സമവാക്യമായ

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

എന്നതിൽ a ആയി 4 ഉം b ആയി 1 ഉം എടുത്ത്

$$(x - 4)(x - 1) = x^2 - 5x + 4$$

എന്നെഴുതാം; $x - 4$ എന്ന വ്യത്യാസത്തെ $x + (-4)$ എന്ന തുകയായും $x - 1$ എന്ന വ്യത്യാസത്തെ $x + (-1)$ എന്ന തുകയായും മാറ്റിയെഴുതിയാലോ ?

$$(x - 4)(x - 1) = (x + (-4))(x + (-1))$$

ഇനി ഇതു കണക്കാക്കാൻ തുകകളുടെ ഗുണനഫലമായ

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

എന്നതിൽ $a = -4$ എന്നും $b = -1$ എന്നും എടുത്താൽ മതിയല്ലോ.

$$(x - 4)(x - 1) = (x + (-4))(x + (-1))$$

$$= x^2 + ((-4) + (-1))x + ((-4) \times (-1))$$

$$= x^2 - 5x + 4$$

ചുവടെയുള്ള ഗുണനഫലങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

(i) $(x+2)(x+5)$ (ii) $(x+2)(x-5)$ (iii) $(x-2)(x+5)$ (iv) $(x-2)(x-5)$

ബഹുപദഘടകങ്ങൾ

രണ്ട് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങൾ ഗുണിച്ച് രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദമാക്കുന്ന കുറേ കണക്കുകൾ ചെയ്തല്ലോ. അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യം:

x^2+5x+6 നെ രണ്ട് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാമോ ?

ഇവിടെ ഗുണനഫലം പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ഗുണിക്കുന്ന ബഹുപദങ്ങളാണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്; അതായത്, ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$(x+a)(x+b)=x^2+5x+6$ ആകാൻ, a, b എന്നീ സംഖ്യകൾ എന്താകണം ?

$(x+a)(x+b)$ എന്ന ഗുണനഫലം ഇങ്ങനെ എഴുതാമല്ലോ.

$$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$$

അപ്പോൾ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$x^2+(a+b)x+ab=x^2+5x+6$ ആകാൻ, a, b എന്നീ സംഖ്യകൾ എന്താകണം ?

ഇതിലെ സമവാക്യം ശരിയാകാൻ, $a+b=5$ എന്നും $ab=6$ എന്നും ആയാൽ മതിയല്ലോ. ചോദ്യം അപ്പോൾ ഇങ്ങനെയാകും:

$a+b=5$ ഉം $ab=6$ ഉം ആകാൻ a, b എന്നീ സംഖ്യകൾ എന്താകണം ?

സാധാരണ ഭാഷയിലാക്കിയാൽ, ചോദ്യം ഇതാണ്:

തുക 5 ഉം, ഗുണനഫലം 6 ഉം ആയ രണ്ടു സംഖ്യകൾ എന്താണ് ?

അല്പമൊന്ന് ആലോചിച്ചാൽ, സംഖ്യകൾ 2 ഉം 3 ഉം ആണെന്ന് കിട്ടുമല്ലോ. അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$$

ചോദ്യം അല്പം മാറ്റി ഇങ്ങനെയാക്കിയാലോ ?

x^2-5x+6 നെ രണ്ട് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ ചോദ്യത്തെ പല ഘട്ടങ്ങളിലായി മാറ്റി എഴുതാം:

(i) $(x+a)(x+b)=x^2-5x+6$ ആകാൻ, a, b എന്നീ സംഖ്യകൾ എന്താകണം ?

(ii) $x^2+(a+b)x+ab=x^2-5x+6$ ആകാൻ, a, b എന്നീ സംഖ്യകൾ എന്താകണം ?

ഇതിൽനിന്ന് $a + b$, ab ഇവയെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം ?

അപ്പോൾ ചിന്തകൾ ഇങ്ങനെ തുടരാം:

(iii) $a + b = -5$ ഉം $ab = 6$ ഉം ആകാൻ a, b എന്നീ സംഖ്യകൾ എന്താകണം ?

(iv) തുക -5 ഉം, ഗുണനഫലം 6 ഉം ആയ രണ്ടു സംഖ്യകൾ എന്താണ് ?

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ഗുണനഫലം 6 ആയ രണ്ടു സംഖ്യകൾ 2ഉം 3ഉം എടുത്താൽ, തുക -5 ആകില്ലല്ലോ.

6 നെ ന്യൂനസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുന്നതെങ്ങനെ ?

$$6 = (-2) \times (-3)$$

(ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമയവും വേഗവും** എന്ന ഭാഗം)

മാത്രവുമല്ല,

$$(-2) + (-3) = -2 - 3 = -5$$

(ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **സ്ഥാനവും സംഖ്യയും** എന്ന ഭാഗം)

അപ്പോൾ നമ്മുടെ അവസാനത്തെ ചോദ്യത്തിലെ സംഖ്യകൾ, -2 ഉം -3 ഉം.

തുടങ്ങിയ ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരം

$$x^2 - 5x + 6 = (x + (-2))(x + (-3))$$
$$= (x - 2)(x - 3)$$

ഇനി ചോദ്യത്തിലെ ബഹുപദം ഇങ്ങനെ മാറ്റിയാലോ ?

$x^2 + 5x - 6$ നെ രണ്ട് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

ചോദ്യം ക്രമേണ മാറ്റുന്നത് എങ്ങനെയാണ് ?

(i) $(x + a)(x + b) = x^2 + 5x - 6$ ആകാൻ a, b എന്നീ സംഖ്യകൾ എന്താകണം ?

(ii) $x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + 5x - 6$ ആകാൻ a, b എന്നീ സംഖ്യകൾ എന്താകണം ?

(iii) $a + b = 5$ ഉം $ab = -6$ ഉം ആകാൻ a, b എന്നീ സംഖ്യകൾ എന്താകണം ?

(iv) തുക 5 ഉം, ഗുണനഫലം -6 ഉം ആയ രണ്ടു സംഖ്യകൾ എന്താണ് ?

ഇനി $-6 = (-2) \times 3$ എന്നോ $-6 = 2 \times (-3)$ എന്നോ എഴുതിയാൽ ഗുണിച്ച സംഖ്യകളുടെ തുക -5 ആകില്ലല്ലോ.

അപ്പോൾ 6 നെ മറ്റു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതണം.

$6 = 1 \times 6$ എന്നതിൽ നിന്ന്

$$-6 = (-1) \times 6$$

$$-6 = 1 \times (-6)$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാമല്ലോ. ഇവയിൽ ആദ്യത്തേത് എടുത്താൽ, ഗുണിച്ച സംഖ്യകളുടെ തുക 5 ഉം ആകും. അതായത്, മുകളിലെ നാലാമത്തെ ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരം 6 ഉം -1 ഉം ആണ്; ബഹുപദത്തെക്കുറിച്ചുള്ള പ്രശ്നത്തിന്റെ ഉത്തരം.

$$x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$$

ഇനി ഏറെയൊന്നും ആലോചിക്കാതെ ഈ ചോദ്യത്തിനും ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

$x^2 - 5x - 6$ നെ രണ്ട് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

$$x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$$

ഏകീകരണം

$x^2 + 5x + 6$ എന്ന ബഹുപദമായാലും $x^2 - 5x + 6$ എന്ന ബഹുപദമായാലും, ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങൾ കണക്കാക്കാൻ, ബഹുപദത്തെ

$$(x + a)(x + b)$$

എന്ന ഒരേ രൂപത്തിൽ എഴുതി, a യും b യും കണക്കാക്കുകയാണല്ലോ ചെയ്തത്.

ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ, $a = 2$ എന്നും, $b = 3$ എന്നും രണ്ടും അധിസംഖ്യകളായി കിട്ടി.

രണ്ടാമത്തെ കണക്കിൽ, $a = -2$ എന്നും, $b = -3$ എന്നും രണ്ടും ന്യൂനസംഖ്യകളായി കിട്ടി.

മൂന്നാമത്തെ കണക്കിൽ, $a = 6$ എന്ന അധിസംഖ്യയായും, $b = -1$ എന്ന ന്യൂനസംഖ്യയായും കിട്ടി. നാലാമത്തെ കണക്കിൽ $a = -6$ എന്ന ന്യൂനസംഖ്യയായും; $b = 1$ എന്ന അധിസംഖ്യയായും കിട്ടി. ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, ഒരു രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ ഒന്നാം കൃതി ഘടകങ്ങൾ കണക്കാക്കാൻ,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

എന്ന ഒരേയൊരു സർവസമവാക്യം മാത്രം ഉപയോഗിച്ചാൽ മതി. ന്യൂനസംഖ്യകളും കൂടി ഉപയോഗിക്കുന്നതുകൊണ്ടാണല്ലോ ഈ സൗകര്യം.

ചുവടെയുള്ള രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെ രണ്ട് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതിനോക്കൂ:

(i) $x^2 + x - 6$ (ii) $x^2 - x - 6$ (iii) $x^2 + 7x + 6$ (iv) $x^2 - 7x + 6$

ഈ കണക്കുകളിലെല്ലാം ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളിലെ സംഖ്യകൾ മനക്കണക്കായിത്തന്നെ കണ്ടുപിടിച്ചു. എല്ലാ കണക്കുകളിലും ഇതു സാധിക്കണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

$x^2 + 27x + 180$ നെ രണ്ട് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

ഇതു ചെയ്യാൻ ആദ്യം

$$(x + a)(x + b) = x^2 + 27x + 180$$

എന്നെഴുതാം. അതായത്,

$$x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + 27x + 180$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$a + b = 27$$

$$ab = 180$$

എന്നു കിട്ടും.

ഇതുവരെയുള്ള കണക്കുകളിൽ ചെയ്തതുപോലെ, 180 നെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി പലതരത്തിൽ എഴുതി, അവയിൽ ഏതു ജോടിയുടെ തുകയാണ് 27 എന്നു കണക്കാക്കുക അത്ര എളുപ്പമല്ലല്ലോ. മറ്റൊരു വഴി നോക്കാം.

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയും ഗുണനഫലവും അറിയാം. തുകയും വ്യത്യാസവുമാണ് അറിയാവുന്നത് എങ്കിൽ സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ (ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ **സമവാക്യജോടികൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **രണ്ടു സമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ അവസാനം).

എങ്ങനെയാണ് ഇതു ചെയ്തത് ?

തുകയുടെ വർഗവും, ഗുണനഫലവും ഉപയോഗിച്ച് വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗം കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (**വർഗസമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വ്യത്യാസ വർഗം** എന്ന ഭാഗം).

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$

ഇത് ഇവിടെ ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= 27^2 - (4 \times 180)\\ &= (400 + 280 + 49) - (72 \times 10)\\ &= 729 - 720\\ &= 9\end{aligned}$$

അപ്പോൾ $a - b$ ഏതൊക്കെ സംഖ്യകളാകാം ?

$$a - b = 3 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } a - b = -3$$

ഇതിൽ $a - b = 3$ എന്നതെടുത്താൽ

$$\begin{aligned}a + b &= 27\\ a - b &= 3\end{aligned}$$

എന്നു കിട്ടും. ഇതിൽ നിന്ന്

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2}(27+3) = \frac{1}{2} \times 30 = 15\\ b &= \frac{1}{2}(27-3) = \frac{1}{2} \times 24 = 12\end{aligned}$$

എന്നും കിട്ടും.

$a - b = -3$ എന്നെടുത്താൽ

$$\begin{aligned}a + b &= 27\\ a - b &= -3\end{aligned}$$

എന്നാകും. ഇതിൽനിന്ന്

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2}(27-3) = \frac{1}{2} \times 24 = 12\\ b &= \frac{1}{2}(27+3) = \frac{1}{2} \times 30 = 15\end{aligned}$$

എന്നും കിട്ടും.

എങ്ങനെയായാലും ഇവ ഉപയോഗിച്ച്

$$x^2 + 27x + 180 = (x + 12)(x + 15)$$

എന്നെഴുതാം.

പൊതുവേ $p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിനെ $q(x)$, $r(x)$ എന്നീ ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി $p(x) = q(x)r(x)$ എന്ന് എഴുതാൻ കഴിഞ്ഞാൽ $q(x)$, $r(x)$ എന്നീ ബഹുപദങ്ങളെ $p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ എന്നാണ് പറയുന്നത് (എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ കാര്യത്തിലും ഘടകങ്ങൾ എന്നതിന്റെ അർഥം ഇതുപോലെതന്നെയാണല്ലോ; ഉദാഹരണമായി $10 = 2 \times 5$ ആയതിനാൽ 2 ഉം 5 ഉം 10 ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് എന്നു പറയുന്നു).

അപ്പോൾ ഇവിടെ ചെയ്ത കണക്കുകളിലെല്ലാം ചില രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെ ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുകയാണ് ചെയ്തത്.

ചുവടെയുള്ള ബഹുപദങ്ങളെ രണ്ട് ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

(i) $x^2 + 30x + 221$ (ii) $x^2 + 4x - 221$ (iii) $x^2 + x - 156$

ഘടകങ്ങളും പരിഹാരങ്ങളും

രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ എന്ന പാഠത്തിലെ **രണ്ട് ഉത്തരം** എന്ന ഭാഗത്ത് ചെയ്ത ഒരു കണക്ക് വീണ്ടും നോക്കാം:

$x^2 - 4x + 3 = 0$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം ?

എങ്ങനെയാണ് ഇതു ചെയ്തത് ?

(i) $x^2 - 4x + 3 = 0$

(ii) $x^2 - 4x + 4 = 1$

(iii) $(x - 2)^2 = 1$

(iv) $x - 2 = 1$ അല്ലെങ്കിൽ $x - 2 = -1$

(v) $x = 3$ അല്ലെങ്കിൽ $x = 1$

ഇത് മറ്റൊരു വിധത്തിൽ ചെയ്യാം. അതിന് ആദ്യം ചോദ്യത്തിലെ $x^2 - 4x + 3$ എന്ന ബഹുപദത്തിനെ ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനമായി എഴുതണം.

മനക്കണക്കായിത്തന്നെ ചെയ്യാമല്ലോ:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$(x-1)(x-3)=0$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം ?

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം പൂജ്യമാകണമെങ്കിൽ, അവയിൽ ഒന്നെങ്കിലും പൂജ്യമാകണമല്ലോ. അപ്പോൾ $(x-1)(x-3)=0$ ആകണമെങ്കിൽ ഒന്നുകിൽ $x-1=0$ ആകണം, അല്ലെങ്കിൽ $x-3=0$ ആകണം.

അതായത് $x=1$ ആകണം, അല്ലെങ്കിൽ $x=3$ ആകണം.

ഈ രീതി ഇങ്ങനെ ചുരുക്കി എഴുതാം.

(i) $x^2-4x+3=0$

(ii) $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

(iii) $(x-1)(x-3)=0$

(iv) $x-1=0$ അല്ലെങ്കിൽ $x-3=0$

(v) $x=1$ അല്ലെങ്കിൽ $x=3$

കണക്കല്പം മാറ്റി ഇങ്ങനെയാക്കിയാലോ ?

$x^2-5x+6=0$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം ?

കഴിഞ്ഞ കണക്കിലെപ്പോലെ ഇതു കണ്ടുപിടിക്കാൻ ആദ്യം എന്തു ചെയ്യണം ?

x^2-5x+6 നെ ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുന്നത് എങ്ങനെയാണ് ?

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

ഇനി ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി എങ്ങനെ എഴുതാം ?

(i) $x^2-5x+6=0$

(ii) $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

(iii) $(x-2)(x-3)=0$

(iv) $x-2=0$ അല്ലെങ്കിൽ $x-3=0$

(v) $x=2$ അല്ലെങ്കിൽ $x=3$

ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ, $x^2-4x+3=0$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ, 1, 3 എന്നു കണക്കാക്കുയാണല്ലോ ചെയ്തത്; രണ്ടാമത്തെ കണക്കിൽ, $x^2-5x+6=0$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ, 2, 3 എന്നും.

അപ്പോൾ ഏതു രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യവും നേരത്തെ വർഗം തികച്ചു പരിഹരിച്ചതിനു പകരം, ഇപ്പോൾ ചെയ്തതുപോലെ, ബഹുപദത്തെ ഘടകക്രിയ ചെയ്തും കണക്കാക്കാം.

ഉദാഹരണമായി ഈ കണക്കു നോക്കുക:

> ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം മറ്റൊരു വശത്തേക്കാൾ 3 മീറ്റർ കൂടുതലാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ്, 270 ചതുരശ്രമീറ്ററും. ഈ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തൊക്കെയാണ്?

ചതുരത്തിന്റെ ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, വലിയ വശത്തിന്റെ നീളം $x + 3$ മീറ്റർ; പരപ്പളവ്

$$x(x + 3) = x^2 + 3x \text{ ചതുരശ്രമീറ്റർ}$$

അപ്പോൾ ചോദ്യം ഇങ്ങനെ ബീജഗണിതരൂപത്തിലാക്കാം:

$x^2 + 3x = 270$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം?

ഇത് നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ വർഗം തികച്ച് ചെയ്യണമെങ്കിൽ, സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുവശത്തും $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ കൂട്ടുകയും മറ്റും വേണം.

പകരം ഘടകരീതി ശ്രമിക്കാം. ഇതിന് ആദ്യം ചോദ്യം അല്പം മാറ്റി എഴുതാം:

$x^2 + 3x - 270 = 0$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം?

ഇനി $x^2 + 3x - 270$ നെ ഘടകങ്ങളാക്കണം

$$x^2 + 3x - 270 = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

എന്നെഴുതിയാൽ, ഇതിൽ നിന്ന് $a + b$ യും ab യും കിട്ടും.

$$a + b = 3$$

$$ab = -270$$

ഇതിൽനിന്ന് $a - b$ കണക്കാക്കാമല്ലോ.

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 9 - (4 \times (-270)) = 9 - (-1080) = 9 + 1080 = 1089$$

ഇനി $a - b$ കണ്ടുപിടിക്കാൻ 1089 ന്റെ വർഗമൂലം കണക്കാക്കണം. ഘടകങ്ങളാക്കി വർഗമൂലം കണക്കാക്കുന്ന രീതി ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (**സമചതുരങ്ങളും മട്ടത്രികോണങ്ങളും** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമചതുരപ്പരപ്പ്** എന്ന ഭാഗം).

1089 ന്റെ അക്കങ്ങളുടെ തുക 18 ആയതിനാൽ, 1089 എന്ന സംഖ്യ 9 ന്റെ ഗുണിതമാണ് (ആറാം ക്ലാസിലെ **സംഖ്യാബന്ധങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **അക്കങ്ങളുടെ തുക** എന്ന ഭാഗം).

$1089 \div 9$ എങ്ങനെ കണക്കാക്കാമെന്ന് അഞ്ചാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ?

	9	
	1089−	
100	900	$9 \times 100 = 900$
	189−	
20	180	$9 \times 20 = 180$
	9−	
1	9	$9 \times 1 = 9$
$1089 \div 9 = 121$	0	$9 \times 121 = 1089$

അപ്പോൾ

$$1089 = 9 \times 121$$

ഇത് ഇങ്ങനെ എഴുതാമല്ലോ.

$$1089 = 3^2 \times 11^2 = (3 \times 11)^2 = 33^2$$

(ഏഴാംക്ലാസിലെ ആവർത്തനഗുണനം എന്ന പാഠത്തിലെ മടങ്ങും കൃതിയും എന്ന ഭാഗം).

$(a - b)^2 = 33^2$ എന്നതിൽ നിന്ന് $a - b$ യെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം ?

$a - b = 33$ അല്ലെങ്കിൽ $a - b = -33$

$a - b = 33$ എന്നെടുത്താൽ,

$$a + b = 3$$
$$a - b = 33$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽനിന്ന്

$$a = \frac{1}{2}(3 + 33) = \frac{1}{2} \times 36 = 18$$
$$b = \frac{1}{2}(3 - 33) = \frac{1}{2} \times (-30) = -15$$

എന്നും കണക്കാക്കാം

അതായത്

$$x^2 + 3x - 270 = (x - 15)(x + 18)$$

അപ്പോൾ നമ്മുടെ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയായി.

$(x - 15)(x + 18) = 0$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം ?

നേരത്തെ പല കണക്കുകളിൽ കണ്ടതുപോലെ, ഇതിന്റെ ഉത്തരം $x = 15$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -18$ എന്നാണല്ലോ.

നമ്മുടെ കണക്കിൽ x എന്നത് ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളമായതിനാൽ ന്യൂനസംഖ്യ അല്ല. അപ്പോൾ ഈ കണക്കിൽ ചതുരത്തിന്റെ ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം 15 മീറ്റർ.

വലിയ വശത്തിന്റെ നീളം $15 + 3 = 18$ മീറ്റർ.

ഈ കണക്കിൽ, $a - b = 33$ എന്നതിനു പകരം $a - b = -33$ എന്നെടുത്താൽ എന്തു കിട്ടുമെന്ന് ചെയ്തുനോക്കുക.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

ഒരു സംഖ്യയോട് ഒന്നു കൂട്ടിയപ്പോൾ ആ സംഖ്യയുടെ വർഗം കിട്ടി. സംഖ്യ എന്താണ്?

സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ, ചോദ്യത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$x + 1 = x^2$ ആകണമെങ്കിൽ, x എന്താകണം?

$x + 1 = x^2$ ആകണമെങ്കിൽ, $x^2 - (x + 1) = 0$ ആകണമല്ലോ. ഇതിൽ

$$x^2 - (x + 1) = x^2 - x - 1$$

(തുക കുറയ്ക്കുന്നതിനു പകരം ഒന്നൊന്നായി കുറയ്ക്കാം എന്ന് ഏഴാംക്ലാസിലെ **കണക്കിലെ ചുരുക്കെഴുത്ത്** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഒന്നൊന്നായും മൊത്തമായും** എന്ന ഭാഗത്ത് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ).

അപ്പോൾ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$x^2 - x - 1 = 0$ ആകണമെങ്കിൽ, x എന്താകണം?

ഇനി $x^2 - x - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തെ ഘടകങ്ങളാക്കാം:

$$x^2 - x - 1 = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

എന്നെഴുതിയാൽ,

$$a + b = -1$$
$$ab = -1$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽനിന്ന്

$$\begin{aligned}(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab &= (-1)^2 - (4 \times (-1)) \\ &= 1 - (-4) = 1 + 4 = 5\end{aligned}$$

എന്നും കിട്ടും. അപ്പോൾ

$a - b = \sqrt{5}$ അല്ലെങ്കിൽ $a - b = -\sqrt{5}$

$a - b = \sqrt{5}$ എന്നെടുത്താൽ

$$a + b = -1$$
$$a - b = \sqrt{5}$$

എന്നു കിട്ടും. ഇനി a യും b യും കണക്കാക്കാം:

$$a = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$
$$b = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{5}\right) = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

അതായത്

$$x^2 - x - 1 = \left(x + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)$$

അപ്പോൾ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$\left(x + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right) = 0$ ആകണമെങ്കിൽ, x എന്താകണം?

തിരിച്ചും മറിച്ചും

$p(x)$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തെ രണ്ട് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി

$$p(x) = (x + a)(x + b)$$

എന്നെഴുതി a യും b യും കണക്കാക്കുകയാണല്ലോ ചെയ്യുന്നത്.

ഇത്തരം കണക്കുകളിൽ ആദ്യം കിട്ടുന്നത് $a + b$ യും, തുടർന്ന് $(a - b)^2$ ഉം ആണ്. അവ

$$a + b = h$$
$$(a - b)^2 = k^2$$

എന്നാണെങ്കിൽ, $a - b$ ആയി k അല്ലെങ്കിൽ $-k$ എന്നെടുക്കാം.

$a - b = k$ എന്നെടുത്താൽ a, b ഇങ്ങനെ കിട്ടും:

$$a = \frac{1}{2}(h + k)$$
$$b = \frac{1}{2}(h - k)$$

$a - b = -k$ എന്നെടുത്താലോ?

$$a = \frac{1}{2}(h - k)$$
$$b = \frac{1}{2}(h + k)$$

അതായത്, a, b എന്നീ സംഖ്യകൾ പരസ്പരം മാറും. ഏതായാലും ഘടകങ്ങൾ മാറുന്നില്ല.

ഇതിന്റെ ഉത്തരം

$$x = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

അതായത്, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ എന്ന അധിസംഖ്യയുടെയും $-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ എന്ന ന്യൂനസംഖ്യയുടെയും സവിശേഷത, ഈ രണ്ട് സംഖ്യകളിൽ ഏതിനോടും 1 കൂട്ടിയാൽ, ആ സംഖ്യയുടെ വർഗം കിട്ടും എന്നതാണ്.

(1) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം മറ്റൊരു വശത്തേക്കാൾ 2 മീറ്റർ കൂടുതലാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് 48 ചതുരശ്രമീറ്ററും. ഈ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിലെ ഒരു വശത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങിൽനിന്ന് ഒരു സെന്റിമീറ്റർ കുറച്ചതാണ് അതിനു ലംബമായ വശം; രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒരു സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയതാണ് കർണ്ണം. വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തൊക്കെയാണ് ?

(3) 1 മുതലുള്ള തുടർച്ചയായ എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ എത്ര വരെ കൂട്ടിയാലാണ് 300 കിട്ടുക?

(4) $x^2 - 2x - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രം, x അക്ഷത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഏതൊക്കെയാണ് ?

പൊതുപരിഹാരം

ഈ കണക്കു നോക്കുക.

$2x^2 + 3x - 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രം, x അക്ഷത്തിനെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഏതൊക്കെയാണ് ?

ചോദ്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \text{ ആകണമെങ്കിൽ } x \text{ എന്താകണം ?}$$

ഇതുവരെ ചെയ്ത ഇതുപോലെയുള്ള കണക്കുകളുമായി ഇതിന് ഒരു വ്യത്യാസമുണ്ട്. നേരത്തെയുള്ള കണക്കുകളിലെല്ലാം x^2 മാത്രമായിരുന്നു; ഇതിൽ $2x^2$ ആണ്.

അപ്പോൾ ആദ്യം $2x^2 + 3x - 2$ നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right)$$

ഇതിൽ നിന്ന് $x^2 + \frac{3}{2}x - 1$ പൂജ്യമാകുന്ന ഏത് x എടുത്താലും, ഈ ബഹുപദത്തിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങായ $2x^2 + 3x - 2$ ഉം പൂജ്യം തന്നെ ആയിരിക്കുമെന്നു കാണാമല്ലോ; മറിച്ച് $2x^2 + 3x - 2$ പൂജ്യം ആകുന്ന ഏത് x എടുത്താലും, ഈ ബഹുപദത്തിന്റെ പകുതിയായ $x^2 + \frac{3}{2}x - 1$ ഉം പൂജ്യം തന്നെ ആയിരിക്കുമെന്നും കാണാം.

അപ്പോൾ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം ?

ഇനി നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ഘടകരീതിയിൽ x കണക്കാക്കാം.

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

എന്നെഴുതിയാൽ

$$a + b = \frac{3}{2}$$

$$ab = -1$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = \frac{9}{4} - (4 \times (-1)) = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$$

എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ

$$a - b = \frac{5}{2}$$ അല്ലെങ്കിൽ $a - b = -\frac{5}{2}$

$a - b = \frac{5}{2}$ എന്നെടുത്താൽ

$$a + b = \frac{3}{2}$$

$$a - b = \frac{5}{2}$$

എന്നും അതിൽനിന്ന്

$$a = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$b = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \times (-1) = -\frac{1}{2}$$

എന്നും കിട്ടും. അതായത്

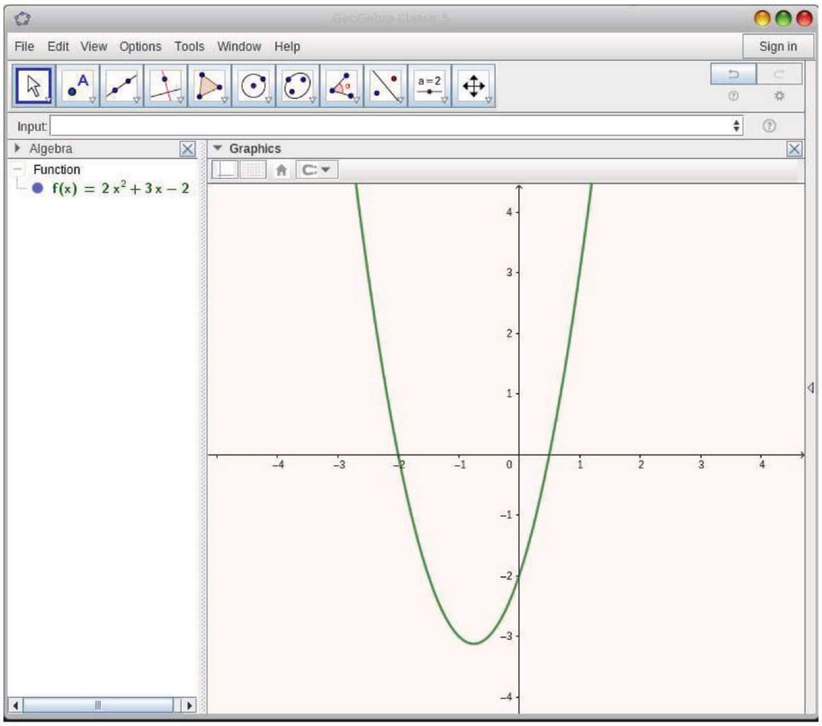
$$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = (x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

അപ്പോൾ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$$(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം ?

ഇതിന്റെ ഉത്തരം $x = -2$ അല്ലെങ്കിൽ $x = \frac{1}{2}$.

അതായത്, $2x^2 + 3x - 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രം x-അക്ഷത്തെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ $(-2, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ഇവയാണ്.



ഇനി ഈ രീതി പൊതുവായി നോക്കാം:

ഏതു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിനെയും $ax^2 + bx + c$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഏത് രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിനെയും ഈ രൂപത്തിലാക്കാം:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ഇത്തരമൊരു സമവാക്യം പരിഹരിക്കാനുള്ള മാർഗം പല ഘട്ടങ്ങളായി ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

(1) സമവാക്യം ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതുക: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

(2) ഇതിലെ ബഹുപദത്തിനെ ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

(i) ഈ ഘടകങ്ങൾ $x + p$ എന്നും $x + q$ എന്നും എടുത്താൽ

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq$$

(ii) ഇതിൽനിന്ന് $p + q = \frac{b}{a}$ എന്നും $pq = \frac{c}{a}$ എന്നും കിട്ടും.

(iii) $(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq$ എന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് $p - q$ കണക്കാക്കുക.

(iv) നേരത്തെ കണ്ടുപിടിച്ച $p + q$ യും $p - q$ ആയി കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നും ഉപയോഗിച്ച് p, q ഇവ കണക്കാക്കുക.

(3) അപ്പോൾ പരിഹരിക്കേണ്ട സമവാക്യം ഇങ്ങനെയെഴുതാം : $(x + p)(x + q) = 0$

(4) ഇതിന്റെ ഉത്തരം $x = -p$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -q$

ഇനി $p - q$ യും തുടർന്ന് p, q ഇവയും കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം:

$$(p-q)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$= \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4ac}{a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$$

$$p - q = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } p - q = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

$p - q$ ആയി ഇതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നെടുത്ത് p, q കണക്കാക്കാം:

$$p + q = \frac{b}{a} \qquad p - q = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{b + \sqrt{b^2-4ac}}{a} = \frac{b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$q = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{b - \sqrt{b^2-4ac}}{a} = \frac{b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

അപ്പോൾ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ

$$x = -\frac{b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x = -\frac{b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ഇത് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യുക എന്നതു ചുരുക്കിയെഴുതാൻ $\pm$ എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. അപ്പോൾ പരിഹാരങ്ങൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

എന്ന സമവാക്യപ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ഉദാഹരണമായി ആദ്യം ചെയ്ത കണക്ക് ഒന്നുകൂടി നോക്കാം:

$2x^2 + 3x - 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രം, x-അക്ഷത്തിനെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഏതൊക്കെയാണ് ?

ഇവിടെ പരിഹരിക്കേണ്ട സമവാക്യം

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയ പരിഹാരങ്ങളുടെ പൊതുരൂപത്തിൽ

$$a = 2 \qquad b = 3 \qquad c = -2$$

എന്നെടുത്ത് ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - (4 \times 2 \times (-2))}}{2 \times 2} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \\ &= \frac{-3 \pm 5}{4} \end{aligned}$$

അതായത്

$$x = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

അല്ലെങ്കിൽ

$$x = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

x അക്ഷത്തെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ $\left(\frac{1}{2}, 0\right), (-2, 0)$.

(1) ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബഹുപദങ്ങളുടെ ചിത്രങ്ങൾ x-അക്ഷത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കണക്കാക്കുക:

(i) $2x^2 - 7x - 1$ (ii) $2x^2 + 7x - 1$ (iii) $9x^2 + 12x + 4$

(2) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 42 മീറ്ററും, അതിന്റെ വികർണ്ണം 15 മീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ് ?

(3) ചതുരാകൃതിയായ ഒരു കടലാസിൽനിന്ന് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾ മുറിച്ചു മാറ്റുന്നു:

മിച്ചമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 27 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണ്. ചതുരത്തിന്റെ മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ് ?

(4) 1, 5, 9, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലാണ് 91 കിട്ടുക ?

(5) 28 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു കമ്പി വളച്ച് ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കണം.

(i) വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററായി ചതുരമുണ്ടാക്കാൻ കഴിയുമോ ?

(ii) വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം 10 സെന്റിമീറ്റർ ആയാലോ ?

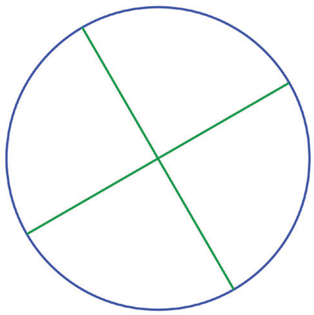
(iii) വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം 14 സെന്റിമീറ്റർ ആയാലോ ?

ഇവയിലെ ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയുന്ന ചതുരങ്ങളുടെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെയും നീളം കണക്കാക്കുക.

10 വൃത്തങ്ങളും വരകളും

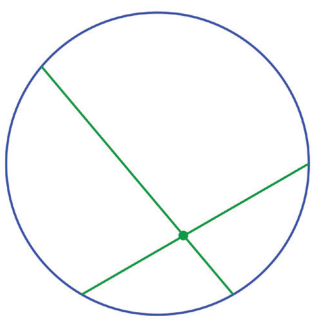
ഞാണുകൾ

വൃത്തത്തിലെ ഏതു രണ്ടു വ്യാസവും, കേന്ദ്രത്തിലൂടെ മുറിച്ചുകടക്കുന്നു.

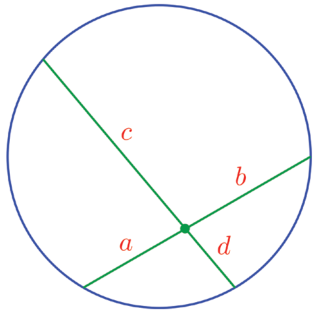


മുറിച്ചു കിട്ടുന്ന നാലു ഭാഗങ്ങളുടെയും നീളം ആരത്തിനു തുല്യവുമാണ്.

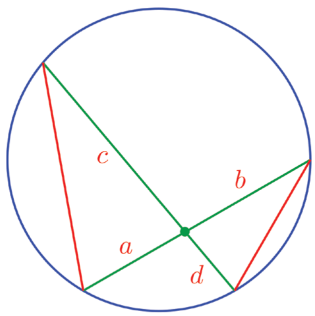
വ്യാസമല്ലാത്ത രണ്ടു ഞാണുകൾ വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ മുറിച്ചുകടക്കുമ്പോഴോ ?



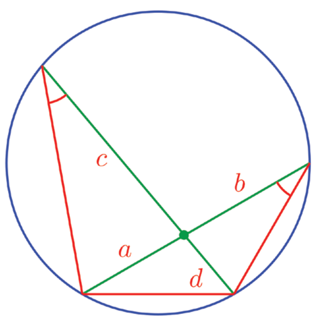
ഭാഗങ്ങളൊന്നും തുല്യമാകണമെന്നില്ല. എങ്കിലും അവ തമ്മിലൊരു ബന്ധമുണ്ട്. അതു കാണാൻ, ഒരു ഞാണിന്റെ ഭാഗങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ a, b എന്നും, മറ്റേ ഞാണിന്റെ ഭാഗങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ c, d എന്നുമെടുക്കാം:

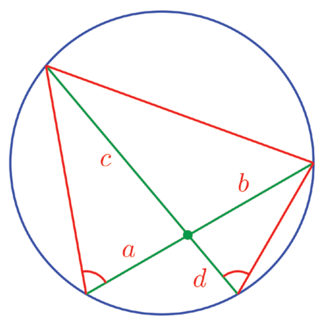


ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണക്കാക്കാൻ, ഞാണുകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച്, ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ ത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാം:

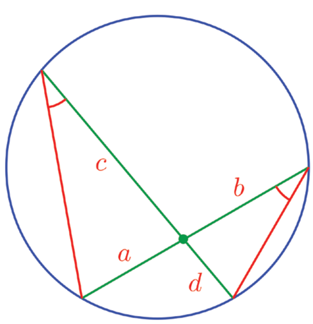


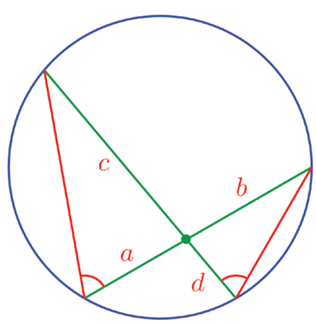
ഈ ത്രികോണങ്ങളിലെ മുകളിലെ കോണുകൾ ഒരേ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകളാണ്; താഴത്തെ കോണുകൾ, മറ്റൊരു വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകളും.





അപ്പോൾ ആദ്യചിത്രത്തിലെ ത്രികോണങ്ങളുടെ മുകളിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണ്; താഴത്തെ കോണുകളും തുല്യമാണ്.





അതായത്, ഈ ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ കോണുകളാണ്. അതിനാൽ തുല്യമായ കോണുകൾക്ക് എതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരേ തോതിലാണ് മാറുന്നത് (ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **സദൃശത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **കോണുകളും വശങ്ങളും** എന്ന ഭാഗം).

മുകളിലെ കോണുകളുടെ എതിർവശങ്ങളുടെ നീളം a യും d യും ആണല്ലോ; താഴത്തെ കോണുകളുടെ എതിർവശങ്ങളുടെ നീളം c യും b യും.

ഇവയുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണ്. ഈ തോത് k എന്നെടുത്താൽ

$$d = ka$$

$$b = kc$$

ഇതിൽ k നമുക്കറിയില്ലല്ലോ. അത് ഒഴിവാക്കി, a, b, c, d ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കിട്ടാൻ, ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തിൽനിന്ന് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം:

$$k = \frac{d}{a}$$

ഇത് രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചാൽ,

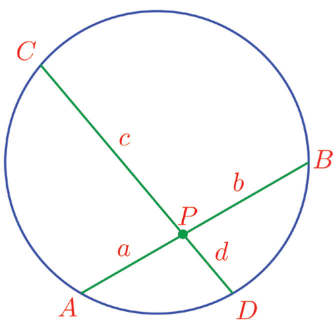
$$b = \frac{d}{a} \times c = \frac{cd}{a}$$

ഇത് ഇങ്ങനെ മാറ്റി എഴുതാമല്ലോ.

$$ab = cd$$

ഞാണുകൾക്ക് AB, CD എന്നും അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുവിന് P എന്നും പേരു കൊടുത്താൽ ഇത് ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$AP \times PB = CP \times PD$$



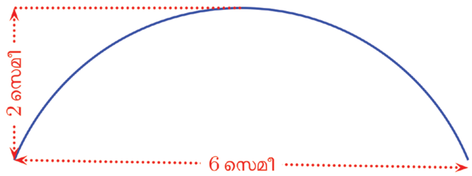
ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ AB, CD എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് ഞാണുകൾ വരയ്ക്കുക. ഇവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു P അടയാളപ്പെടുത്തുക. Input Bar ൽ PA * PB എന്ന് നല്കിയാൽ PA × PB എന്ന സംഖ്യ Algebra View ൽ കാണാൻ കഴിയും. ഇതുപോലെ PC × PD യും കാണുക. അവ താരതമ്യം ചെയ്യുക. ഞാണുകളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. P എന്ന ബിന്ദു വൃത്തത്തിലാകുമ്പോൾ PA × PB, PC × PD ഇവയ്ക്ക് എന്തു സംഭവിക്കും?

ഒരു പൊതുതത്വമായി ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെ പറയാം:

ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ഞാണുകൾ വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ മുറിച്ചു കടക്കുമ്പോൾ, ഒരു ഞാണിന്റെ ഭാഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലവും, മറ്റേ ഞാണിന്റെ ഭാഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലവും തുല്യമാണ്

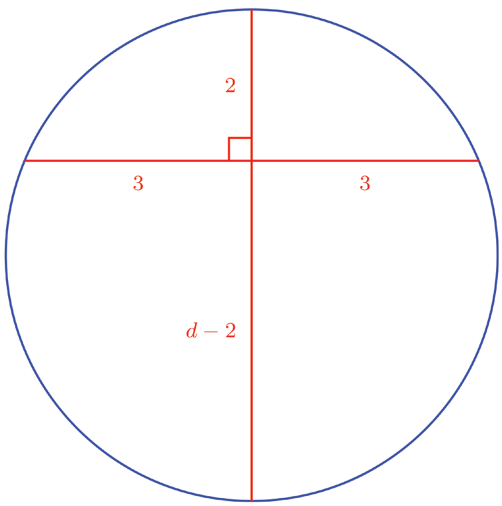
ഇത് ഉപയോഗിച്ചുള്ള ഒരു കണക്ക് നോക്കാം:

ഒരു വളയത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗമാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



വളയത്തിന്റെ വ്യാസം കണക്കാക്കുക.

മുഴുവൻ വൃത്തവും, അതിൽ ഈ ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഞാണും, അതിനു ലംബമായ വ്യാസവും സങ്കൽപിച്ചു നോക്കാം. ഈ വ്യാസം, ഞാണിനു ലംബമായതിനാൽ, ഞാണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യുമല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം d സെന്റിമീറ്റർ എന്ന് എടുത്താൽ, ചിത്രം ഇങ്ങനെയാകും:



ഇനി മുകളിൽ പറഞ്ഞ തത്വം ഉപയോഗിച്ച്

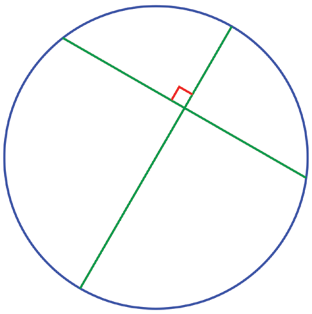
$$2(d - 2) = 3 \times 3 = 9$$

എന്നു കണക്കാക്കാം. ഇതിൽനിന്ന്

$$d = \frac{9}{2} + 2 = 4\frac{1}{2} + 2 = 6\frac{1}{2}$$

എന്നു കിട്ടുമല്ലോ. അതായത്, വളയത്തിന്റെ വ്യാസം $6\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്റർ.

ഈ കണക്കിൽ, പരസ്പരം മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ഞാണുകളിൽ ഒന്ന് വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും, മറ്റൊന്ന് അതിന് ലംബമായ ഒരു ഞാണുമാണല്ലോ. അത്തരമൊരു ചിത്രം നോക്കൂ:



താമരക്കണക്ക്

ഭാസ്കരാചാര്യരുടെ ലീലാവതി എന്ന ഗണിത പുസ്തകത്തെക്കുറിച്ച് എട്ടാംക്ലാസിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ (**സമവാക്യപരിഹാരം** എന്ന പാഠത്തിലെ **വിലോമക്രിയ** എന്ന ഭാഗം). അതിലെ ഒരു ശ്ലോകത്തിന്റെ അർഥം മലയാളത്തിൽ ഇങ്ങനെ പറയാം:

> ചക്രവാകപ്പക്ഷികളും ക്രൗഞ്ചപ്പക്ഷികളും ഇളക്കുന്ന വെള്ളം നിറഞ്ഞ ഒരു തടാകത്തിൽ, അര കൈപ്പാട് ഉയരത്തിൽ ഒരു താമരമൊട്ട് ഉയർന്നു നിൽക്കുന്നു. കാറ്റത്ത് മെല്ലെ ആടി, അത് രണ്ട് കൈപ്പാട് അകലെയായി വെള്ളത്തിൽ മുങ്ങി. പറയൂ കണക്കുകാരാ, വെള്ളത്തിന്റെ ആഴമെത്രയാണ് ?

വളയത്തിന്റെ ആരം കണക്കാക്കിയതുപോലെ, ഈ കണക്കിന്റെ ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാമോ ?

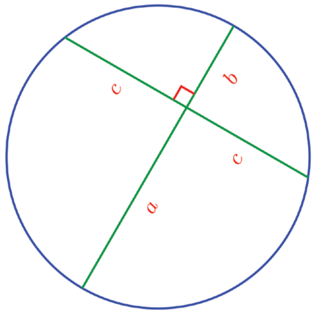
സംസ്കൃതശ്ലോകം ഇങ്ങനെയാണ്:

ചക്രക്രൗഞ്ചാകുലിതസലിലേ
ക്വാപിദൃഷ്ടം തഡാഗേ
തോയാദൂർധ്വ കമലകലികാഗ്രം
വിതസ്തിപ്രമാണം
മന്ദം മന്ദം ചലിതമനിലേനാഹതം
ഹസ്തയുഗ്മേ
തസ്മിന്മഗ്നം ഗണക കഥയ
ക്ഷിപ്രമംബുപ്രമാണം

വ്യാസത്തിന്റെ ഭാഗങ്ങളുടെ നീളം a, b എന്നെടുക്കാം.

വ്യാസം കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഞാണിലേക്കുള്ള ലംബമായതിനാൽ, അത് ഞാണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യും (എട്ടാംക്ലാസിലെ **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഞാണുകൾ** എന്ന ഭാഗം).

അപ്പോൾ വ്യാസം, ഞാണിനെ മുറിക്കുന്ന രണ്ടു ഭാഗങ്ങളുടെയും നീളം c എന്നെടുക്കാം:



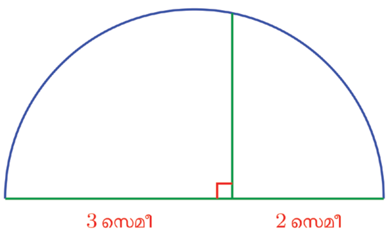
മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ഞാണുകളെക്കുറിച്ചുള്ള പൊതുതത്വമനുസരിച്ച് a, b, c ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

$$ab = c^2$$

ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെ പറയാം;

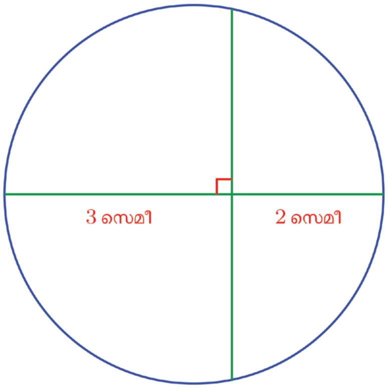
വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തെ അതിനു ലംബമായ ഒരു ഞാൺ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഞാണിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗമാണ്

ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രം നോക്കുക:



വ്യാസത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നുള്ള ലംബം അർധവൃത്തത്തെ മുട്ടുന്നു. ഈ ലംബത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

വൃത്തം മുഴുവനാക്കി, ലംബം താഴോട്ടും നീട്ടിയാൽ, ഒരു ഞാണാകും; അതിന്റെ പകുതിയാണ് ലംബം:



അപ്പോൾ മുകളിൽ പറഞ്ഞ തത്വമനുസരിച്ച്, ലംബത്തിന്റെ വർഗം $3 \times 2 = 6$; ലംബത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{6}$ സെന്റിമീറ്റർ.

ഇങ്ങനെ ഏതു സംഖ്യയുടെയും വർഗമൂലം നീളമായ വര വരയ്ക്കാമല്ലോ.

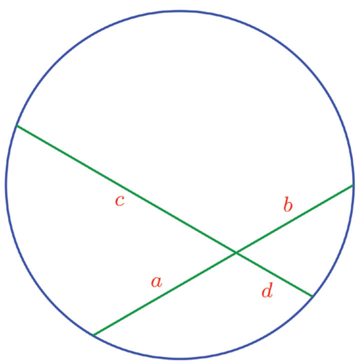
$\sqrt{5}$ സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വര വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

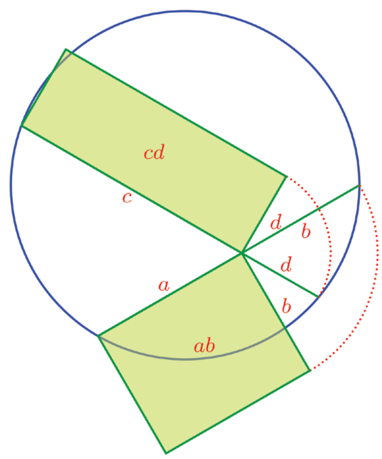
$\sqrt{6}$ സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വര മറ്റൊരുതരത്തിൽ വരയ്ക്കാമോ ?

പരപ്പളവുകൾ

വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ഞാണുകൾ പരസ്പരം മുറിച്ചുകിട്ടുന്ന ഭാഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തെക്കുറിച്ചാണല്ലോ പറഞ്ഞുവരുന്നത്. നീളങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തെ പരപ്പളവായി പറയാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ തത്വത്തെ ജ്യാമിതീയമായി ഇങ്ങനെ പറയാം:

ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ഞാണുകൾ വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ മുറിച്ചു കടക്കുമ്പോൾ, രണ്ടു ഞാണുകളുടെയും ഭാഗങ്ങൾ വശങ്ങളായ ചതുരങ്ങൾക്ക് ഒരേ പരപ്പളവാണ്





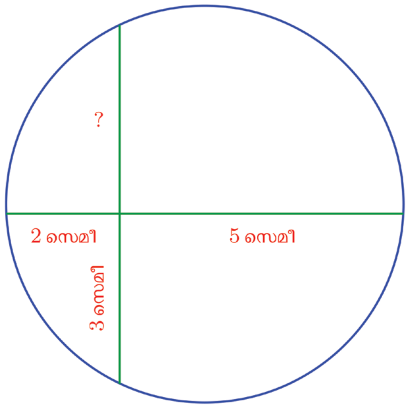
ഒരു ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് മാറാതെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വശം മാത്രം മാറ്റി വരയ്ക്കാൻ ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി ഈ ചതുരം നോക്കുക:

ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് മാറാതെ, ഒരു വശം 3 സെന്റിമീറ്ററായി മാറ്റി വരയ്ക്കണം.

ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $5 \times 2 = 10$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ആണല്ലോ. ഒരു വശം 3 സെന്റിമീറ്റർ ആകണമെങ്കിൽ, മറ്റേ വശം $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ സെന്റിമീറ്റർ ആകണം. ഇത് സ്കേലിൽ കൃത്യമായി അളന്നെടുക്കാൻ കഴിയില്ലല്ലോ.

ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞ തത്വം എങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കും ?

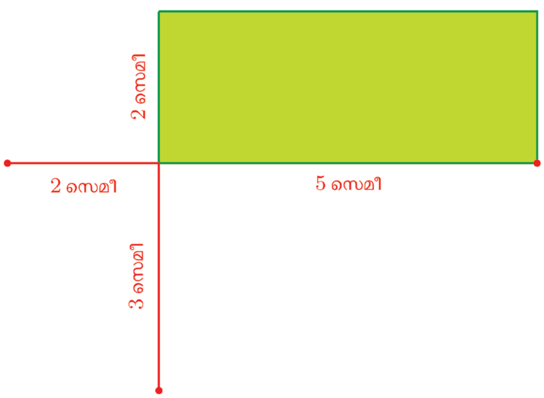
ഒരു വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ പരസ്പരം മുറിച്ചു കടക്കുന്ന രണ്ടു ഞാണുകൾ ഇങ്ങനെ സങ്കൽപിച്ചു നോക്കൂ: ഒരു ഞാണിന്റെ ഭാഗങ്ങൾ 5 സെന്റിമീറ്ററും 2 സെന്റിമീറ്ററും; മറ്റേ ഞാണിന്റെ ഒരു ഭാഗം 3 സെന്റിമീറ്റർ. മിച്ചമുള്ള ഭാഗം എത്ര സെന്റിമീറ്റർ ആകും ?



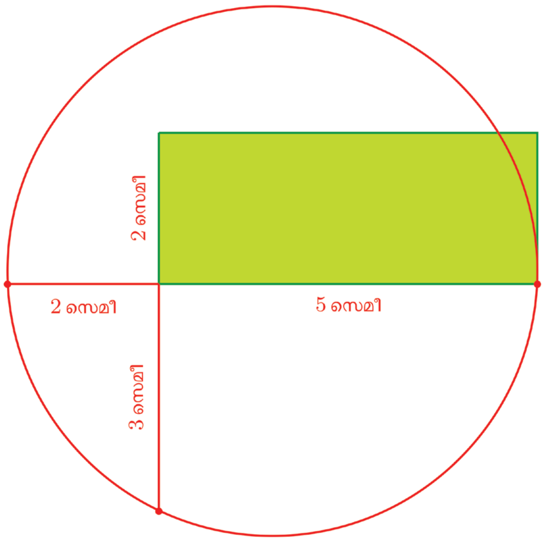
മിച്ചമുള്ള ഈ ഭാഗത്തിനെ 3 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ $2 \times 5 = 10$ ആകണ്ടേ ?

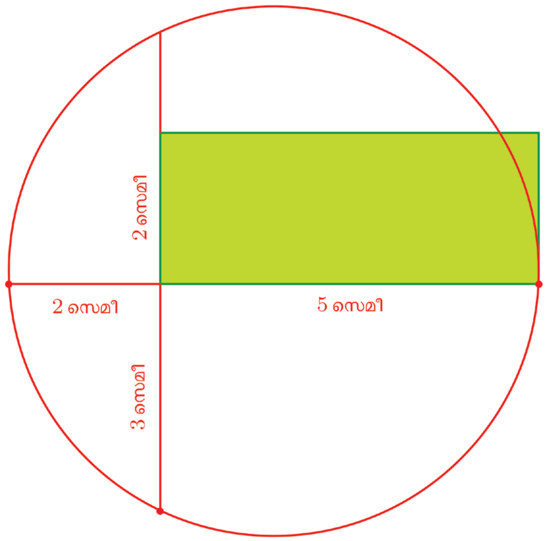
അപ്പോൾ ഇതാണ് നമുക്കു വേണ്ട $3\frac{1}{3}$ സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വര; ഇനി ഇതെങ്ങനെ വരയ്ക്കും ?

ആദ്യം ചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തെ 2 സെന്റിമീറ്റർ ഇടത്തേയ്ക്കും, ഇടതുവശത്തെ 3 സെന്റിമീറ്റർ താഴേയ്ക്കും നീട്ടി വരയ്ക്കാം:

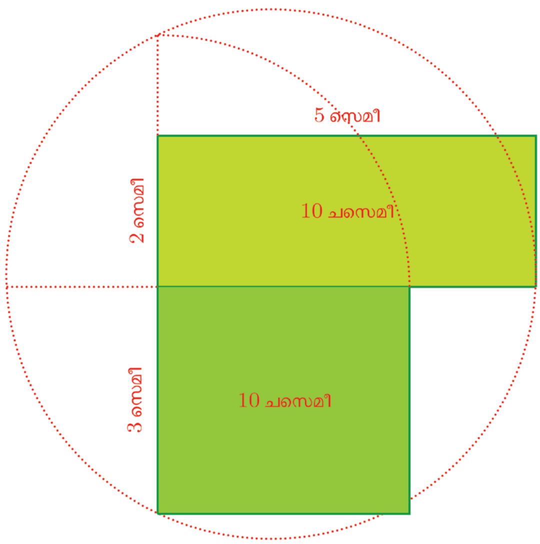


ഇനി ഇടതും വലതും താഴെയുമുള്ള ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി വൃത്തം വരച്ച്, ചതുരത്തിന്റെ ഇടതുവശം നീട്ടി അതിൽ മുട്ടിച്ചാൽ മതിയല്ലോ (മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന്, എട്ടാംക്ലാസിൽ **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **പരിവൃത്തം** എന്ന ഭാഗത്ത് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ):





ഇനി ഇങ്ങനെ കിട്ടിയ നീളം വിലങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്തി, നമുക്കാവശ്യമായ ചതുരം വരയ്ക്കാം:

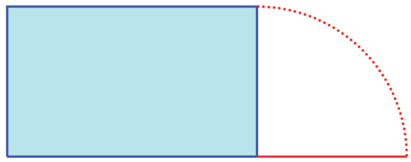


ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കാൻ, ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം അറിയണമെന്നില്ല; ഒരു വശം എത്ര കൂട്ടണമെന്നോ കുറയ്ക്കണമെന്നോ മാത്രം അറിഞ്ഞാൽ മതി.

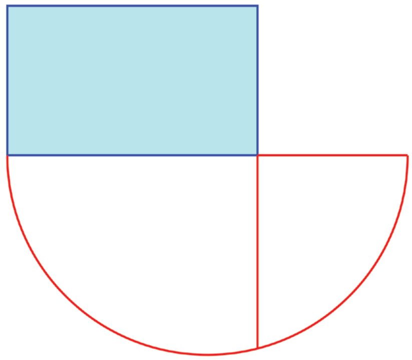
ഒരു ചതുരത്തിന്റെ അതേ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ, ഇതേ തത്വത്തിന്റെ ഉപതത്വമായ, വ്യാസത്തിന്റെ ഭാഗങ്ങളും ലംബത്തിന്റെ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി ഈ ചതുരം നോക്കൂ:

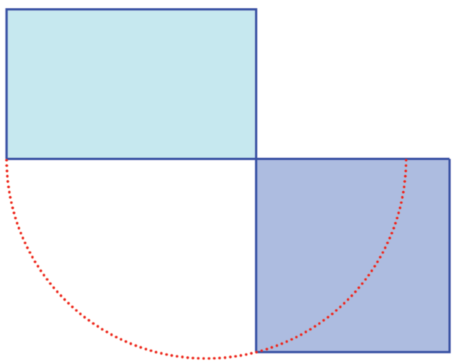
ഇതേ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ, ആദ്യം ചതുരത്തിന്റെ ഉയരം ചേർത്ത് നീളം കൂട്ടി വരയ്ക്കുക:



ഇനി താഴത്തെ വര വ്യാസമായി ഒരു അർധവൃത്തം താഴെ വരയ്ക്കുക; ചതുരത്തിന്റെ വലതുവശം താഴോട്ടു നീട്ടി, അർധവൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടിക്കുക:

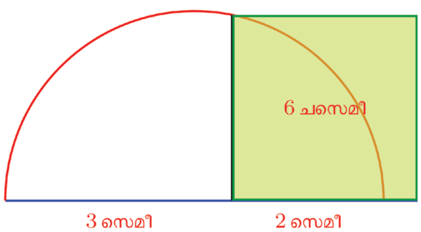


ഈ വരയാണ് സമചതുരത്തിന്റെ വശം (കാരണം ?).



ഇതിലും, ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം അറിയേണ്ടതില്ലെന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഇനി നിശ്ചിത പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാനും ഈ മാർഗം ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ഈ തത്വം ഉപയോഗിച്ച് $\sqrt{6}$ സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വര വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്ന് കഴിഞ്ഞ ഭാഗത്ത് കണ്ടല്ലോ; ഈ നീളം വശമായി 6 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരവും വരയ്ക്കാം:



(1) 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളവും 4 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരവും ഉള്ള ചതുരം വരയ്ക്കുക.

(i) ഇതേ പരപ്പളവും, നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററുമായ ചതുരം വരയ്ക്കുക.

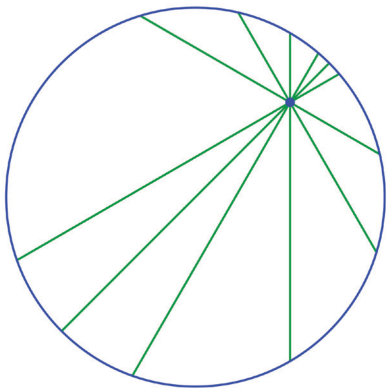
(ii) ഇതേ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

(2) 15 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

(3) മൂന്നു വ്യത്യസ്ത രീതിയിൽ 5 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക (പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തം ഓർക്കുക).

വൃത്തവും ബിന്ദുവും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

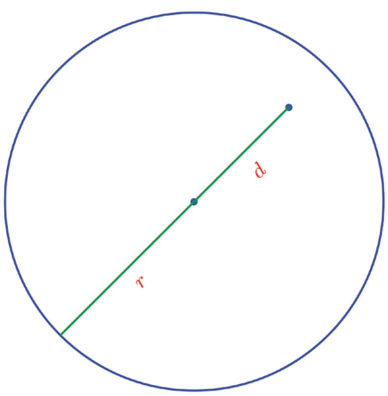


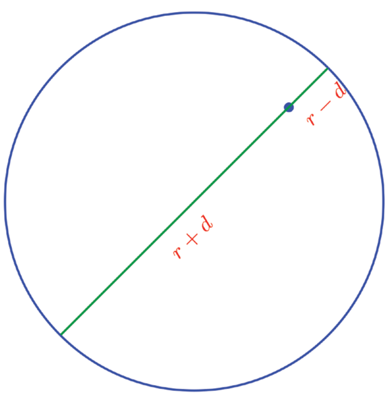
ഒരു വൃത്തം വരച്ച് വൃത്തത്തിൽ A എന്ന ഒരു ബിന്ദുവും വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ P എന്ന ഒരു ബിന്ദുവും അടയാളപ്പെടുത്തുക. Line ഉപയോഗിച്ച് AP എന്ന വര വരയ്ക്കുക. ഈ വര വൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന പുതിയ ബിന്ദു B അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇനി വര മറച്ചു വയ്ക്കാം. AB എന്ന ഞാൺ വരയ്ക്കുക. PA × PB കാണുക. A യുടെ സ്ഥാനം വൃത്തത്തിലൂടെ മാറ്റിനോക്കൂ. PA × PB മാറുന്നുണ്ടോ? P യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിയാലോ? P എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് അകന്നു പോകുമ്പോൾ PA × PB യ്ക്ക് എന്തു സംഭവിക്കുന്നു. P വൃത്തത്തിൽ ആകുമ്പോഴോ? വൃത്തത്തിനു പുറത്തായാലോ?

വൃത്തത്തിനകത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നു പോകുന്ന കുറേ ഞാണുകൾ. ഇവയെയെല്ലാം, ഈ ബിന്ദു രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നുണ്ടല്ലോ. നാം ഇപ്പോൾ ഉപയോഗിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന പൊതു തത്വപ്രകാരം, ഈ ഭാഗങ്ങളുടെയെല്ലാം ഗുണനഫലം ഒരേ സംഖ്യയാണ്.

ഈ സംഖ്യ കണക്കാക്കാൻ, ഈ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസം വരയ്ക്കാം. അതും ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ഒരു ഞാൺ ആയതിനാൽ, ബിന്ദു വ്യാസത്തെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലവും ഈ സംഖ്യതന്നെയാണ്.

വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നും, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം d എന്നും എടുത്താൽ, വ്യാസത്തിന്റെ ഭാഗങ്ങളുടെ നീളം ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താം:

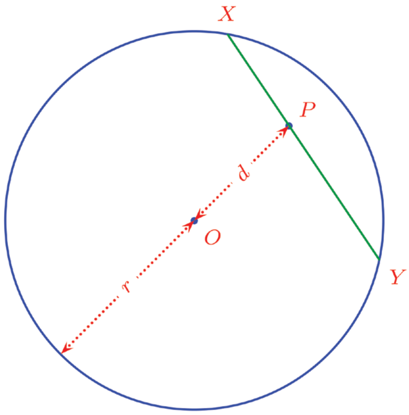




അപ്പോൾ ഭാഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം

$$(r + d)(r - d) = r^2 - d^2$$

ബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന ഏതു ഞാണിന്റെയും ഭാഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം ഒരേ സംഖ്യയാണെന്നു കണ്ടല്ലോ; അപ്പോൾ ഇത്തരം എല്ലാ ഞാണുകളുടെയും ഭാഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $r^2 - d^2$ തന്നെയാണ്.

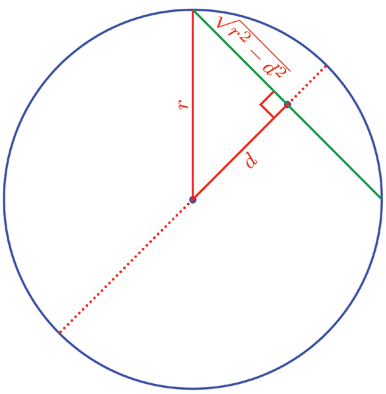


$$PX \times PY = r^2 - d^2$$

അതായത്

> **ആരം r ആയ വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് d അകലെയുള്ള ഒരു ബിന്ദു P യിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഏതു ഞാൺ XY എടുത്താലും**
>
> $$PX \times PY = r^2 - d^2$$

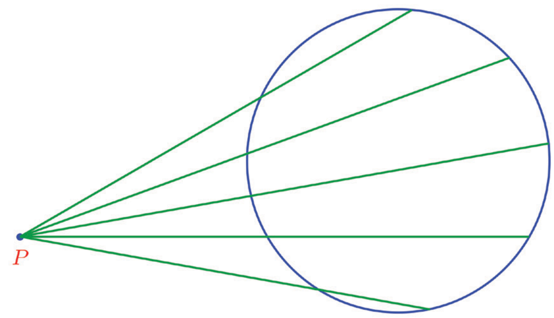
ജ്യാമിതീയമായി, $r^2 - d^2$ എന്നത്, P യിലൂടെയുള്ള വ്യാസത്തിന് ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന ഞാണിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗമാണ്.



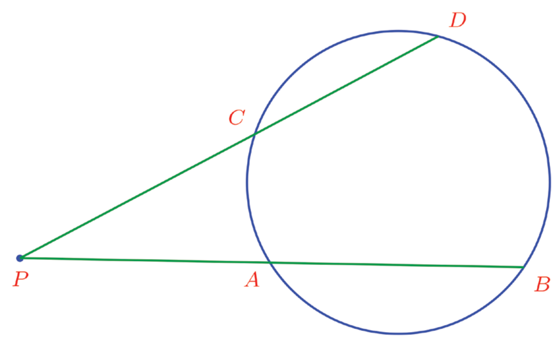
മുകളിൽ പറഞ്ഞ തത്വത്തിൽ, P വൃത്തത്തിനുള്ളിലെ ഒരു ബിന്ദുവും X, Y എന്നിവ P യിലൂടെയുള്ള ഒരു വര വൃത്തത്തെ മുറിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുമാണല്ലോ; PX, PY ഇവ P യിൽനിന്ന് ഈ ബിന്ദുക്കളിലേക്കുള്ള അകലവും.

വൃത്തത്തിനു പുറത്ത്, P എന്ന് ബിന്ദുവെടുത്ത്, വൃത്തത്തെ മുറിക്കുന്ന വരകൾ വരച്ചാലോ?

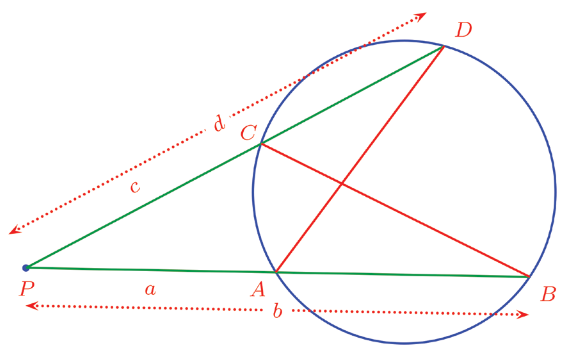
ഇത്തരം വരകളിലും, P യിൽനിന്ന് വൃത്തത്തെ മുറിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളിലേക്കുള്ള അകലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം ഒരേ സംഖ്യതന്നെ ആയിരിക്കുമോ ?



ഇത്തരം രണ്ടു വരകൾ എടുത്തു പരിശോധിക്കാം:



ചിത്രത്തിൽ $PA \times PB$ യും $PC \times PD$ യും ഒരേ സംഖ്യയാണോ എന്നാണ് പരിശോധിക്കേണ്ടത്. അത് പരിശോധിക്കാൻ, ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ വരകൾ വരച്ച്, ത്രികോണങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം. PA, PB എന്നീ നീളങ്ങൾ a, b എന്നും PC, PD എന്നീ നീളങ്ങൾ c, d എന്നും എടുക്കാം:



PAD, PCB എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾക്ക് P യിൽ ഒരേ കോണാണ്; B യിലെയും D യിലെയും കോണുകൾ തുല്യവുമാണ് (എന്തുകൊണ്ട് ?).

അപ്പോൾ ഈ ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ കോണുകളാണ്; അതിനാൽ തുല്യമായ കോണുകൾക്ക് എതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരേ തോതിലാണ് മാറുന്നത്.

ത്രികോണങ്ങളിലെ B യിലെയും D യിലെയും കോണുകളുടെ എതിർവശങ്ങളുടെ നീളം c യും a യും.

C യിലെയും A യിലെയും കോണുകളുടെ എതിർവശങ്ങളുടെ നീളം b യും d യും.

ഇവയുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണ്. ഈ തോത് k എന്നെടുത്താൽ

$$c = ka$$

$$b = kd$$

ഇതിൽനിന്ന് വൃത്തത്തിനകത്തെ ബിന്ദുവിന്റെ കാര്യത്തിൽ കണക്കാക്കിയതുപോലെ

$$ab = cd$$

എന്നു കിട്ടും (ചെയ്തുനോക്കൂ).

അതായത്

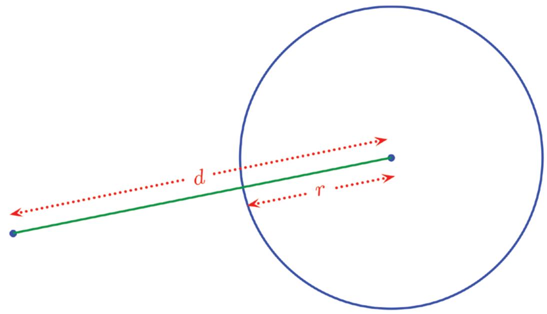
$$PA \times PB = PC \times PD$$

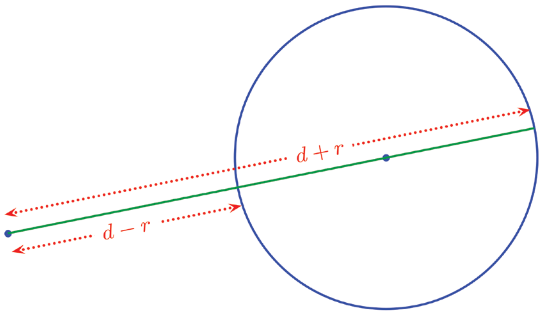
അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി ?

> വൃത്തത്തിനു പുറത്ത് ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ വൃത്തത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ മുറിക്കുന്ന എല്ലാ വരകളിലും, ഈ ബിന്ദുവിൽനിന്ന് വൃത്തത്തെ മുറിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളിലേക്കുള്ള അകലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം ഒരേ സംഖ്യയാണ്.

ഈ സംഖ്യയും വൃത്തത്തിന്റെ ആരവും, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലവും ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കാൻ കഴിയുമോ ?

വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നും, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള ദൂരം d എന്നും എടുക്കാം. വൃത്തകേന്ദ്രവും ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരതന്നെ എടുത്ത് അകലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം കണക്കാക്കാം:

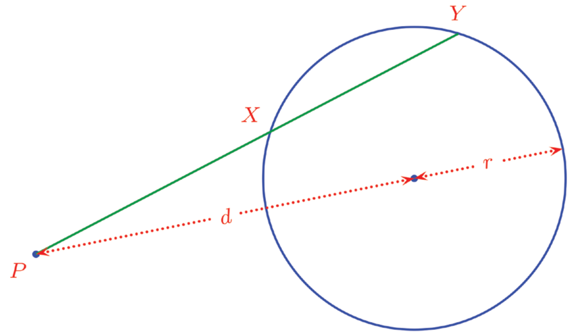




അപ്പോൾ പുറത്തെ ബിന്ദുവിൽനിന്ന് വൃത്തത്തെ മുറിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളിലേക്കുള്ള അകലങ്ങൾ $d - r$ ഉം $d + r$ ഉം എന്നു കാണാമല്ലോ. അവയുടെ ഗുണനഫലം

$$(d + r)(d - r) = d^2 - r^2$$

ഈ ബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന ഏതു വര എടുത്താലും, വര വൃത്തത്തെ മുറിക്കുന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം ഇതുതന്നെ ആയിരിക്കുമല്ലോ:



$$PX \times PY = d^2 - r^2$$

ഒരു വൃത്തം വരച്ച് വൃത്തത്തിനു പുറത്ത് ഒരു ബിന്ദു P അടയാളപ്പെടുത്തുക. P യിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിന് തൊടുവര വരച്ച് വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദു T അടയാളപ്പെടുത്തുക. വൃത്തത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു Y അടയാളപ്പെടുത്തി, PY എന്ന വര വരയ്ക്കുക. ഈ വര വൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന പുതിയ ബിന്ദു X അടയാളപ്പെടുത്തുക. PT^2 (Input PT^2) PX × PY ഇവ കണക്കാക്കി താരതമ്യം ചെയ്യുക. P യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

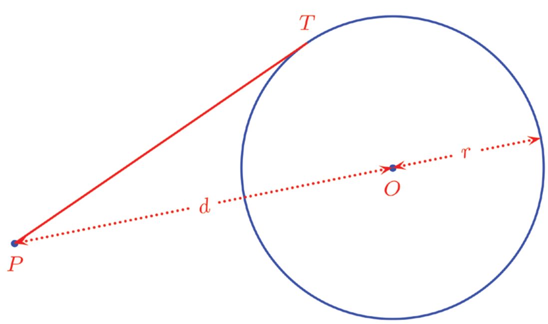
ആരം r ആയ വൃത്തത്തിനു പുറത്ത്, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് d അകലെയുള്ള P എന്ന ബിന്ദുവിൽ ക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വര വൃത്തത്തെ മുറിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ X ഉം Y യും ആണെങ്കിൽ

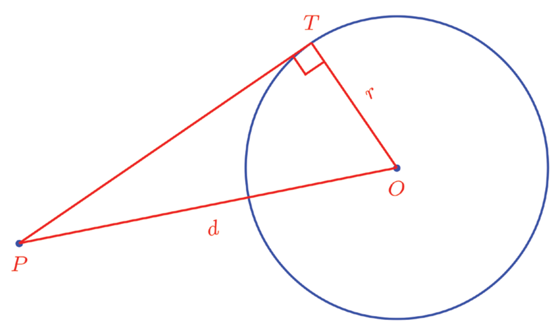
$$PX \times PY = d^2 - r^2$$

P വൃത്തത്തിനകത്താണ് എടുക്കുന്നതെങ്കിൽ $PX \times PY$ എന്ന ഗുണനഫലത്തെ P യിലൂടെയുള്ള ഒരു നിശ്ചിത ഞാണിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗം എന്ന് ജ്യാമിതീയമായി പറയാമല്ലോ.

P വൃത്തത്തിനു പുറത്താണെങ്കിൽ, ഇത്തരത്തിൽ ജ്യാമിതീയമായി പറയാൻ കഴിയുമോ ?

അതിന് P യിൽനിന്ന് വൃത്തത്തിലേക്കുള്ള തൊടുവര വരച്ച്, അത് വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദു T എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇനി P യും T യും വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ ഒരു ത്രികോണം കിട്ടും:



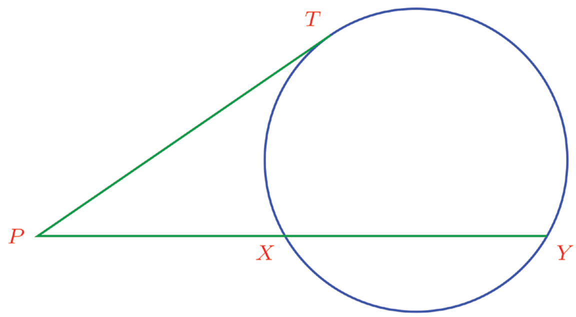


ഇതൊരു മട്ടത്രികോണമായതിനാൽ (എന്തുകൊണ്ട് ?)

$$d^2 - r^2 = PT^2$$

അപ്പോൾ

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് വൃത്തത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ മുറിക്കുന്ന ഏതു വര വരച്ചാലും, ഈ ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മുറിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളിലേക്കുള്ള അകലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ബിന്ദുവിൽനിന്നുള്ള തൊടുവരയുടെ നീളത്തിന്റെ വർഗമാണ്.



$$PX \times PY = PT^2$$

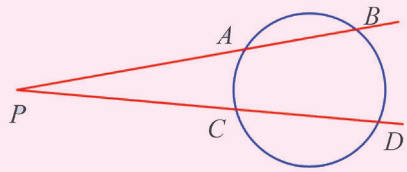
ഇനി വൃത്തത്തിനകത്തോ പുറത്തോ ഉള്ള ബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന വരകളെക്കുറിച്ചുള്ള തത്വങ്ങൾ ഒത്തുനോക്കാം.

ആരം r ആയ വൃത്തത്തിനകത്ത്, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് d അകലത്തിൽ ബിന്ദു എടുക്കണമെങ്കിൽ, d എന്ന അകലം, ആരമായ r നേക്കാൾ ചെറുതായിരിക്കണമല്ലോ; അപ്പോൾ P യിലൂടെയുള്ള വരകൾ വൃത്തത്തെ മുറിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളിലേക്കുള്ള അകലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $r^2 - d^2$. ബിന്ദു പുറത്താകണമെങ്കിൽ d എന്ന അകലം r നേക്കാൾ വലുതാകണം; മേൽപറഞ്ഞ ഗുണനഫലം $d^2 - r^2$.

ബിന്ദു വൃത്തത്തിന് അകത്തായാലും പുറത്തായാലും r^2, d^2 ഇവയിൽ വലുതിൽനിന്ന് ചെറുത് കുറയ്ക്കുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്; അതായത്, രണ്ടിലും എടുക്കുന്നത് $r^2 - d^2$ ന്റെ കേവലമൂല്യമാണ് (ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **രേഖീയസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **അകലങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

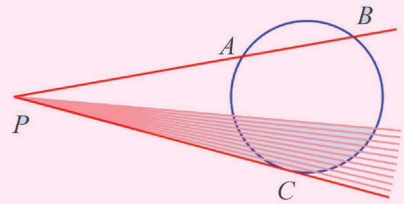
മാറാത്ത ബന്ധം

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



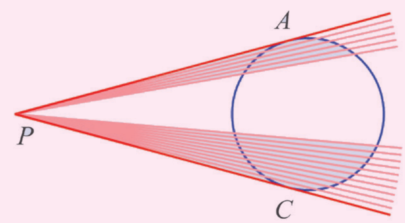
ഇതിൽ $PA \times PB = PC \times PD$ എന്നറിയാമല്ലോ.

താഴത്തെ വര, കറങ്ങി തൊടുവരയായാലോ?



PD എന്നത് PC തന്നെയാകും; നേരത്തെ കണ്ട ബന്ധം $PA \times PB = PC^2$ എന്നാകും.

മുകളിലത്തെ വരയും തൊടുവര ആയാലോ?



ഈ ബന്ധം $PA^2 = PC^2$ അഥവാ $PA = PC$ എന്നാകും.

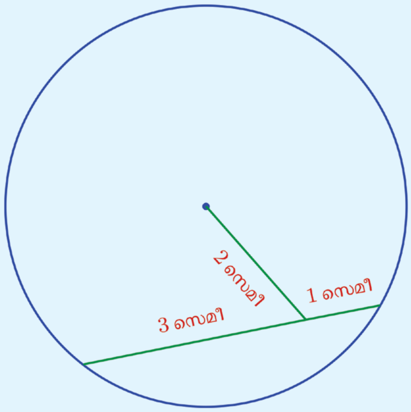
ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നുള്ള തൊടുവരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ.

അപ്പോൾ പൊതുവേ ഇങ്ങനെ പറയാം:

ആരം r ആയ വൃത്തത്തിനകത്തോ പുറത്തോ, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് d അകലെയുള്ള P എന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വര വൃത്തത്തെ മുറിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ X ഉം Y യും ആണെങ്കിൽ

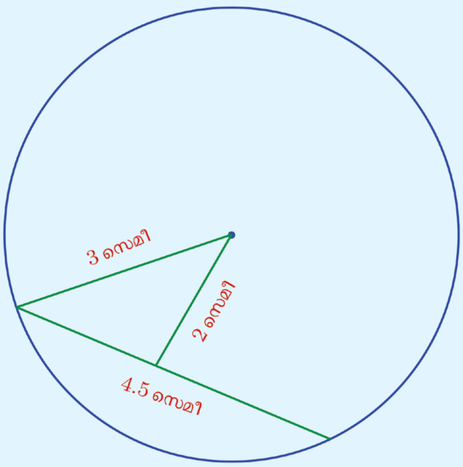
$$PX \times PY = |r^2 - d^2|$$

(1) ചിത്രത്തിൽ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ഒരു വര, ഒരു ഞാണിനെ രണ്ടായി ഭാഗിക്കുന്നു.



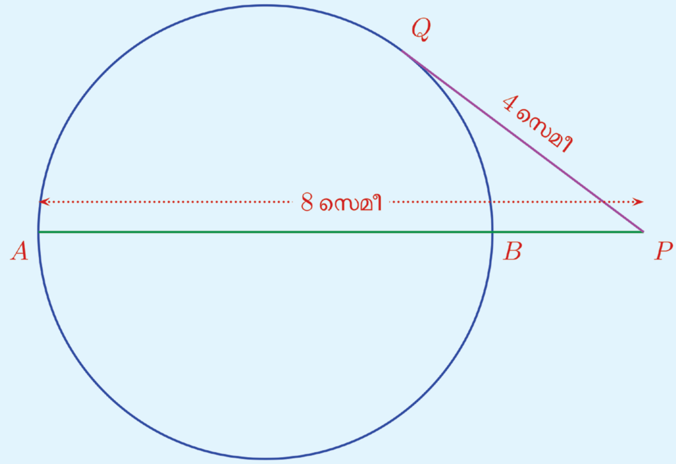
വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?

(2) ചിത്രത്തിൽ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള ഒരു വര, ഒരു ഞാണുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.



ഞാണിന്റെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളുടെയും നീളം കണക്കാക്കുക.

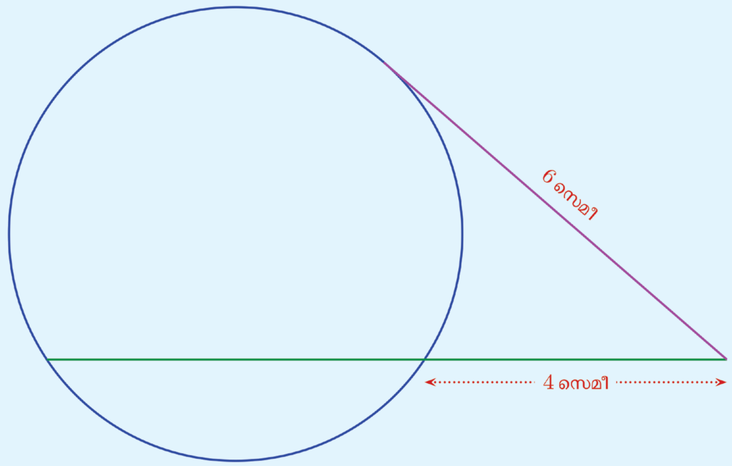
(3) ചിത്രത്തിൽ AB വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും, P അതു നീട്ടിയതിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമാണ്. P യിൽ നിന്നുള്ള തൊടുവര വൃത്തത്തെ Q വിൽ തൊടുന്നു.

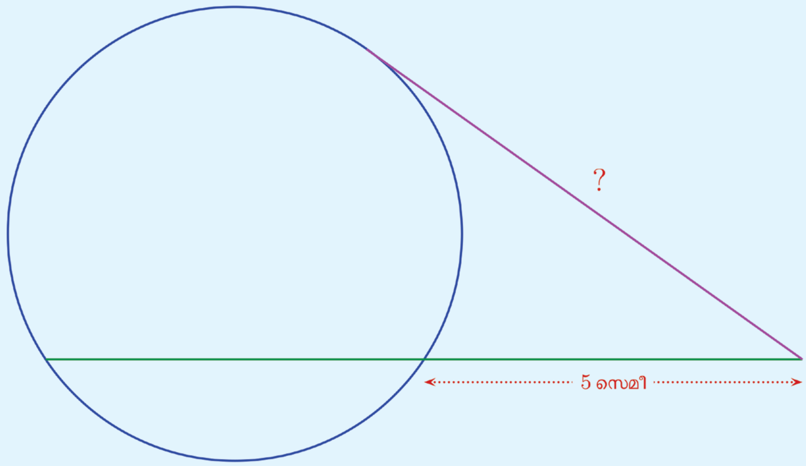


വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?

(4) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ ആദ്യത്തേതിൽ, ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച വര പുറത്തേക്കു നീട്ടി, അവിടെനിന്ന് വൃത്തത്തിലേക്ക് തൊടുവര വരച്ചിരിക്കുന്നു.

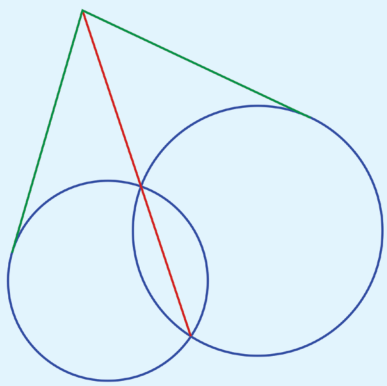
ഇതേ വരതന്നെ അല്പം കൂടി വലത്തോട്ടു നീട്ടിയ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരയാണ് രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ;





ഈ തൊടുവരയുടെ നീളമെന്താണ് ?

(5) ചിത്രത്തിൽ, രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾക്കും ഒരോ തൊടുവര വരച്ചിരിക്കുന്നു.



ഈ തൊടുവരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

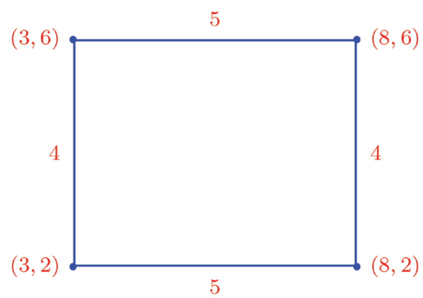
11 ജ്യാമിതിയും ബീജഗണിതവും

സാമാന്തരികങ്ങൾ

ബിന്ദുക്കളെ സംഖ്യാജോടികൾകൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്ന രീതി **സൂചകസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ. അതുപയോഗിച്ച് ചില കണക്കുകളും ചെയ്തു.

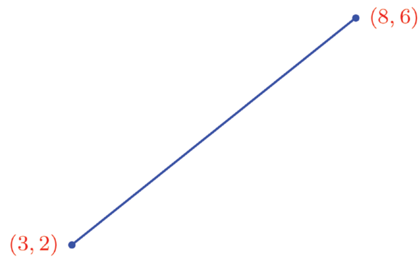
ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ ഒരു ചതുരത്തിലെ ഒരു ജോടി എതിർ മൂലകൾ (3, 2) ഉം (8, 6) ഉം ആണെങ്കിൽ, അതിന്റെ മറ്റു രണ്ടു മൂലകൾ കണക്കാക്കാം:

ഈ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളവും കണക്കാക്കാം:



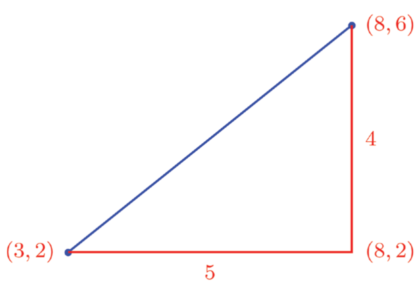
ഇത് മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറയാം.

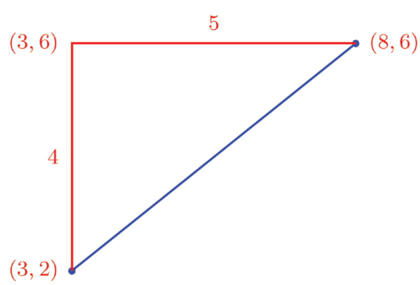
(3, 2) എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് (8, 6) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് എത്തുമ്പോൾ, സൂചകസംഖ്യകളിൽ ഉണ്ടായ മാറ്റങ്ങൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?



- x-സൂചകസംഖ്യ $8 - 3 = 5$ കൂടുന്നു.
- y-സൂചകസംഖ്യ $6 - 2 = 4$ കൂടുന്നു.

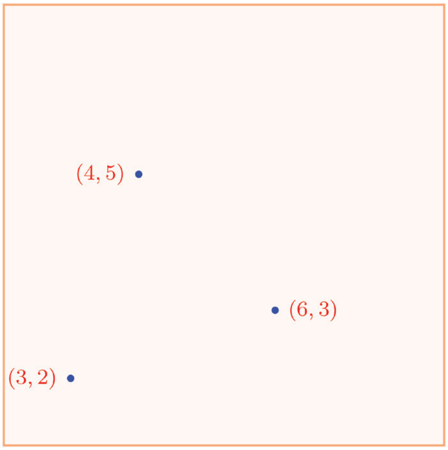
ഈ മാറ്റങ്ങൾ ഓരോന്നായി വരുത്തിയാലോ ?

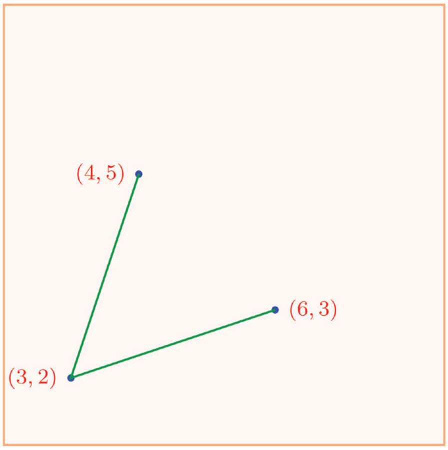


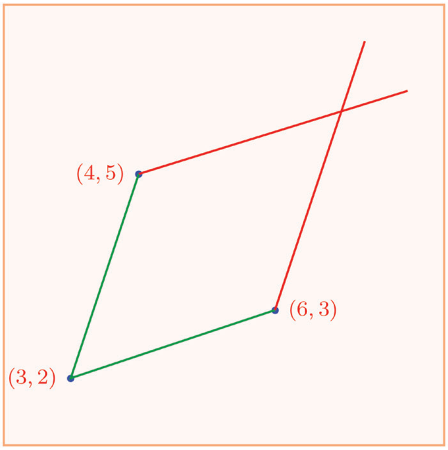


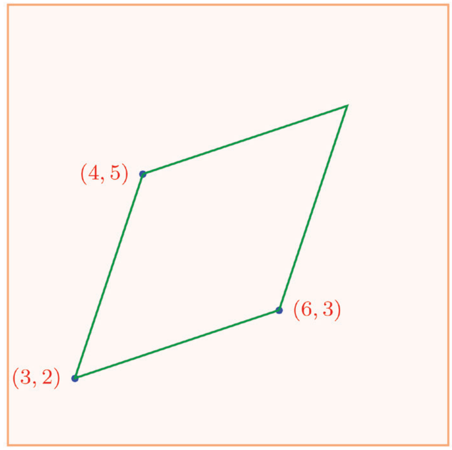
ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേക്ക് മാറുമ്പോൾ സൂചകസംഖ്യകളിൽ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റം ഇങ്ങനെ ലംബവശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളായി കാണാം.

ഇനി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:









മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ മൂലകളായി ഒരു സാമാന്തരികം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

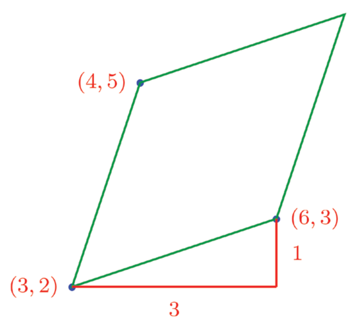
ഇതിന്റെ നാലാമത്തെ മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ് ?

അതിന് താഴത്തെ വശത്തിൽ ഇടതു മൂലയിൽനിന്ന് വലതു മൂലയിലേക്ക് മാറുമ്പോൾ സൂചകസംഖ്യകൾക്ക് വരുന്ന മാറ്റം നോക്കാം.

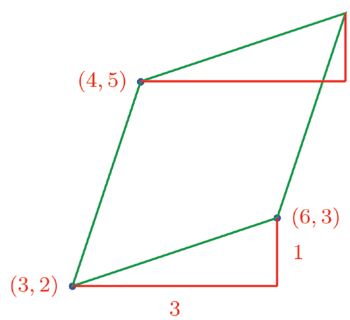
- x-സൂചകസംഖ്യ $6 - 3 = 3$ കൂടുന്നു.
- y-സൂചകസംഖ്യ $3 - 2 = 1$ കൂടുന്നു.

നേരത്തെ പറഞ്ഞതുപോലെ, ഒരു മട്ടത്രികോണം വരച്ച് ഈ മാറ്റങ്ങൾ കാണിക്കാം:

A(0, 0) എന്ന ബിന്ദുവും B, C എന്നിങ്ങനെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും അടയാളപ്പെടുത്തുക. Input Bar ൽ (x(B) + x (C), y(B) + y (C)) എന്നു നൽകിയാൽ D എന്ന ഒരു ബിന്ദു ലഭിക്കും. ABDC എന്ന ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. ഇത് ഒരു സാമാന്തരികമല്ലേ? എന്തുകൊണ്ട്? B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.



മുകളിലെ വശത്തിൽ, വലതു മൂലയുടെ സൂചകസഖ്യകളാണ് കണക്കാക്കേണ്ടത്. അതിന് ഇടതു മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകളിൽ വരുന്ന മാറ്റം അറിഞ്ഞാൽ മതി. അതു കണക്കാക്കാൻ, താഴത്തെ വരയിലെപ്പോലെ ഒരു ത്രികോണം മുകളിലും വരയ്ക്കാം:



ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളമാണ് സൂചകസംഖ്യകളിലെ മാറ്റങ്ങൾ. അവ എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

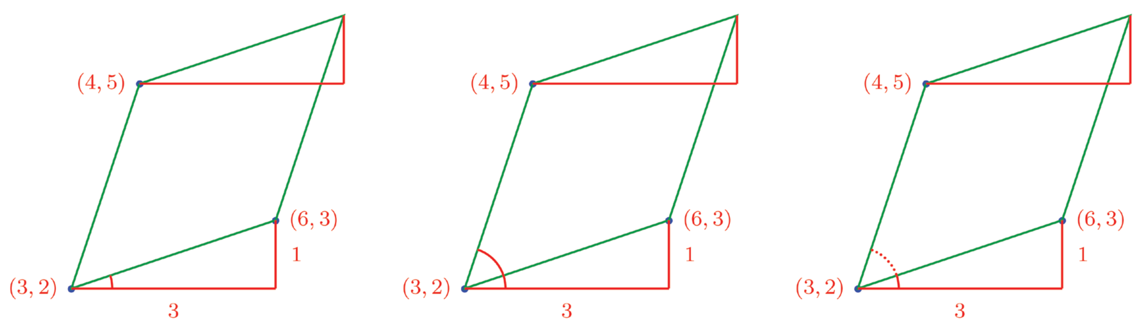
കാഴ്ചയിൽ ഈ ത്രികോണം താഴത്തെ ത്രികോണത്തിനു തുല്യമാണെന്ന് തോന്നുന്നില്ലേ ? അതു ശരിയാണോ എന്നെങ്ങനെ പരിശോധിക്കും ?

താഴത്തെയും മുകളിലെയും മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ കർണ്ണങ്ങൾ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങളാണ്; അതിനാൽ അവയ്ക്ക് ഒരേ നീളമാണ്.

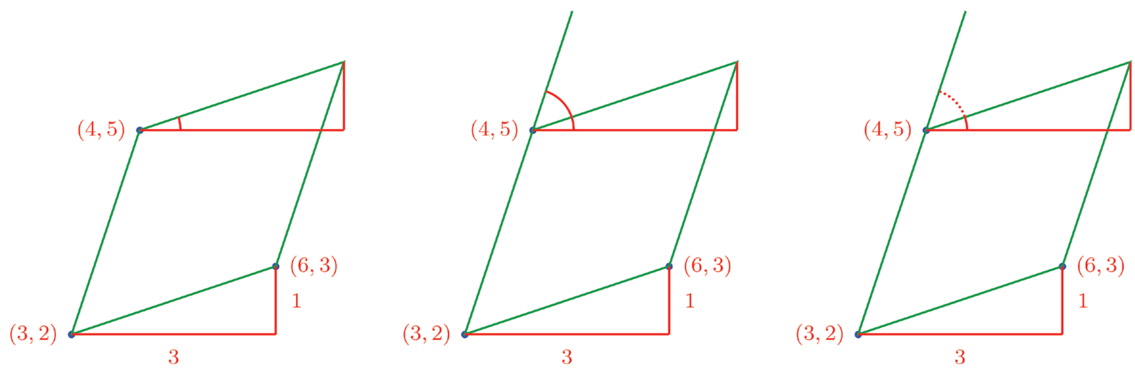
ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളോ ?

താഴത്തെ ത്രികോണത്തിലെ ഇടതു മൂലയിലെ കോണിനെ രണ്ടു കോണുകളുടെ വ്യത്യാസമായി കാണാമല്ലോ:

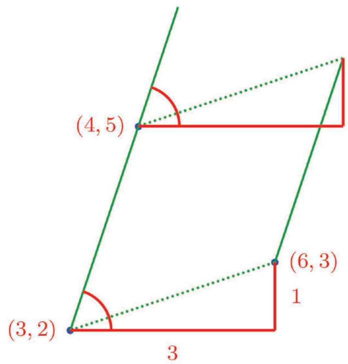
ഒരു ത്രികോണം ABC വരച്ച് അതിന്റെ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Move ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിനെ വലത്തേക്ക് 3 അകലം നീക്കി നോക്കൂ. മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾക്ക് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? ഇങ്ങനെ ലഭിച്ച ത്രികോണത്തിനെ മുകളിലേക്ക് 2 അകലം നീക്കുക. സൂചകസംഖ്യകൾക്ക് എന്തു സംഭവിക്കുന്നു? ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെയും അവസാനം ലഭിച്ച ത്രികോണത്തിന്റെയും മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ് ? ത്രികോണത്തിനുപകരം ഒരു സാമാന്തരികം വരച്ച് ഇതു ചെയ്തുനോക്കൂ.

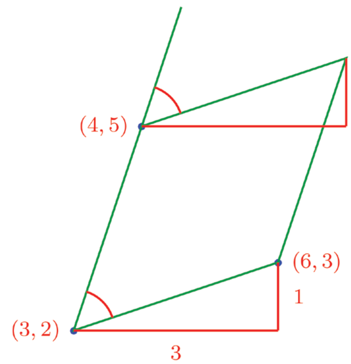


മുകളിലെ ത്രികോണത്തിലെ ഇടതുകോണും ഇതുപോലെ രണ്ടു കോണുകളുടെ വ്യത്യാസമായി കാണാം:



ഇങ്ങനെ മുകളിലും താഴെയും കുറയ്ക്കുന്ന കോണുകൾ ഓരോന്നും നോക്കുക:

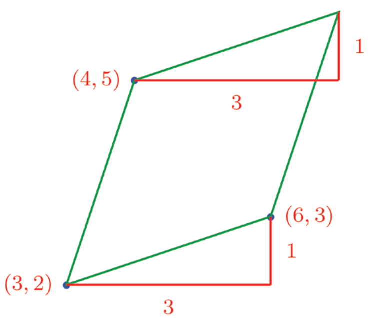




ഇവയിലെ ആദ്യത്തെ കോണുകൾ, ഇടതുവശത്തെ പച്ച വര, ചുവന്ന സമാന്തരവരകളെ മുറിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന രണ്ടു ചെറിയ കോണുകളാണ്; അതിനാൽ അവ തുല്യമാണ്. രണ്ടാമത്തെ കോണുകൾ, ഇതേ വര മുകളിലും താഴെയുമുള്ള പച്ച സമാന്തരവരകളെ മുറിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന രണ്ടു ചെറിയ കോണുകളാണ്; അതിനാൽ അവയും തുല്യമാണ് (ഏഴാംക്ലാസിലെ **സമാന്തരവരകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **കോൺ പൊരുത്തങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

അപ്പോൾ ഈ കോണുകളുടെ വ്യത്യാസങ്ങളും തുല്യമാണല്ലോ. അതായത്, നമ്മുടെ മട്ടത്രികോണങ്ങളിലെ താഴത്തെ കോണുകൾ തുല്യമാണ്. അതിനാൽ മൂന്നാമത്തെ കോണുകളും തുല്യമാണ്. കർണ്ണവും, അതിന്റെ ഇരുവശത്തുമുള്ള കോണുകളും തുല്യമായതിനാൽ ത്രികോണങ്ങളിലെ മറ്റു വശങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണ് (എട്ടാംക്ലാസിലെ **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **രണ്ടു കോണുകൾ** എന്ന ഭാഗം).

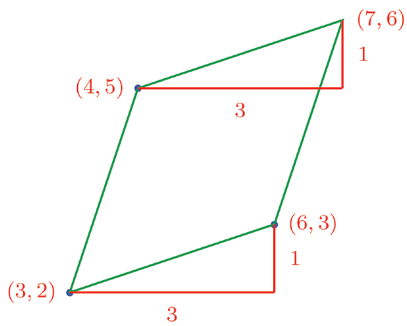
അപ്പോൾ മുകളിലെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളവും ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താം:



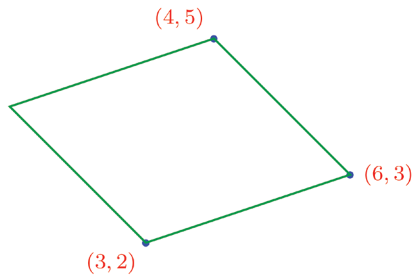
ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ച ഒരു രൂപത്തെ ആവശ്യാനുസരണം നീക്കുന്നതിന് Translate by Vector ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം. ഒരു സാമാന്തരികം വരച്ച് അതിനെ വലത്തേക്ക് 3 ഉം മുകളിലേക്ക് 2 ഉം നീക്കണം എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇതിനായി (0, 0), (3, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Translate by Vector ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ആദ്യം സാമാന്തരികത്തിലും പിന്നീട് (0, 0), (3, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും ക്രമമായി ക്ലിക്കുചെയ്യുക. സാമാന്തരികത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾക്കു വരുന്ന മാറ്റമെന്താണ്? (3, 2) നുപകരം മറ്റൊരു ബിന്ദു എടുത്ത് നോക്കൂ.

ഇനി സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലാം മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാമല്ലോ.

- x-സൂചകസംഖ്യ $4 + 3 = 7$
- y-സൂചകസംഖ്യ $5 + 1 = 6$

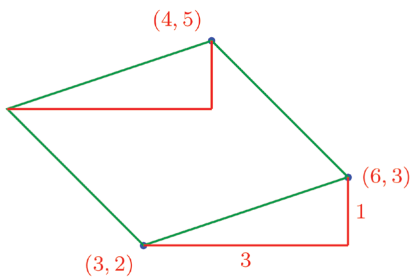


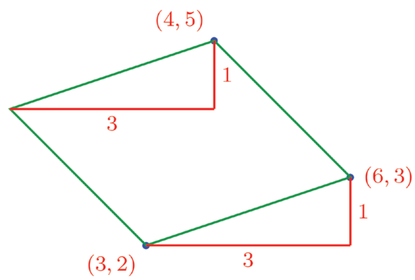
ഈ കണക്കിൽ ആദ്യമെടുത്ത മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾതന്നെ മൂലകളായി മറ്റൊരു സാമാന്തരികം വരയ്ക്കാമല്ലോ:



ഈ സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലാം മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ ലംബവശങ്ങളുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ മുകളിലും താഴെയും വരച്ച് ഇത് കണ്ടുപിടിക്കാം:





ഇവിടെ (4, 5) എന്ന മൂലയിൽനിന്ന് നമുക്കറിയേണ്ട മൂലയിലേക്കെത്താൻ, താഴോട്ട് 1 ഇറങ്ങുകയും, ഇടത്തോട്ട് 3 നീങ്ങുകയുമാണല്ലോ വേണ്ടത്.

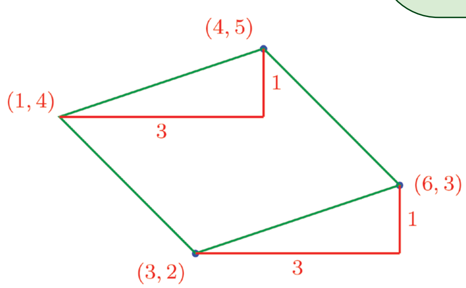
അതായത്,

- y-സൂചകസംഖ്യ 1 കുറയ്ക്കണം.
- x-സൂചകസംഖ്യ 3 കുറയ്ക്കണം.

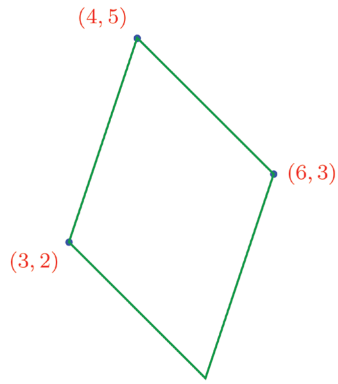
അപ്പോൾ നാലാം മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (1, 4):

A, B, C എന്നിങ്ങനെ മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

(x(B) + x(C) − x(A), y(B) + y(C) − y(A)) എന്ന് Input Bar ൽ കൊടുത്താൽ D എന്ന ഒരു ബിന്ദു കിട്ടും. ABDC ഒരു സാമാന്തരികമാണോ? എന്തുകൊണ്ട്? ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

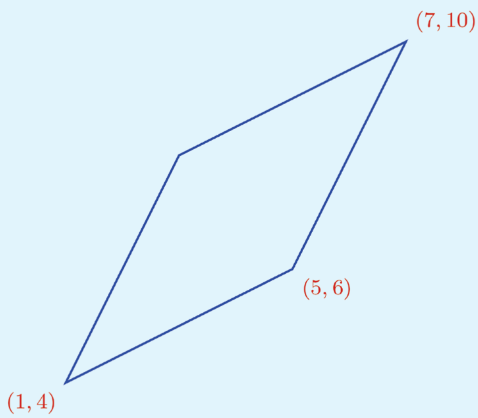


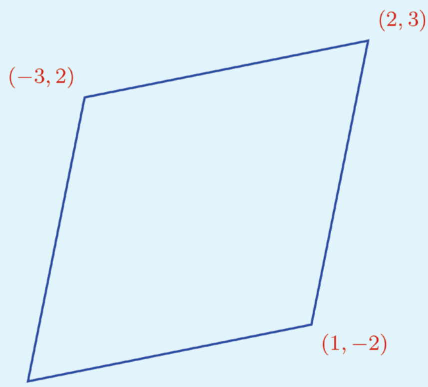
ഇതേ മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ മൂലകളായി മൂന്നാമതൊരു സാമാന്തരികവും വരയ്ക്കാമല്ലോ.



ഈ സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലാം മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാമോ ?

(1) ചിത്രത്തിലെ സാമാന്തരികങ്ങളുടെ നാലാം മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക:

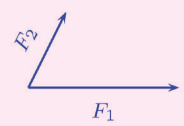




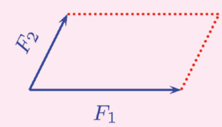
ബലസാമാന്തരികം

ഒരു വസ്തുവിൽ ബലം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ സ്ഥാനം, വേഗം മുതലായവയിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റം, ബലത്തിന്റെ അളവിനെ മാത്രമല്ല, അതു പ്രയോഗിക്കുന്ന ദിശയേയും ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. ഒരേ വസ്തുവിൽ രണ്ടു ബലങ്ങൾ. രണ്ടു ദിശയിൽ പ്രയോഗിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന അതേ മാറ്റം, ഒരേയൊരു നിശ്ചിത ബലം നിശ്ചിത ദിശയിൽ പ്രയോഗിക്കുന്നതിലൂടെ വരുത്താൻ കഴിയും.

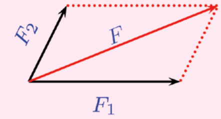
ഈ ബലം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്, പരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെ തിരിച്ചറിഞ്ഞ ഒരു മാർഗമുണ്ട്. ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന്, ആദ്യത്തെ രണ്ടു ബലങ്ങളുടെ അളവുകൾക്ക് ആനുപാതികമായ നീളമുള്ള വരകൾ (ഒരു ന്യൂട്ടൺ ബലത്തിന് ഒരു സെന്റിമീറ്റർ എന്നോ മറ്റോ), അവ പ്രയോഗിക്കുന്ന ദിശയ്ക്കനുസരിച്ച് വരയ്ക്കുക.



ഇനി ഇവ സമീപവശങ്ങളായി സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുക.

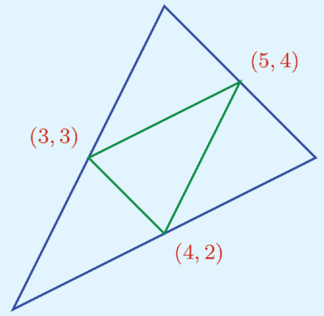


ഈ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ ദിശയിലാണ്, ഈ രണ്ടു ബലങ്ങൾക്കും പകരമായ ഒറ്റ ബലം; അതിന്റെ അളവ്, ആദ്യം എടുത്ത തോതനുസരിച്ച്, വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളത്തിന് ആനുപാതികവുമായിരിക്കും.



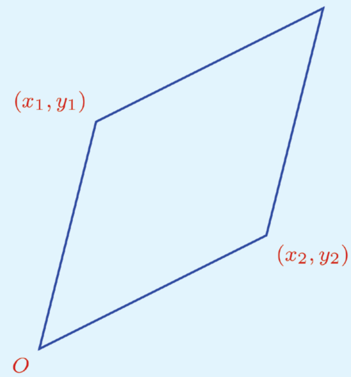
ബലങ്ങളുടെ സാമാന്തരിക തത്വം (parallelogram law of forces) എന്നാണ് ഇത് അറിയപ്പെടുന്നത്.

(2) ചിത്രത്തിലെ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാണ്:

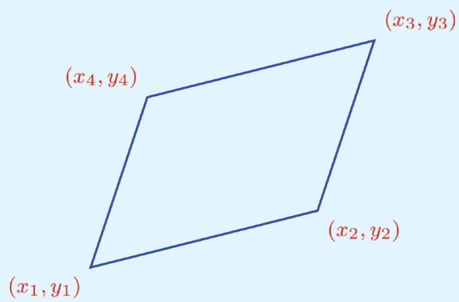


വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെയെല്ലാം സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(3) (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ആധാരബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ സമീപ വശങ്ങളായ സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലാമത്തെ മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?



(4) ചിത്രത്തിൽ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലു മൂലകളുടെയും സൂചകസംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു:



സൂചകസംഖ്യകൾ തമ്മിൽ ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ബന്ധമുണ്ടെന്നു തെളിയിക്കുക:

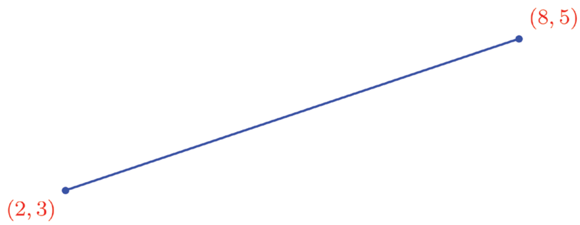
$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4$$

$$y_1 + y_3 = y_2 + y_4$$

മധ്യബിന്ദു

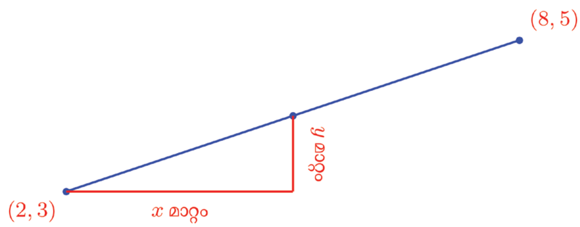
ചില ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകളിൽനിന്ന്, ഈ ബിന്ദുക്കളുമായി ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ ജ്യാമിതീയമായി ബന്ധപ്പെട്ട മറ്റു ചില ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന പ്രശ്നങ്ങളാണ് ഇതുവരെ ചെയ്ത കണക്കുകളെല്ലാം. ഇത്തരത്തിലുള്ള മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം.

ഒരു വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തിന്റെയും സൂചകസംഖ്യകളാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

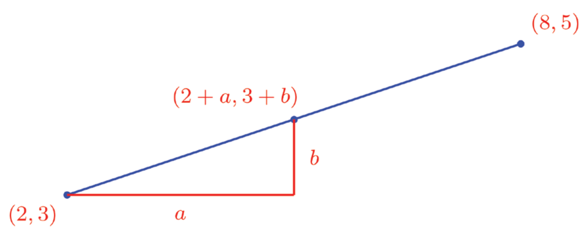


ഈ വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കണം.

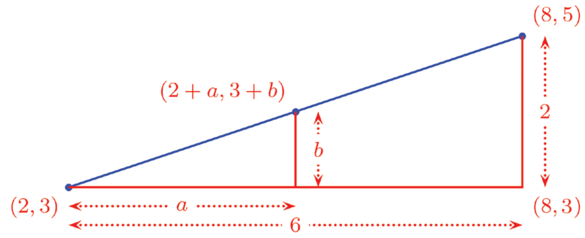
(2, 3) ൽ നിന്ന് (8, 5) ലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ പകുതി ദൂരെയുള്ള ബിന്ദുവാണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്. (2, 3) ൽ നിന്ന് ഈ സ്ഥാനത്തെത്തുമ്പോൾ, x-സൂചകസംഖ്യയിലും y-സൂചകസംഖ്യയിലും ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ, മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളായി.



ഇവയെ a, b എന്നെടുത്താൽ, മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(2 + a, 3 + b)$ എന്നെഴുതാം:

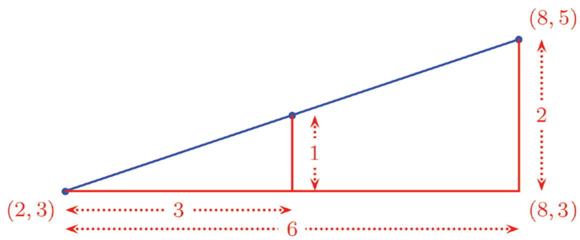


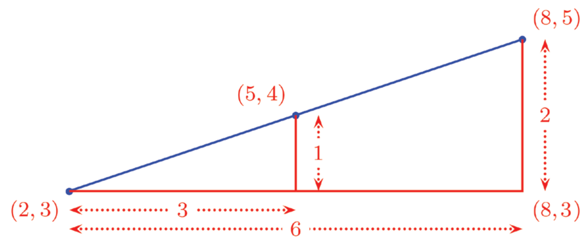
(2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് (8, 5) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കെത്തുമ്പോൾ സൂചകസംഖ്യകളിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റവും ത്രികോണം വരച്ച് കാണിക്കാം:



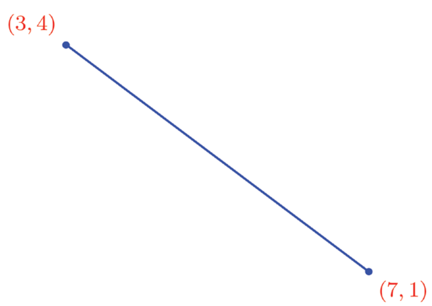
ഈ ചിത്രത്തിലെ വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിനും, അതിനുള്ളിലെ ചെറിയ മട്ടത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണല്ലോ (എങ്ങനെ?). അതിനാൽ അവയുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലാണ്.

ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ പകുതിയാണ്; അപ്പോൾ ലംബവശങ്ങളും പകുതി തന്നെ. അതായത്, a യും b യും 3 ഉം 1 ഉം ആണ്. മധ്യബിന്ദു (5, 4).

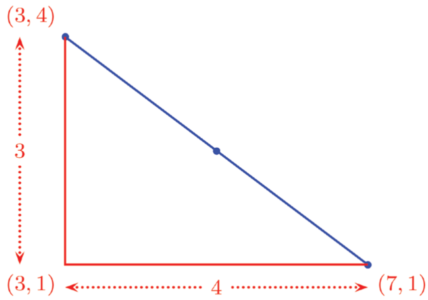


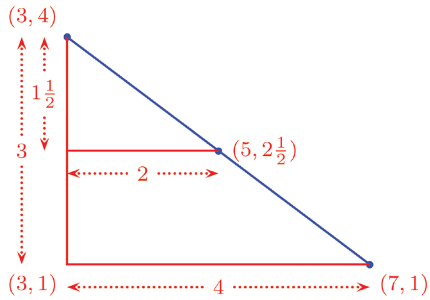


ഇനി വര ഇങ്ങനെയായാലോ ?



(3, 4)ൽ നിന്ന് (7, 1) ലേക്ക് എത്തുമ്പോൾ x-സൂചകസംഖ്യ 4 കൂടുകയും, y-സൂചകസംഖ്യ 3 കുറയുകയുമാണ് ചെയ്യുന്നത്; അപ്പോൾ മധ്യബിന്ദുവിലെത്താൻ x-സൂചകസംഖ്യ 2 കൂട്ടുകയും, y-സൂചകസംഖ്യ $1\frac{1}{2}$ കുറയ്ക്കുകയുമാണ് ചെയ്യേണ്ടത്.

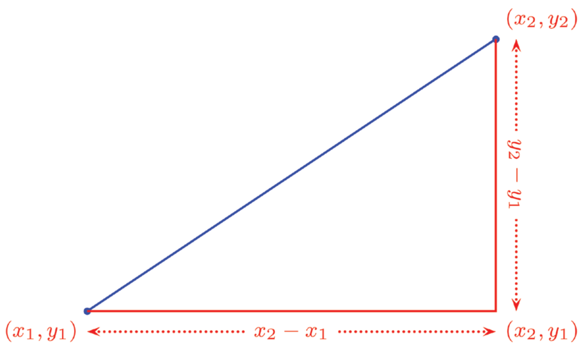


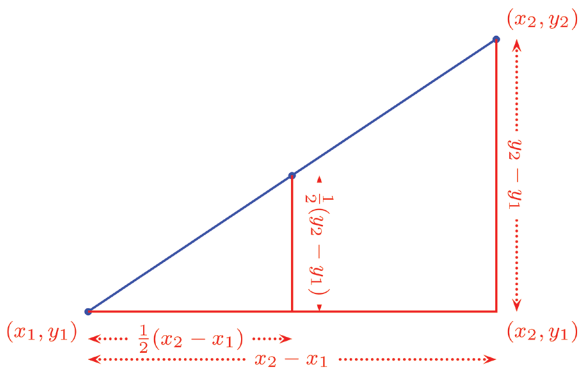


അങ്ങനെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(5, 2\frac{1}{2}\right)$ എന്നു കണക്കാക്കാം.

ഇനി പൊതുവേ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നെടുത്ത്, മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കി നോക്കാം.

ഇവയുടെ സ്ഥാനങ്ങൾ പലതരത്തിലാകാം. ആദ്യം ഇങ്ങനെയെടുക്കാം:





മധ്യബിന്ദുവിന്റെ x-സൂചകസംഖ്യ

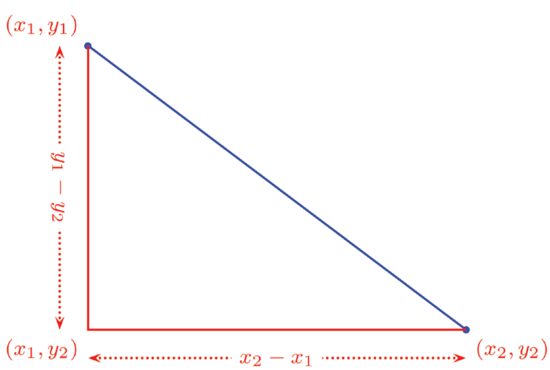
$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

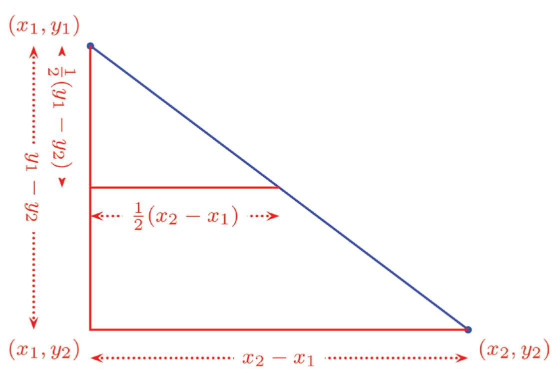
എന്നും y-സൂചകസംഖ്യ

$$y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

എന്നും കിട്ടിയില്ലേ ?

ബിന്ദുക്കൾ ഇങ്ങനെയായാലോ ?





മധ്യബിന്ദുവിന്റെ x-സൂചകസംഖ്യ

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

y-സൂചകസംഖ്യ

$$y_1 - \frac{1}{2}(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദു ലഭിക്കാൻ (A + B)/2 എന്ന് Input Bar ൽ നൽകിയാൽ മതി.

(x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം പരസ്പരം മാറ്റി വരച്ചു നോക്കൂ. എന്തു കിട്ടി?

(x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദു

$$\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$$

(1) (2,3), (6, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വ്യാസമായി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നു. വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

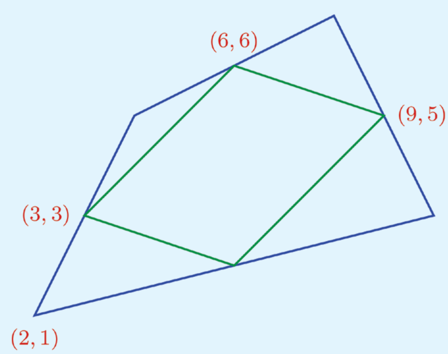
(2) ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ ഒരു ജോടി എതിർമൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (4, 5) ഉം (1, 3) ഉം ആണ്. അതിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക. രണ്ടാമത്തെ വികർണ്ണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

(3) $A(1, 3)$, $B(8, 6)$, $C(12, 13)$, $D(5, 10)$ എന്നിവ മൂലകളായി $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുന്നു. $ABCD$ സാമാന്തരികമാണെന്ന് സമർത്ഥിക്കുക.

(4) സൂചകസംഖ്യകൾ (3, 5), (9, 13), (10, 6) ആയ ബിന്ദുക്കൾ മൂലകളായ ത്രികോണം സമപാർശ്വമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(4) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം (1, 2) ഉം, അതിലെ ഒരു ബിന്ദു (3, 5) ഉം ആണ്. ഈ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസത്തിന്റെ മറ്റേ അറ്റം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(6) ചിത്രത്തിലെ വലിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാണ് അതിനുള്ളിലെ ചെറിയ ചതുർഭുജം വരച്ചിരിക്കുന്നത്.



(i) വലിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ മറ്റു മൂന്നു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

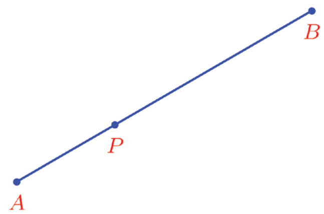
(ii) ചെറിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ നാലാം മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

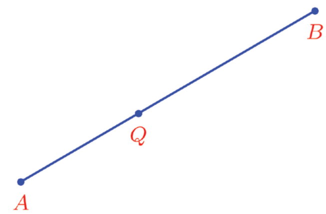
(7) സൂചകസംഖ്യകൾ (0, 0), (0, 4), (3, 0) ആയ ബിന്ദുക്കൾ മൂലകളായ ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

അംശബന്ധം

രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദു, വരയെ രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. വരയിലെ മറ്റേതെങ്കിലും ബിന്ദു എടുത്താൽ, അത് വരയെ വ്യത്യസ്ത നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. വരയിലെ ഇത്തരം ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം സൂചിപ്പിക്കാൻ അംശബന്ധം ഉപയോഗിക്കാം (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **അംശബന്ധം** എന്ന പാഠത്തിലെ **വരയുടെ ഭാഗങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം ഓർക്കുക).

ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:





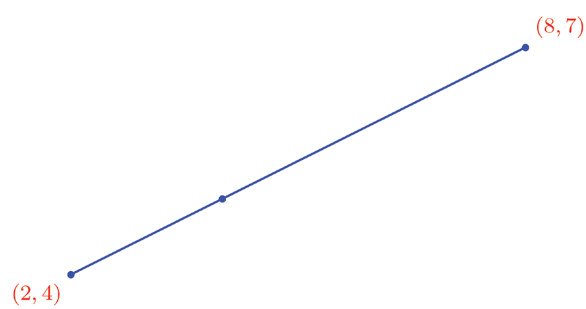
ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ, AP യുടെ നീളം AB യുടെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗവും, PB യുടെ നീളം AB യുടെ മിച്ചമുള്ള $\frac{2}{3}$ ഭാഗവുമാണ്.

ഇക്കാര്യം അംശബന്ധമായി പറയുന്നതെങ്ങനെ ?

P എന്ന ബിന്ദു, A യും B യും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ $1 : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു. മറിച്ച് രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ, Q എന്ന ബിന്ദു A, B ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ $2 : 3$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു എന്നു പറഞ്ഞാൽ എന്താണർഥം ?

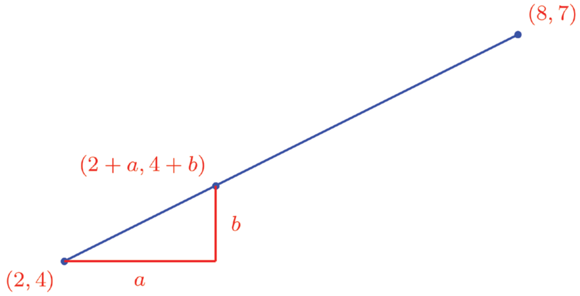
AQ വിന്റെ നീളം AB യുടെ നീളത്തിന്റെ $\frac{2}{5}$ ഭാഗമാണ് (QB യുടെ നീളം AB യുടെ നീളത്തിന്റെ $\frac{3}{5}$ ഭാഗവും).

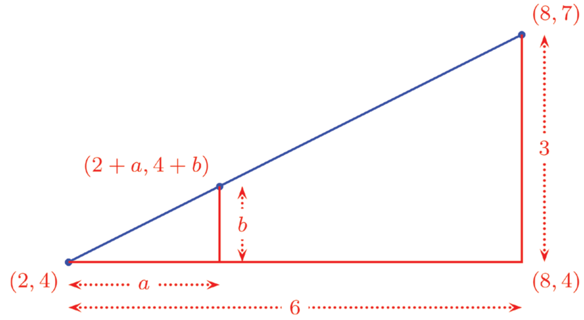
നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിൽ ഒരു വരയെ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, മധ്യബിന്ദു കണക്കാക്കിയ മാർഗംതന്നെ (അല്പം വ്യത്യാസം വരുത്തി) ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, (2, 4), (8, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ $1 : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാം



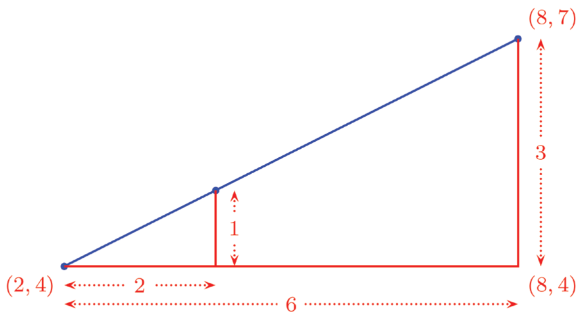
മധ്യബിന്ദു കണക്കാക്കിയ രീതിയിൽത്തന്നെ, (2, 4) ൽ നിന്ന് നമുക്കാവശ്യമായ ബിന്ദുവിലേക്കെത്തുമ്പോൾ x-സൂചകസംഖ്യയിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റം a എന്നും, y-സൂചകസംഖ്യയിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റം b എന്നും എടുത്ത് മാറ്റത്തിനെ ത്രികോണത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്താം.

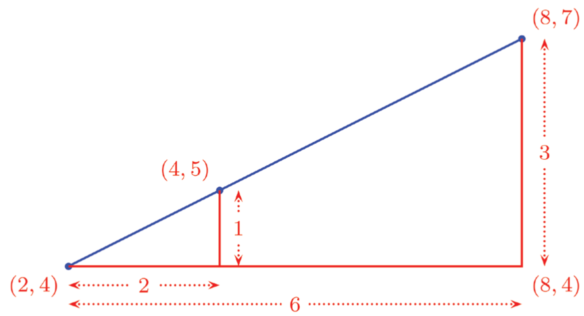
(2, 4) ൽ നിന്ന് (8, 7) ൽ എത്തുമ്പോൾ സൂചകസംഖ്യകളിൽ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റങ്ങളും ഇങ്ങനെ വരച്ചു കാണിക്കാം:





ഇതിൽ വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ് ചെറിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം; അതിനാൽ ലംബവശങ്ങളും അതുപോലെതന്നെ. അപ്പോൾ അവയുടെ നീളങ്ങളും, അതിൽനിന്ന് നമുക്കാവശ്യമായ ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളും കണക്കാക്കാമല്ലോ.





(2, 4), (8, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്ക് A, B എന്നും, നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട ബിന്ദുവിന് P എന്നും പേരിട്ടാൽ, മുകളിൽചെയ്ത കണക്കുകൂട്ടലുകൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

(1) $AP : PB = 1 : 2$ ആയതിനാൽ AB എന്ന നീളത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ് AP എന്ന നീളം.

(2) A യിൽ നിന്ന് B യിൽ എത്തുമ്പോൾ

   (i) x-സൂചകസംഖ്യ $8 - 2 = 6$ കൂടുന്നു.

   (ii) y-സൂചകസംഖ്യ $7 - 4 = 3$ കൂടുന്നു.

(3) A യിൽ നിന്ന് P യിൽ എത്തുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റം ഇവയുടെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ്.

   (i) x-സൂചകസംഖ്യ $6 \times \frac{1}{3} = 2$ കൂടുന്നു.

   (ii) y-സൂചകസംഖ്യ $3 \times \frac{1}{3} = 1$ കൂടുന്നു.

(4) P യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ

(i) x-സൂചകസംഖ്യ $2 + 2 = 4$

(ii) y-സൂചകസംഖ്യ $4 + 1 = 5$

(5) P യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(4, 5)$

A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകളും, ഭാഗിക്കുന്ന അംശബന്ധവും മാറിയാലും, ഇതേ രീതിയിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാമല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി, $(1, 6), (11, 2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ $3 : 5$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

ഇപ്പോൾ ചെയ്തതുപോലെ, ഈ ബിന്ദുക്കൾക്ക് A, B എന്നും, ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന് P എന്നും പേരിട്ട് തുടങ്ങാം:

(1) $AP : PB = 3 : 5$ ആയതിനാൽ AB എന്ന നീളത്തിന്റെ $\frac{3}{8}$ ഭാഗമാണ് AP എന്ന നീളം.

(2) A യിൽ നിന്ന് B യിൽ എത്തുമ്പോൾ

(i) x-സൂചകസംഖ്യ $11 - 1 = 10$ കൂടുന്നു.

(ii) y-സൂചകസംഖ്യ $6 - 2 = 4$ കുറയുന്നു.

(3) A യിൽ നിന്ന് P യിൽ എത്തുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റം ഇവയുടെ $\frac{3}{8}$ ഭാഗമാണ്.

(i) x-സൂചകസംഖ്യ $10 \times \frac{3}{8} = 3\frac{3}{4}$ കൂടുന്നു.

(ii) y-സൂചകസംഖ്യ $4 \times \frac{3}{8} = 1\frac{1}{2}$ കുറയുന്നു.

(4) P യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ:

(i) x-സൂചകസംഖ്യ $1 + 3\frac{3}{4} = 4\frac{3}{4}$

(ii) y-സൂചകസംഖ്യ $6 - 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

(5) P യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(4\frac{3}{4}, 4\frac{1}{2}\right)$

A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദു കിട്ടാൻ A + (3/8) (B − A) എന്ന് Input Bar ൽ കൊടുത്താൽ മതി.

(1) A എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(3, 2)$ ഉം B എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(8, 7)$ ഉം ആണ്. AB എന്ന വരയെ ചുവടെ പറയുന്ന അംശബന്ധങ്ങളിൽ ഭാഗിക്കുന്ന P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക:

(i) $AP : PB = 2:3$

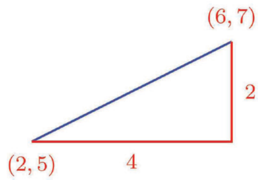
(ii) $AQ : QB = 3:2$

(2) (1, 6), (5, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ (−1, 5), (3, 7), (1, 1) ഇവയാണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കുക.

വരക്കണക്ക്

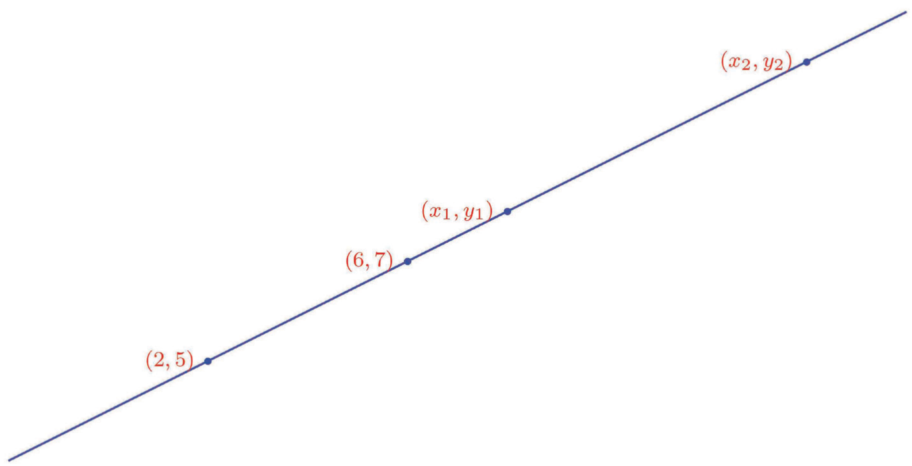
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



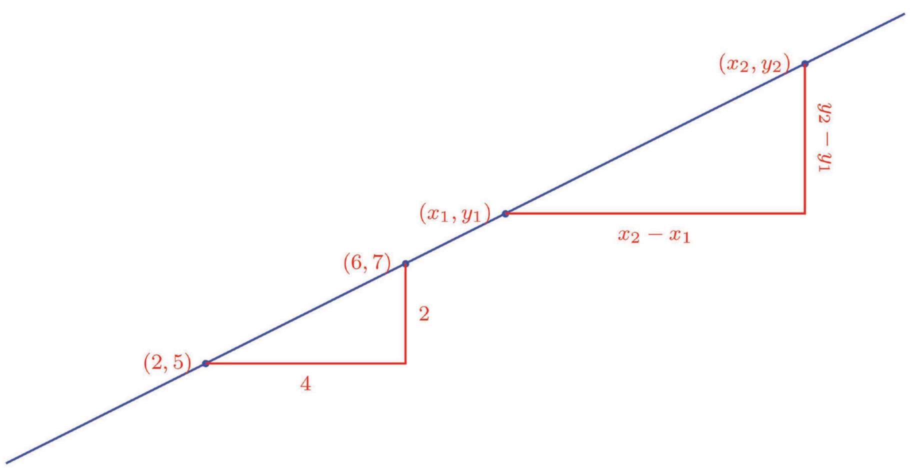
(2, 5) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് (6, 7) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് നീങ്ങുമ്പോൾ x-സൂചകസംഖ്യ 4 ഉം y-സൂചകസംഖ്യ 2 ഉം കൂടുന്നു.

അതായത്, x-സൂചകസംഖ്യ കൂടുന്നതിന്റെ പകുതിയാണ് y-സൂചകസംഖ്യ കൂടുന്നത്.

വര നീട്ടിവരച്ച്, അതിൽ മറ്റേതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ (x_1, y_1) ഉം (x_2, y_2) ഉം എടുത്താലോ?



(x_1, y_1)ൽ നിന്ന് (x_2, y_2) ലേക്ക് നീങ്ങുമ്പോൾ സൂചകസംഖ്യകളിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റം ഇങ്ങനെ കാണാം:



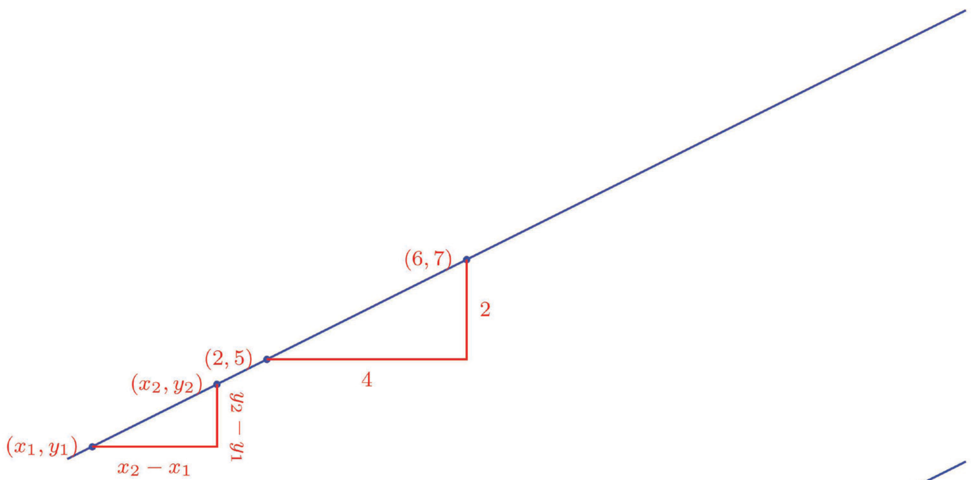
$y_2 - y_1$ ഉം $x_2 - x_1$ ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ് ?

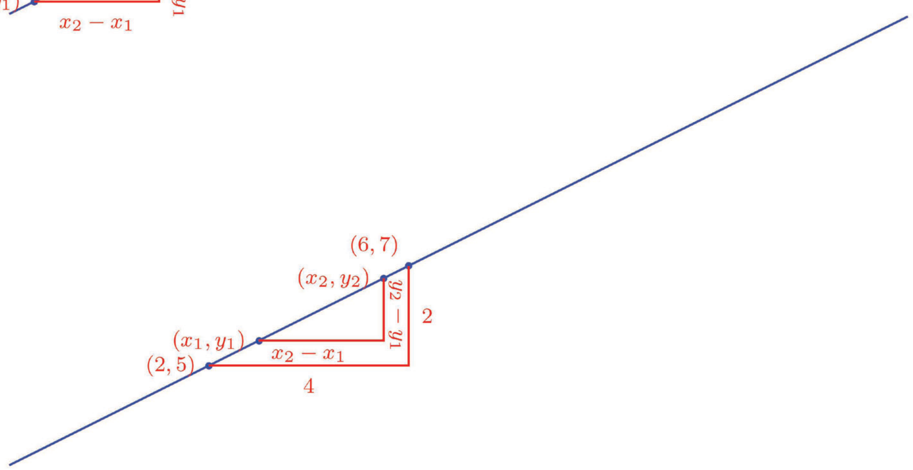
അത് ചെറിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരവും പാദവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം തന്നെയല്ലേ ? (എന്തുകൊണ്ട് ?).

അപ്പോൾ

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ (2, 5), (6, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിൽ എവിടെ ആയാലും ഈ ബന്ധം ശരിയാകുമല്ലോ.



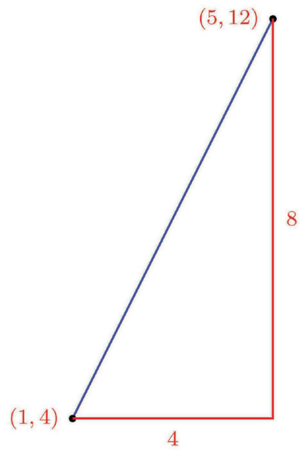


അപ്പോൾ ഈ വരയിലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെയും സൂചകസംഖ്യകളെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം ?

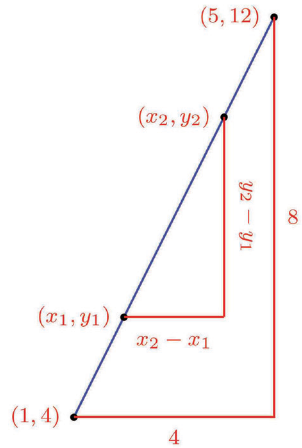
(2, 5), (6, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേക്ക് നീങ്ങുമ്പോൾ, y-സൂചകസംഖ്യകളിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റം x-സൂചകസംഖ്യകളിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

(2, 5), (6, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്കു പകരം, മറ്റേതെങ്കിലും ബിന്ദുക്കൾ എടുത്താലോ ?

ഉദാഹരണമായി, (1, 4), (5, 12) എന്നെടുത്തു നോക്കാം. ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലൂടെ (1, 4) ൽ നിന്ന് (5, 12) ലേക്ക് എത്തുമ്പോൾ, x-സൂചകസംഖ്യ 4 കൂടി; y-സൂചകസംഖ്യ 8 ഉം. അതായത്, x ലെ മാറ്റത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് y ലെ മാറ്റം:



ഇതിലെ മറ്റേതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ എടുത്താലോ ?



വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം, പാദത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങായതിനാൽ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരവും അതിന്റെ പാദത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാകണമല്ലോ. അപ്പോൾ

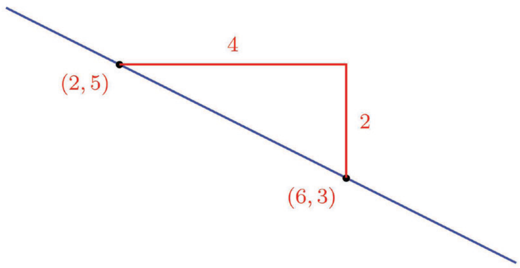
$$y_2 - y_1 = 2(x_2 - x_1)$$

അതായത്

> (1, 4), (5, 12) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേക്ക് നീങ്ങുമ്പോൾ, y ലെ മാറ്റം, x ലെ മാറ്റത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്.

ഈ രണ്ടു വരകളിലും x കൂടുമ്പോൾ y യും കൂടുന്നു. മറിച്ചും സംഭവിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, (2, 5), (6, 3) എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താൽ, x-സൂചകസംഖ്യ 4 കൂടുമ്പോൾ y-സൂചകസംഖ്യ 2 കുറയുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്.



a എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമ്മിക്കുക. A എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക.

(x(A) + a, y(A) + 2a) എന്ന് Input Bar ൽ നൽകിയാൽ പുതിയ ഒരു ബിന്ദു ലഭിക്കും. സ്ലൈഡറിന് Animation നൽകി ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപാത നിരീക്ഷിക്കൂ. ബിന്ദുവിന്റെ Trace on നൽകി നോക്കാം. A യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

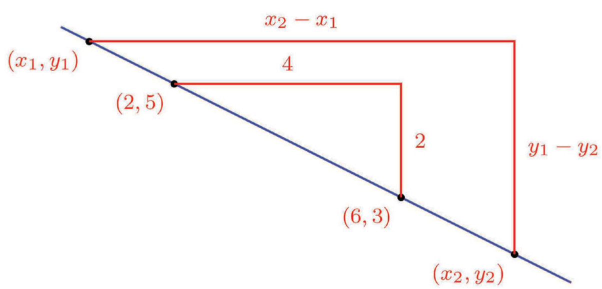
ഇത് മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറയാം. (2, 5) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് (6, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് നിങ്ങുമ്പോൾ

x-സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റം $6 - 2 = 4$

y-സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റം $3 - 5 = -2$

അപ്പോൾ y-സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റം, x-സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റത്തെ $-\frac{1}{2}$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ് എന്നു പറയാം.

വരയിലെ മറ്റേതെങ്കിലും ബിന്ദുക്കൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) എടുത്താലോ ?



ചിത്രത്തിലെ വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വിലങ്ങനെയുള്ള വശം $x_2 - x_1$ ഉം, കുത്തനെയുള്ള വശം $y_1 - y_2$ ഉം ആണല്ലോ. അപ്പോൾ

$$y_1 - y_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

(x_1, y_1)ൽ നിന്ന് (x_2, y_2) ലേക്ക് നീങ്ങുമ്പോൾ

x-സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റം $x_2 - x_1$

y-സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റം $y_2 - y_1$

അപ്പോൾ മുകളിലെ സമവാക്യം, മാറ്റങ്ങളുടെ ബന്ധമായി ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

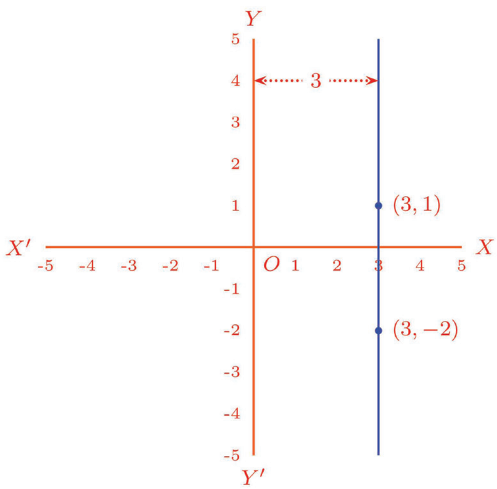
$$y_2 - y_1 = -\frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

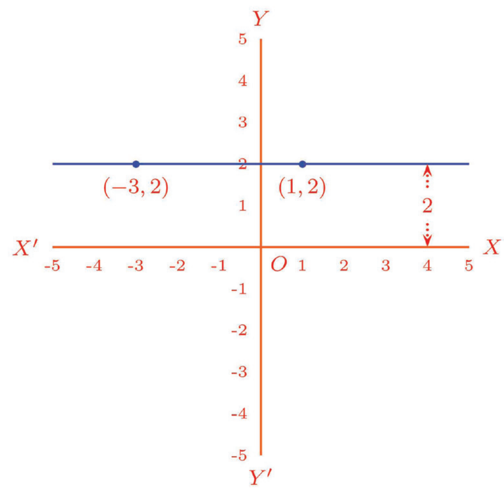
ഈ മാറ്റങ്ങളുടെ ബന്ധത്തെക്കുറിച്ച് പൊതുവായി എന്തു പറയാം ?

(2, 5), (6, 3) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേക്ക് നീങ്ങുമ്പോൾ, y ലെ മാറ്റം, x ലെ മാറ്റത്തിനെ $-\frac{1}{2}$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ്.

ഈ ഉദാഹരണങ്ങളിലെല്ലാം, വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേക്ക് നീങ്ങുമ്പോൾ x-സൂചകസംഖ്യകളും y-സൂചകസംഖ്യകളും മാറുന്നു. അങ്ങനെ മാറാത്ത വരകളുണ്ടോ ?

y-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും x-സൂചകസംഖ്യ ഒന്നു തന്നെയല്ലേ ? മറിച്ച്, x-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും y-സൂചകസംഖ്യ ഒന്നുതന്നെയാണ്.





അപ്പോൾ ഈ ഉദാഹരണങ്ങളിൽനിന്നു കിട്ടുന്ന പൊതുതത്വം ഇങ്ങനെ പറയാം:

അക്ഷങ്ങളൊന്നിനും സമാന്തരമല്ലാത്ത ഒരു വരയിലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താലും y-സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റം, x-സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റത്തെ ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്

ഒരു വരയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ അറിയാമെങ്കിൽ, അതിലെ മറ്റു പല ബിന്ദുക്കളുടെയും സൂചകസംഖ്യകൾ ഇതുപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കാം.

ഉദാഹരണമായി മുകളിൽ ആദ്യം ചെയ്ത കണക്കിലെ വര നോക്കാം. (2,5), (6,7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിൽ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലെയും y-സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റം, x-സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റത്തിന്റെ പകുതിയാണെന്നു കണ്ടല്ലോ.

അപ്പോൾ ഇതിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ x-സൂചകസംഖ്യയോട് 2 കൂട്ടുകയും, y-സൂചകസംഖ്യയോട് 2 ന്റെ പകുതി 1 കൂട്ടുകയും ചെയ്താൽ, വരയിലെ മറ്റൊരു ബിന്ദു കിട്ടും. അങ്ങനെ വരയിലെ (2, 5) എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന്, വരയിലെ (4, 6) എന്ന ബിന്ദു കിട്ടും.

ഇതുപോലെ (4, 6)ൽ നിന്ന്, കണക്കിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന (6, 7) എന്ന ബിന്ദു കിട്ടും.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ 2 നോട് 2 വീതം കൂട്ടുകയും, 5 നോട് 1 വീതം കൂട്ടുകയും ചെയ്തുകൊണ്ടിരുന്നാൽ, ഈ വരയിലെ ഇത്തരം ബിന്ദുക്കൾ കിട്ടും:

(4,6), (6,7), (8,8), ...

കൂട്ടുന്നതിനു പകരം കുറച്ചാൽ, വരയിലെ ഈ ബിന്ദുക്കൾ കിട്ടും.

(0, 4), (–2, 3), (–4, 2), ...

ഇതുപോലെ ഈ കണക്ക് എങ്ങനെ ചെയ്യും ?

(4, 6), (7, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ മറ്റു ചില ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(4, 6)ൽ നിന്ന് (7, 4) ലേക്ക് നീങ്ങുമ്പോൾ

x-സൂചകസംഖ്യ 3 കൂടുന്നു.

y-സൂചകസംഖ്യ 2 കുറയുന്നു.

അപ്പോൾ (4, 6)ൽ നിന്നു തുടങ്ങി x-സൂചകസംഖ്യ 3 വീതം കൂട്ടുകയും, y-സൂചകസംഖ്യ 2 വീതം കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ വരയിലെ കുറേ ബിന്ദുക്കൾ കിട്ടുമല്ലോ.

(7, 4), (10, 2), (13, 0), ...

x-സൂചകസംഖ്യ 3 വീതം കുറയ്ക്കുകയും, y-സൂചകസംഖ്യ 2 വീതം കൂട്ടുകയും ചെയ്താൽ വരയിലെ മറ്റൊരു കൂട്ടം ബിന്ദുക്കൾ കിട്ടും.

(1, 8), (–2, 10), (–5, 12), ...

(1) (–1, 4), (1, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(2) (1, 2), (2, 4), (3, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക. ഈ വരയിലെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(3) $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയാണ്. $(1, y_1), (2, y_2), (3, y_3), \ldots$ എന്നീ ജോടികൾ സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദുക്കളെല്ലാം ഒരു വരയിൽത്തന്നെ ആയിരിക്കുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(4) $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ഉം $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ഉം സമാന്തരശ്രേണികളാണ്. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$ എന്നീ ജോടികൾ സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദുക്കളെല്ലാം ഒരു വരയിൽത്തന്നെ ആയിരിക്കുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

വരയുടെ ചരിവ്

അക്ഷങ്ങളൊന്നിനും സമാന്തരമല്ലാത്ത ഒരു വരയിലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താലും y-സൂചക സംഖ്യയിലെ മാറ്റം, x-സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റത്തെ ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ് എന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇത് മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം:

അക്ഷങ്ങളൊന്നിനും സമാന്തരമല്ലാത്ത ഒരു വരയിലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താലും y-സൂചക സംഖ്യയിലെ മാറ്റത്തെ x-സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റംകൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് ഒരേ സംഖ്യയാണ്

ഈ സംഖ്യയെ വരയുടെ **ചരിവ് (Slope)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി, (2, 8), (4, 9) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര നോക്കാം. ഇതിൽ ആദ്യത്തെ ബിന്ദുവിൽനിന്ന് രണ്ടാമത്തെ ബിന്ദുവിലേക്ക് നീങ്ങുമ്പോൾ

x-സൂചകസംഖ്യകളിലെ മാറ്റം $4 - 2 = 2$

y-സൂചകസംഖ്യകളിലെ മാറ്റം $9 - 8 = 1$

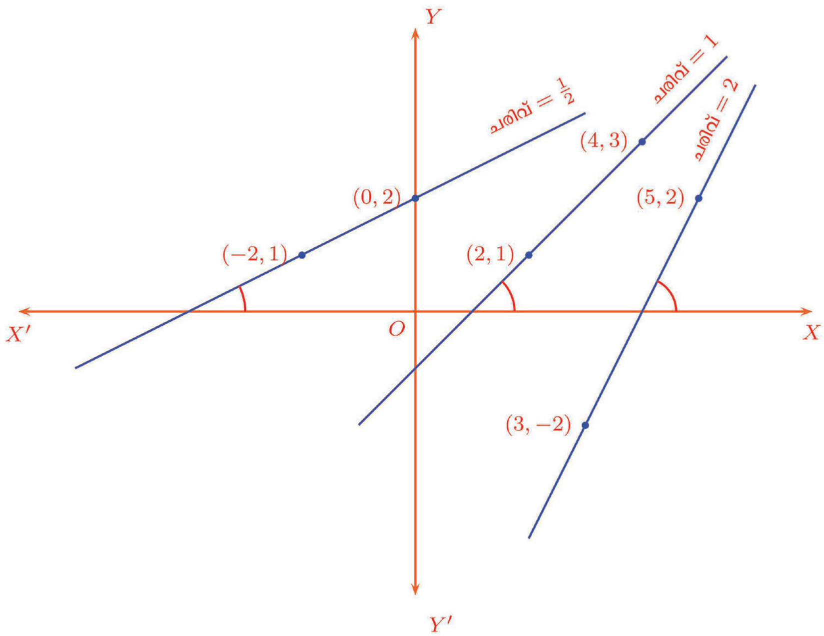
y-മാറ്റത്തെ x-മാറ്റം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ $\frac{1}{2}$. അപ്പോൾ (2, 8), (4, 9) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ചരിവ് $\frac{1}{2}$.

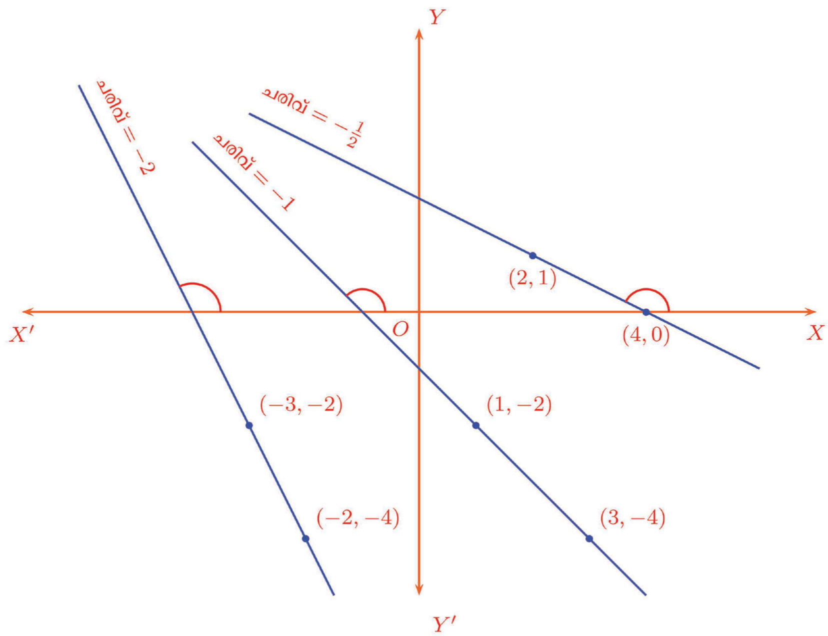
(2, 8), (4, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര ആയാലോ ?

ചരിവ്

$$\frac{6-8}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1$$

ഈ സംഖ്യയെ വരയുടെ ചരിവ് എന്നു പറയുന്നതിന്റെ കാരണമറിയാൻ, ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക:





രണ്ടു ചിത്രങ്ങളിലും ചരിവ് കൂടുമ്പോൾ, x-അക്ഷത്തിനു മുകളിലുള്ള വരയുടെ ഭാഗവും x-അക്ഷവും തമ്മിലുള്ള വലതുവശത്തെ കോൺ കൂടുന്നത് കണ്ടില്ലേ?

ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ, ചരിവുകൾ അധിസംഖ്യകൾ, കോണുകൾ മട്ടത്തെക്കാൾ ചെറുത്; രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ, ചരിവുകൾ ന്യൂനസംഖ്യകൾ, കോണുകൾ മട്ടത്തെക്കാൾ വലുതും.

അപ്പോൾ, വരയുടെ ചരിവ് എന്നു വിളിക്കുന്ന സംഖ്യ, വരയ്ക്ക് x-അക്ഷവുമായുള്ള ചരിവിനെ ത്തന്നെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

വരയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ അറിയാമെങ്കിൽ, വരയിലെ മറ്റു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുന്ന രീതി കണ്ടല്ലോ. പകരം വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവും, വരയുടെ ചരിവും അറിഞ്ഞാലും മതി.

ഉദാഹരണമായി, ഈ കണക്കു നോക്കുക:

> (1, 6) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വരയുടെ ചരിവ് $\frac{3}{4}$ ആണ്. ഈ വരയിൽ, x-സൂചകസംഖ്യ 4 ആയ ബിന്ദുവിന്റെ y-സൂചകസംഖ്യ എന്താണ്?

വരയുടെ ചരിവ് $\frac{3}{4}$ എന്നതിന്റെ അർഥം, വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേയ്ക്കു നീങ്ങുമ്പോൾ y-സൂചകസംഖ്യയിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റം, x-സൂചകസംഖ്യയിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തെ $\frac{3}{4}$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ് എന്നല്ലേ?

വരയിൽ, (1, 6) ൽനിന്ന് x-സൂചകസംഖ്യ 4 ആയ ബിന്ദുവിലേക്ക് നീങ്ങുമ്പോൾ x-സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റം $4 - 1 = 3$; അപ്പോൾ y-സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റം

$$3 \times \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$$

y-സൂചകസംഖ്യ

$$6 + 2\frac{1}{4} = 8\frac{1}{4}$$

അതായത് $\left(4, 8\frac{1}{4}\right)$ ഈ വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ്.

ജിയോജിബയിൽ വരച്ച ഒരു വരയുടെ ചരിവ് കണക്കാക്കാൻ slope ഉപയോഗിച്ച് വരയിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി.

ഇങ്ങനെ x-സൂചകസംഖ്യകൾ പലതായെടുത്ത്, വരയിലെ മറ്റു ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

(1) ചുവടെ പറയുന്ന ഓരോ ജോടി ബിന്ദുക്കളും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ചരിവ് കണക്കാക്കുക.

(i) (2,3), (4, 5) (ii) (2,3), (4, 1) (iii) (1, 1), (−1, −1) (iv) (0, 1), (1, 0)

(2) (2, 5) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വരയുടെ ചരിവ് $-\frac{2}{3}$ ആണ്. ഈ വരയിലെ മറ്റ് രണ്ട് ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(3) (3, 1) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വരയുടെ ചരിവ് $-\frac{1}{2}$ ആണ്. ചുവടെ പറയുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഈ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(i) (5, 2) (ii) (1, 0) (iii) (4, 3) (iv) (2, –1)

(4) $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയാണെങ്കിൽ $(1, y_1), (2, y_2), (3, y_3), \ldots$ എന്നീ ജോടികൾ സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദുക്കളെല്ലാം ഒരു വരയിൽത്തന്നെയാണെന്നു കണ്ടല്ലോ. ഈ വരയുടെ ചരിവും, സമാന്തരശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ് ?

(5) $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ഉം $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ഉം സമാന്തരശ്രേണികളാണ്. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$ എന്നീ ജോടികൾ സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദുക്കളെല്ലാം ഒരു വരയിൽത്തന്നെ ആയിരിക്കുമെന്നു കണ്ടു. ഈ വരയുടെ ചരിവും, സമാന്തരശ്രേണികളിലെ പൊതുവ്യത്യാസങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ് ?

(6) (1, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ, ചരിവ് $\frac{1}{2}$ ആയി വരയ്ക്കുന്ന വരയിലെയും, ഇതേ ബിന്ദുവിലൂടെ ചരിവ് –2 ആയി വരയ്ക്കുന്ന വരയിലേയും മറ്റൊരു ബിന്ദുകൂടി എഴുതുക. ഈ വരകൾ പരസ്പരം ലംബമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(സൂചന: പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തം)

വരയുടെ സമവാക്യം

ഒരു വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളും, വരയുടെ ചരിവും അറിയാമെങ്കിൽ, വരയിലെ മറ്റേതെങ്കിലും ബിന്ദുവിന്റെ x-സൂചകസംഖ്യയിൽ നിന്ന് ആ ബിന്ദുവിന്റെ y-സൂചകസംഖ്യ കണക്കാക്കുന്ന രീതി കണ്ടല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി ഈ കണക്കു നോക്കുക:

(2, 4), എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വരയുടെ ചരിവ് $\frac{2}{3}$ ആണ്. ഈ വരയിൽ x-സൂചകസംഖ്യ 11 ആയ ബിന്ദുവിന്റെ y-സൂചകസംഖ്യ എന്താണ്?

എങ്ങനെയാണ് ഇത് ചെയ്യുന്നത്?

(i) വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേയ്ക്ക് നീങ്ങുമ്പോൾ y-സൂചകസംഖ്യകളിലെ മാറ്റം x-സൂചകസംഖ്യകളിലെ മാറ്റത്തെ $\frac{2}{3}$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ്.

(ii) വരയിലെ x-സൂചകസംഖ്യ 11 ആയ ബിന്ദുവിന്റെ y-സൂചകസംഖ്യ y എന്നെടുത്താൽ $(11, y)$ വരയിലെ ബിന്ദുവാണ്.

(iii) (2, 4) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $(11, y)$ എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള x-മാറ്റം $11 - 2 = 9$,

y-മാറ്റം $y - 4$

(iv) $y - 4 = \frac{2}{3} \times 9 = 6$

(v) $y = 4 + 6 = 10$

അപ്പോൾ വരയിൽ x-സൂചകസംഖ്യ 11 ആയ ബിന്ദുവിന്റെ y-സൂചകസംഖ്യ 10.

ഇങ്ങനെ ഈ വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും x-സൂചകസംഖ്യ അറിഞ്ഞാൽ y-സൂചകസംഖ്യ കണക്കാക്കാം.

മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ ഈ വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും x-സൂചകസംഖ്യയും y-സൂചകസംഖ്യയും തമ്മിലൊരു ബന്ധമുണ്ട്.

അതു കണ്ടുപിടിക്കാൻ, വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y) എന്നെടുത്ത്, നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ കണക്കുകൂട്ടാം.

(i) വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേയ്ക്ക് നീങ്ങുമ്പോൾ y-സൂചകസംഖ്യകളിലെ മാറ്റം x-സൂചകസംഖ്യകളിലെ മാറ്റത്തെ $\frac{2}{3}$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ്.

(ii) (x, y) വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ്.

ഭൗതികം, ബീജഗണിതം, ജ്യാമിതി

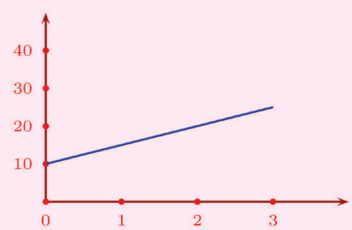
ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം, ആദ്യത്തെ സെക്കന്റിൽ 10 മീറ്റർ, അടുത്ത സെക്കന്റിൽ 15 മീറ്റർ, അതിനടുത്ത സെക്കന്റിൽ 20 മീറ്റർ എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി കൂടുന്നു എന്നു കരുതുക. അപ്പോൾ ഓരോ സെക്കന്റിലും അതിന്റെ വേഗവും മാറുന്നുണ്ടല്ലോ. അതായത്, ആദ്യത്തെ സെക്കന്റിലെ വേഗം 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്, രണ്ടാമത്തെ സെക്കന്റിലെ വേഗം 15 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നിങ്ങനെയാണ്.

കുറേക്കൂടി ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, വേഗം ഓരോ സെക്കന്റിലും 5 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ കൂടുന്നു എന്നു പറയാം. ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഭാഷയിൽ ത്വരണം (acceleration) ഓരോ സെക്കന്റിലും 5 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഈ വസ്തുവിന്റെ t സെക്കന്റിലെ വേഗം v കണ്ടുപിടിക്കാൻ

$v = 10 + 5t$ എന്ന ബീജഗണിത വാക്യം ഉപയോഗിക്കാം.

ഇനി ലംബമായ രണ്ടു അക്ഷങ്ങളിൽ t യും v യും അടയാളപ്പെടുത്തി, ഈ വേഗവും, സമയവുമായുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ ചിത്രം വരച്ചാലോ?



ഈ വരയുടെ ചരിവ് 5 ആണ്. ഇവിടെ ചരിവ് എന്നത്, t കൂടുന്നതനുസരിച്ച് v കൂടുന്നതിന്റെ നിരക്കാണല്ലോ; അതായത്, ത്വരണം.

(iii) (2, 4) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് (x, y) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള x-മാറ്റം $x - 2$, y-മാറ്റം $y - 4$.

(iv) $y - 4 = \frac{2}{3}(x - 2)$

അതായത്,

(2, 4) ൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന, ചരിവ് $\frac{2}{3}$ ആയ വരയിലെ ഏതു ബിന്ദു (x, y) എടുത്താലും $y - 4 = \frac{2}{3}(x - 2)$

വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും സൂചകസംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള ഈ ബന്ധത്തെ വരയുടെ സമവാക്യം എന്നാണ് പറയുന്നത്. അതായത്

(2, 4) ൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന, ചരിവ് $\frac{2}{3}$ ആയ വരയുടെ സമവാക്യം

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

ഈ സമവാക്യത്തെ ഭിന്നങ്ങൾ ഒഴിവാക്കി ഇങ്ങനെ എഴുതാമല്ലോ:

$$3(y - 4) = 2(x - 2)$$

അതായത്

$$3y - 12 = 2x - 4$$

ഇത് ലഘൂകരിച്ച് ഇങ്ങനെയെഴുതാം

$$2x - 3y + 8 = 0$$

അപ്പോൾ ഇങ്ങനെയും പറയാം

(2, 4) ൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന, ചരിവ് $\frac{2}{3}$ ആയ വരയുടെ സമവാക്യം

$$2x - 3y + 8 = 0$$

ഇനി ഈ ചോദ്യം നോക്കുക.

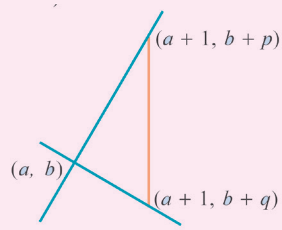
(−1, 2) ഉം (1, −2) ഉം യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം എന്താണ്?

(1, 3), (5, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും (2, 5), (6, 8) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും y വ്യത്യാസത്തെ x വ്യത്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് $\frac{3}{4}$ തന്നെയാണ്. ഓരോ ജോടിയും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക. ഈ വരകൾ തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?

ചരിവും ലംബവും

സമാന്തരവരകളുടെ ചരിവുകൾ തുല്യമാണെന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല. പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വരകളുടെ ചരിവുകൾ തമ്മിലെന്താണു ബന്ധം?

ചരിവുകൾ p, q ആയ രണ്ടു വരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു (a, b) എന്നെടുക്കാം. അപ്പോൾ $(a+1, b+p)$ എന്ന ബിന്ദു, ആദ്യത്തെ വരയിലാണ്; $(a+1, b+q)$ എന്ന ബിന്ദു രണ്ടാമത്തെ വരിയിലും. (കാരണം?) വരകൾ ലംബമാണെങ്കിൽ,



(a, b), $(a+1, b+p)$, $(a+1, b+q)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളാണ്; രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചതാണ് കർണ്ണം. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളുടെ വർഗം $p^2 + 1$, $q^2 + 1$ എന്നിവയും, കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം $|p - q|$ഉം ആയതിനാൽ

$(p^2 + 1) + (q^2 + 1) = (p - q)^2$ എന്നു കിട്ടും. ഇതു ലഘൂകരിച്ചാൽ

$$2 = -2pq$$

അഥവാ

$$pq = -1$$

അതായത്,

പരസ്പരം ലംബമായ വരകളിൽ ഒരു വരയുടെ ചരിവ്, മറ്റേ വരയുടെ ചരിവിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെ ന്യൂനമാണ്.

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

(i) വരയുടെ ചരിവ്

$$\frac{2-(-2)}{-1-1} = \frac{4}{-2} = -2$$

(ii) വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേയ്ക്ക് നീങ്ങുമ്പോൾ y-സൂചകസംഖ്യകളിലെ മാറ്റം x-സൂചകസംഖ്യകളിലെ മാറ്റത്തെ -2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ്.

(iii) വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y) എന്നെടുക്കാം.

(iv) $(-1, 2)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് (x, y) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള x മാറ്റം $x - (-1) = x + 1$
y-മാറ്റം $y - 2$.

(v) $y - 2 = -2(x + 1)$

അപ്പോൾ വരയുടെ സമവാക്യം

$$y - 2 = -2(x + 1)$$

ഇത് ഇങ്ങനെ എഴുതാമല്ലോ.

$$y - 2 = -2x - 2$$

ഇത് ലഘൂകരിച്ച്

$$y = -2x$$

എന്നെഴുതാം. അല്ലെങ്കിൽ

$$2x + y = 0$$

എന്നും എഴുതാം

ജിയോജിബ്രയിലെ Input Bar ൽ 2x − 3y + 8 = 0 എന്ന് എഴുതിയാൽ ഈ സമവാക്യം സൂചിപ്പിക്കുന്ന വര കിട്ടും. a, b, c എന്നിങ്ങനെ മൂന്ന് സ്ലൈഡറുകൾ നിർമ്മിച്ച് ax + by + c = 0 എന്ന് Input Bar ൽ എഴുതുക. സ്ലൈഡറുകൾ നീക്കുന്നതിനനുസരിച്ച് വരയ്ക്ക് വരുന്ന മാറ്റം നോക്കുക.

ബഹുപദങ്ങളും സമവാക്യങ്ങളും

ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ ബഹുപദങ്ങളുടെ ചിത്രങ്ങൾ വരച്ചത് ഓർമ്മയുണ്ടല്ലോ. $p(x) = 2x + 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രം വരച്ചത് എങ്ങനെയാണ്? ഇപ്പോൾ ആ രീതി ഇങ്ങനെ പറയാം:

x ആയി പല സംഖ്യകളെടുത്ത്, ഓരോന്നിനും $2x + 1$ ആയി കിട്ടുന്ന സംഖ്യ കണക്കാക്കി;

ഈ സംഖ്യാജോടികൾ സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി ചേർത്തു വരച്ചു.

അതായത് ഇങ്ങനെ വരച്ച വരയുടെ സമവാക്യം

$$y = 2x + 1$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

$$p(x) = ax + b$$

എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രമായ വരയുടെ സമവാക്യം

$$y = ax + b$$

(1) ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഓരോ ജോടി ബിന്ദുക്കളെയും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകളുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $(0, 0), (1, 1)$ (ii) $(0, 0), (1, -1)$

(iii) $(1, 0), (0, 1)$ (iv) $(-1, 0), (0, -1)$

(2) (i) $(-1, 3)$ ഉം $(2, 5)$ ഉം യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(ii) (x, y) എന്ന ബിന്ദു ഈ വരയിലാണെങ്കിൽ $(x + 3, y + 2)$ എന്ന ബിന്ദുവും ഈ വരയിൽത്തന്നെയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(3) (i) $(-1, 1)$ ഉം $(2, 7)$ ഉം യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(ii) x ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും $(x, 2x + 3)$ എന്ന ബിന്ദു ഈ വരയിൽ ത്തന്നെയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(4) ആധാരബിന്ദുവും, $(1, 2)$ എന്ന ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ഏതു ബിന്ദു വിന്റെയും x-സൂചകസംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് y-സൂചകസംഖ്യ എന്നു തെളിയിക്കുക.

(5) $(2, 0)$ ഉം $(0, 3)$ ഉം യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും x-സൂചകസംഖ്യ യുടെ പകുതിയും y-സൂചകസംഖ്യയുടെ മൂന്നിലൊന്നും കൂട്ടിയാൽ ഒന്നു കിട്ടുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

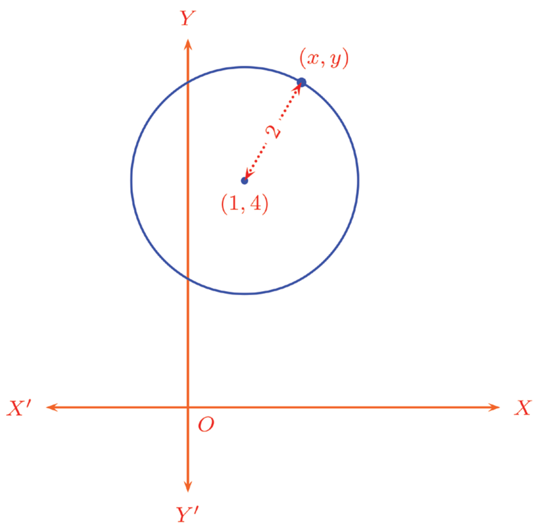
വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

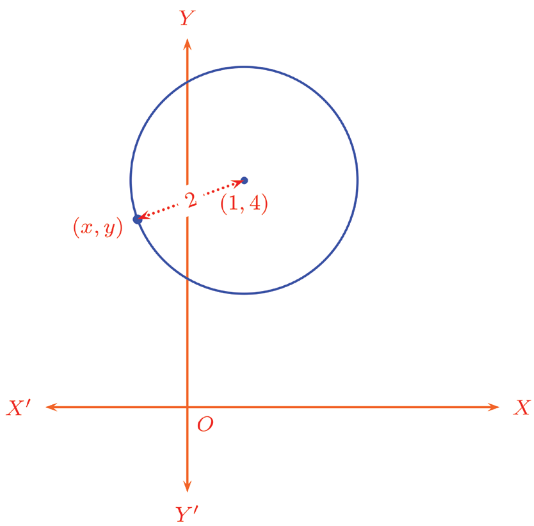
ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും യോജിപ്പിച്ച് ഒരു വര വരയ്ക്കാം; ഈ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ അറിയാമെങ്കിൽ, ഈ വരയുടെ സമവാക്യവും കണ്ടുപിടിക്കാം; അതായത്, വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും സൂചകസംഖ്യകൾ തമ്മി ലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം.

$(3, 5)$, $(6, 7)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വരയ്ക്കുക. ഈ വരയുടെ സമവാക്യം Algebra view ൽ കാണാൻ കഴിയും.

ഇതുപോലെ ഒരു ബിന്ദുവും ഒരു സംഖ്യയും നിശ്ചയിച്ചാൽ, ബിന്ദു കേന്ദ്രമായും, സംഖ്യ ആരമായും വൃത്തം വരയ്ക്കാം; കേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളും ആരമായ സംഖ്യയും അറിയാമെങ്കിൽ, വൃത്ത ത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും സൂചകസംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയുമോ?

ഉദാഹരണമായി, കേന്ദ്രം $(1, 4)$ എന്ന ബിന്ദുവും, ആരം 2 ഉം ആയ വൃത്തം നോക്കാം. ഈ വൃത്ത ത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിനും കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള അകലം 2 ആണ്.





$(1, 4)$ എന്ന ബിന്ദുവും, (x, y) എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലത്തിന്റെ വർഗം $(x - 1)^2 + (y - 4)^2$ ആണെന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

(x, y) എന്നത് വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവാണെങ്കിൽ, ഈ വർഗം $2^2 = 4$ ആണ്. അതായത്

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 4$$

അപ്പോൾ വൃത്തത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും സൂചകസംഖ്യകൾ ഈ സമവാക്യം അനുസരിക്കും; മറിച്ച്, ഈ സമവാക്യം അനുസരിക്കുന്ന ഏതു ജോടി സംഖ്യകൾ x, y എടുത്താലും, അവ സൂചക സംഖ്യകളായ ബിന്ദുവിന് $(1, 4)$ ൽ നിന്നുള്ള അകലം $\sqrt{4} = 2$ ആയിരിക്കും; അതായത് ഈ ബിന്ദു മേൽപറഞ്ഞ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവായിരിക്കും.

അപ്പോൾ ഇതാണ്, കേന്ദ്രം $(1, 4)$ ഉം, ആരം 2 ഉം ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം.

വേണമെങ്കിൽ ഇത് വിസ്തരിച്ച്

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$$

എന്നും എഴുതാം.

അപ്പോൾ, കേന്ദ്രം ആധാരബിന്ദുവും, ആരം 1 ഉം ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യമെന്താണ്?

ഈ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യ (x, y) എന്നെടുത്താൽ, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലത്തിന്റെ വർഗം $x^2 + y^2$; ഇത് ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിന് തുല്യമായതിനാൽ

$$x^2 + y^2 = 1$$

ഇതാണ് ഈ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം.

(1) കേന്ദ്രം ആധാരബിന്ദുവും, ആരം 5 ഉം ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക. ഈ വൃത്തത്തിലെ എട്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

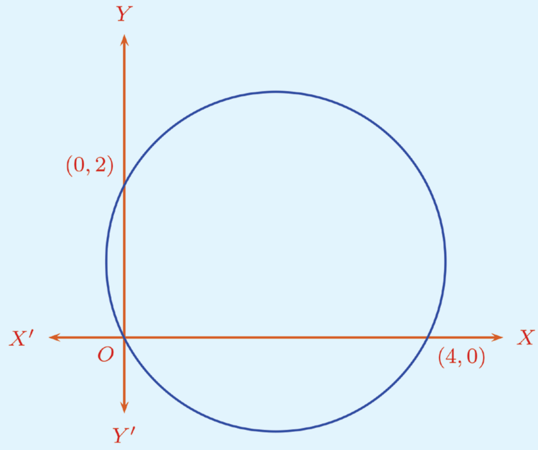
(2) $(2, 3)$, $(4, 7)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വ്യാസമായി വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നു.

(i) ഈ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

(ii) വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?

(iii) വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം എന്താണ്?

(3) ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം എന്താണ് ?

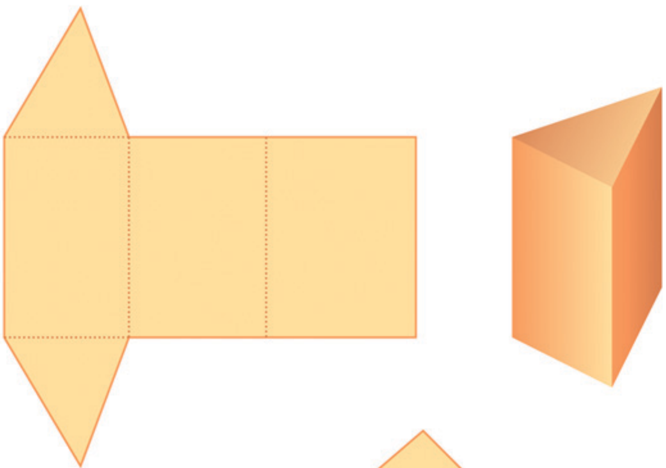


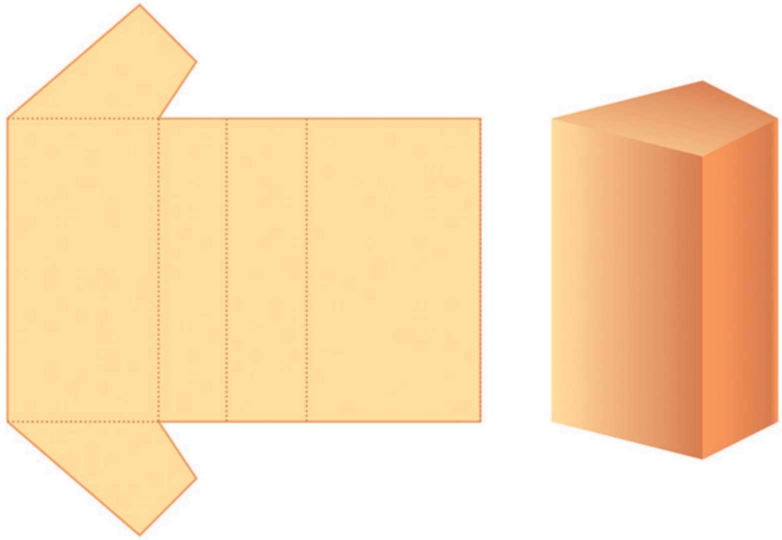
(4) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ എന്നാണ്. ഇതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളും, ആരവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

12 ഘനരൂപങ്ങൾ

സ്തൂപികകൾ

പല രീതിയിൽ കടലാസ് വെട്ടിയെടുത്ത്, മടക്കി ഒട്ടിച്ച്, സ്തംഭങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം:

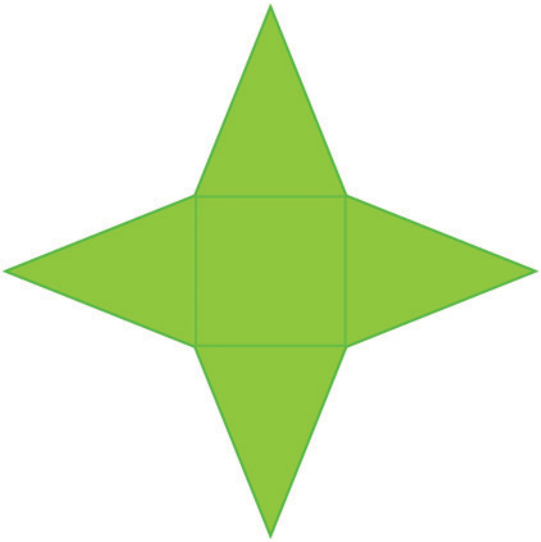




ഇത്തരം സ്തംഭങ്ങളെക്കുറിച്ച് പലതും പഠിക്കുകയും ചെയ്തു.

ഇനി വേറൊരു രൂപമുണ്ടാക്കി നോക്കാം.

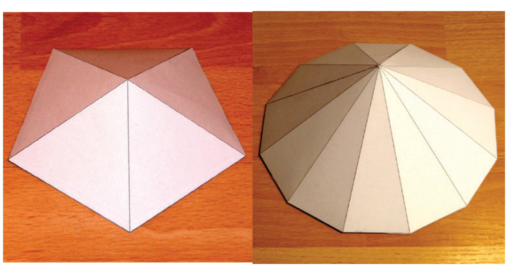
ആദ്യം ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു ചിത്രം കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുക്കുക:



സ്തൂപികകൾ ജിയോജിബ്രയിൽ

ജിയോജിബ്രയിൽ സ്തംഭങ്ങൾ നിർമ്മിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് 9-ാം ക്ലാസിൽ കണ്ടതാണല്ലോ. ഇത്തരത്തിൽ സ്തൂപികകൾ നിർമ്മിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. നിർമ്മാണം തുടങ്ങുന്നതിനു മുൻപ് Options → Labeling → No new objects തിരഞ്ഞെടുക്കുക. പേരുകൾ എഴുതിക്കാണിക്കുന്നത് ഒഴിവാക്കുന്നതിനുവേണ്ടിയാണിത്. Graphics ൽ ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക. 3D Graphics തുറന്ന് Extrude to Pyramid ഉപയോഗിച്ച് ചതുരത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം നൽകുക (ഒരു സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കി ഉയരമായി സ്ലൈഡറിന്റെ പേര് നൽകുകയുമാവാം).

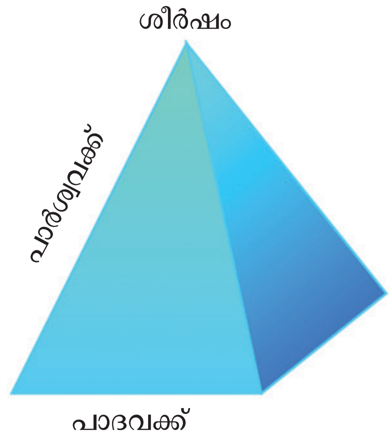
നടുക്കു സമചതുരം. ചുറ്റും നാലു ത്രികോണങ്ങൾ; ഇവ നാലും ഒരേപോലെയുള്ള (തുല്യമായ) സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളായിരിക്കണം. ഇനി ഇത് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മടക്കി ഒട്ടിക്കുക.



എന്തു രൂപമാണിത് ? സ്തംഭമെന്നു വിളിക്കാൻ വയ്യ; സ്തംഭങ്ങൾക്ക് ഒരേ പോലെയുള്ള രണ്ടു പാദങ്ങളും, വശങ്ങളിൽ ചതുരങ്ങളുമാണ്. ഇപ്പോഴുണ്ടാക്കിയ രൂപത്തിലാണെങ്കിൽ, ചുവടെ സമചതുരം, മുകളിലൊരു മുന, ചുറ്റും ത്രികോണങ്ങൾ.

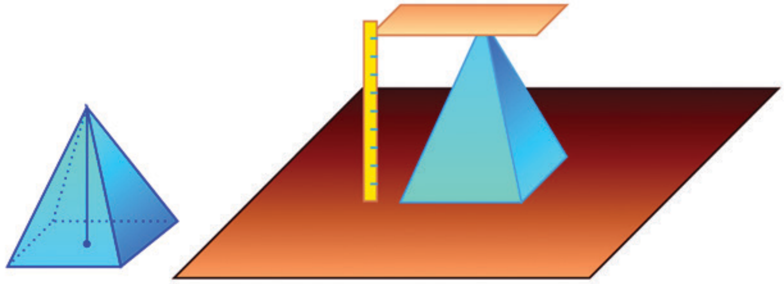
സമചതുരത്തിനു പകരം, മറ്റേതെങ്കിലും ചതുരമാവാം; അതുമല്ലെങ്കിൽ ത്രികോണമോ, മറ്റേതെങ്കിലും ബഹുഭുജമോ ആവാം. പരീക്ഷിച്ചുനോക്കൂ (പാദം സമബഹുഭുജമാകുമ്പോഴാണ് ഭംഗി).

ഇത്തരം രൂപങ്ങൾക്കെല്ലാം പൊതുവായ പേരാണ് **സ്തൂപികകൾ (pyramids)**.



സ്തൂപികയുടെ പാദമായ ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളെ, സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കുകൾ (base edges) എന്നും, ത്രികോണങ്ങളുടെ മറ്റു വശങ്ങളെ പാർശ്വവക്കുകൾ (lateral edges) എന്നുമാണ് പറയുന്നത്. സ്തൂപികയുടെ മുകളറ്റത്തെ അതിന്റെ ശീർഷം (apex) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

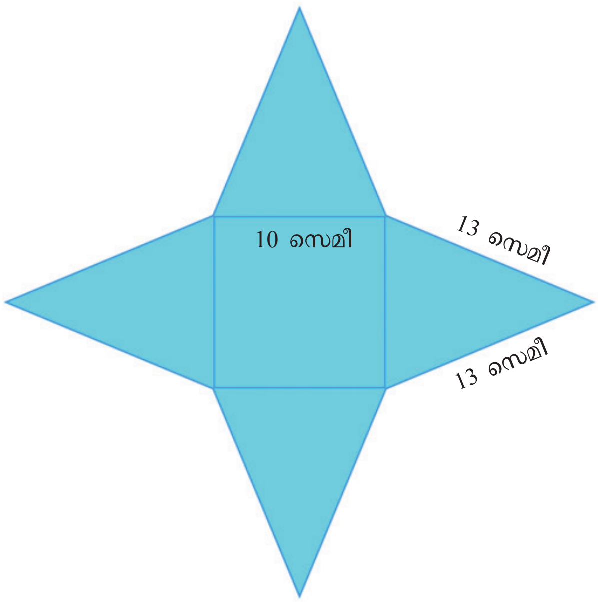
ഒരു സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരമെന്നത്, അതിന്റെ പാദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലമാണല്ലോ. ഒരു സ്തൂപികയുടെ ഉയരമെന്നാൽ, ശീർഷത്തിൽനിന്ന് പാദത്തിലേക്കുള്ള ലംബദൂരമാണ്.



പരപ്പളവ്

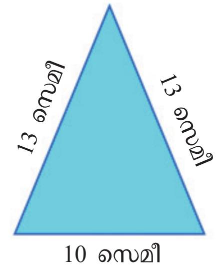
പാദവക്കുകൾ 10 സെന്റിമീറ്ററും, പാർശ്വവക്കുകൾ 13 സെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

ഉപരിതലപരപ്പളവെന്നാൽ, ഇതുണ്ടാക്കാൻ ആവശ്യമായ കടലാസിന്റെ പരപ്പളവാണല്ലോ. ഈ സ്തൂപിക മുറിച്ചു നിവർത്തിവച്ചാൽ എങ്ങനെയിരിക്കും ?

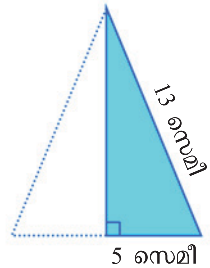


ജിയോജിബ്രയിൽ നിർമ്മിച്ച് ഒരു സ്തൂപിക പൊളിച്ച് നിവർത്തുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. നേരത്തെ പറഞ്ഞതുപോലെ 3D Graphics ൽ ഒരു സ്തൂപിക നിർമ്മിക്കുക. Net ഉപയോഗിച്ച് ഈ സ്തൂപികയിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ സ്തൂപിക പൊളിച്ച് നിവർത്തിയ രൂപം ലഭിക്കും (ഇതിനെ സ്തൂപികയുടെ net എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്). ഇതോടൊപ്പം Graphics ൽ ഒരു സ്ലൈഡറും ലഭിക്കും. ഈ സ്ലൈഡറുപയോഗിച്ച് net ൽ നിന്ന് സ്തൂപിക രൂപപ്പെടുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് കാണാം. Algebra യിൽ സ്തൂപികയുടെ പേരിനു നേരെ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് സ്തൂപിക മറച്ചു വയ്ക്കുകയുമാവാം.

ഇതിലെ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 100 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററെന്ന് പെട്ടെന്നു പറയാം; ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവോ ?



ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് പാദത്തിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ.



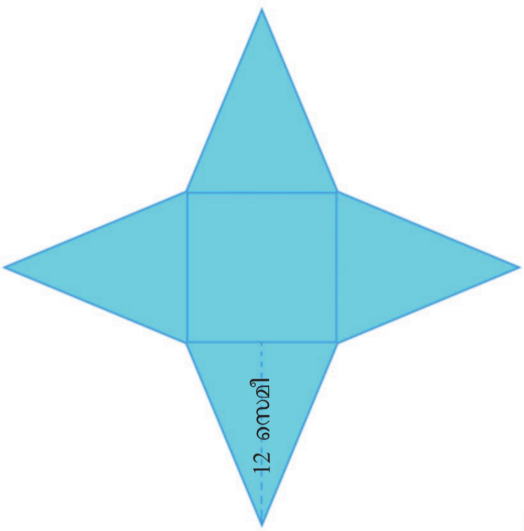
അതു കണക്കാക്കാൻ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം കൂടി വേണം. സമപാർശ്വ ത്രികോണമായതിനാൽ, ഈ ലംബം താഴത്തെ വശത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യും. പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമുപയോഗിച്ച്, ലംബത്തിന്റെ നീളം

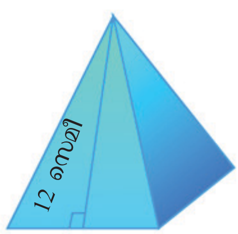
$$\sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുകയും ചെയ്യാം. അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $5 \times 12 = 60$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് കണക്കാക്കാമല്ലോ.

കടലാസ് സ്തൂപികയായിക്കഴിയുമ്പോൾ, ഇപ്പോൾ കണ്ടുപിടിച്ച ഉയരം എന്താകും ?

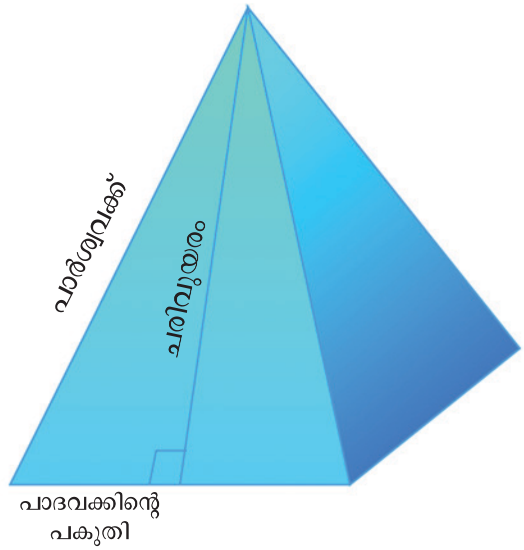




ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക നിർമ്മിക്കുക. Midpoint or Centre ഉപയോഗിച്ച് സ്തൂപികയുടെ ഒരു പാദവക്കിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും പാദത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും അടയാളപ്പെടുത്തുക. Segment ഉപയോഗിച്ച് സ്തൂപികയുടെ ഉയരം, ചരിവുയരം ഇവ അടയാളപ്പെടുത്താം. Polygon ഉപയോഗിച്ച്, ഉയരം, ചരിവുയരം, പാർശ്വവക്ക്, പാദവക്കിന്റെ പകുതി, തുടങ്ങിയവ വശങ്ങളായി വരുന്ന മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് നോക്കൂ. Net ഉപയോഗിച്ച് സ്തൂപിക പൊളിച്ചു നിവർത്തി നോക്കാം. സ്തൂപിക മറച്ചു വയ്ക്കുകയും ചെയ്യാം.

ഈ നീളത്തെ സ്തൂപികയുടെ **ചരിവുയരം (slant height)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇപ്പോൾ ചെയ്ത കണക്കിൽ സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കും, പാർശ്വവക്കും, ചരിവുയരവും തമ്മിലുള്ള ഒരു ബന്ധം കണ്ടല്ലോ; ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെയുള്ള ഒരു മട്ടത്രികോണം, സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഓരോ വശത്തുമുണ്ട്. ലംബവശങ്ങൾ, ചരിവുയരവും പാദത്തിന്റെ പകുതിയും, കർണ്ണം പാർശ്വവക്കും ആണ്.

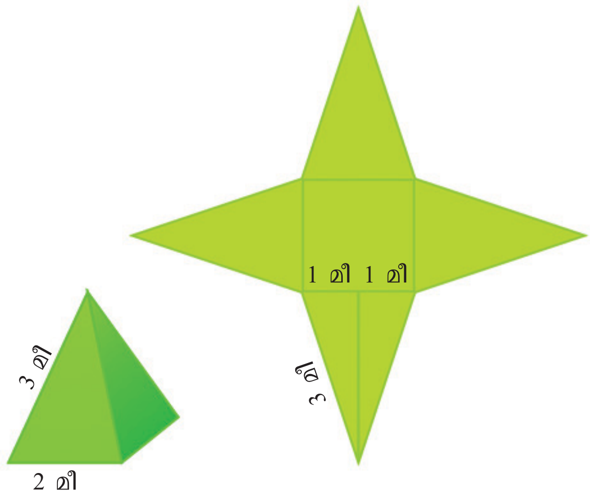


ഇനി ഈ കണക്ക് ചെയ്തുകൂടേ ?

പാദവക്കുകൾ 2 മീറ്ററും, പാർശ്വവക്കുകൾ 3 മീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവെത്രയാണ് ?

പാദത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 4 ചതുരശ്രമീറ്റർ. പാർശ്വവശങ്ങളുടെ പരപ്പളവു കാണാൻ ചരിവുയരം വേണം. നേരത്തെ പറഞ്ഞ മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഒരു വശം, പാദവക്കിന്റെ പകുതി 1 മീറ്ററും, കർണ്ണം, പാർശ്വവക്ക് ആയ 3 മീറ്ററും; അതിനാൽ ചരിവുയരം

$$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} \text{ മീറ്റർ}$$



ഇതുപയോഗിച്ച് ഓരോ ത്രികോണവശത്തിന്റെയും പരപ്പളവ്,

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ ചതുരശ്രമീറ്റർ}$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്, $4 + (4 \times 2\sqrt{2}) = 4 + 8\sqrt{2}$ ചതുരശ്രമീറ്റർ.

ഇതുകൊണ്ടു തൃപ്തിയായില്ലെങ്കിൽ, കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച് (അല്ലെങ്കിൽ $\sqrt{2}$ നോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യ ഓർത്തെടുത്ത്), ഇത് ഏകദേശം 15.31 ചതുരശ്രമീറ്ററാണെന്നു കണ്ടുപിടിക്കാം.

(1) വശങ്ങളെല്ലാം 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു സമചതുരം; ഒരു വശം 5 സെന്റിമീറ്ററും അതിൽനിന്നു എതിർമൂലയിലേക്കുള്ള ഉയരം 8 സെന്റിമീറ്ററും ആയ നാലു സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ; ഇവ ചേർത്തു വച്ച് ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണം. അതിന് ചുരുങ്ങിയത് എത്ര ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസു വേണം?

(2) സമചതുരസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കളിപ്പാട്ടത്തിന്റെ പാദവക്ക് 16 സെന്റിമീറ്ററും ചരിവുയരം 10 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇത്തരം 500 കളിപ്പാട്ടങ്ങൾ ചായം പൂശുന്നതിന് ചതുരശ്രമീറ്ററിന് 80 രൂപ നിരക്കിൽ എത്ര രൂപ ചെലവാകും?

(3) ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖങ്ങൾ സമഭുജത്രികോണങ്ങളാണ്. പാദവക്കിന്റെ നീളം 30 സെന്റിമീറ്റർ. അതിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

(4) ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവ് 40 സെന്റിമീറ്ററും, വക്കുകളുടെ ആകെ നീളം 92 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(5) പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, പാദപരപ്പളവിന് തുല്യമായ സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയുമോ?

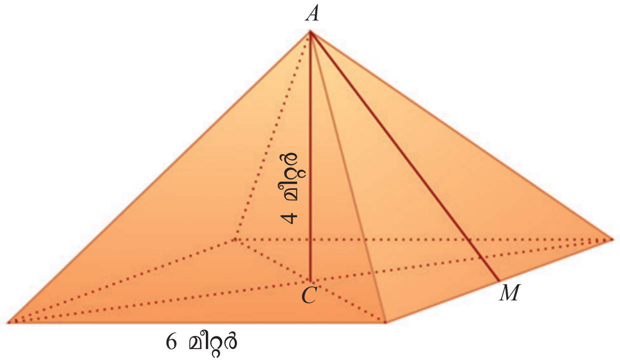
ഉയരവും ചരിവുയരവും

സ്തൂപികകളുടെ അളവുകളിൽ പലപ്പോഴും ഉയരം പ്രധാനമാണ്. ഈ കണക്കുനോക്കൂ.

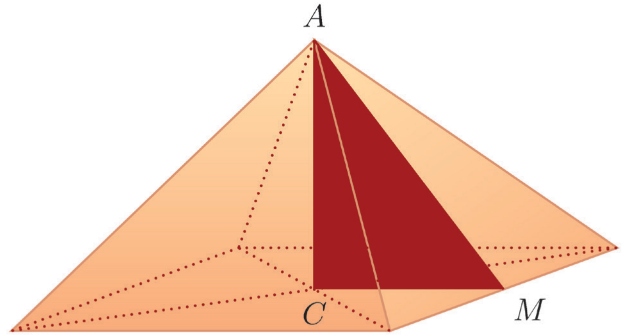
സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിൽ ഒരു കൂടാരം ഉണ്ടാക്കണം. പാദത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 6 മീറ്റർ വേണം; കൂടാരത്തിന്റെ ഉയരം 4 മീറ്ററും. ഇതിന് എത്ര ചതുരശ്രമീറ്റർ ക്യാൻവാസ് വേണം ?

കൂടാരത്തിന്റെ വശങ്ങളായ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ, ചരിവുയരം വേണ്ടേ ? തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾ വച്ച്, അതെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും ?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



നമുക്കുവേണ്ട ചരിവുയരം AM ആണ്. CM യോജിപ്പിച്ചാൽ, AM കർണ്ണമായ ഒരു മട്ടത്രികോണം കിട്ടില്ലേ ? അതിൽ CM ന്റെ നീളം എത്രയാണ് ?



ഈജിപ്റ്റിലെ പിരമിഡുകൾ

പിരമിഡ് എന്നു പറയുമ്പോൾത്തന്നെ മനസ്സിലെത്തുന്ന ചിത്രം, ഈജിപ്റ്റിലെ പിരമിഡുകളാണ്. ഈജിപ്റ്റിലെ പലഭാഗങ്ങളിലായി 138 പിരമിഡുകളാണ് കണ്ടെത്തിയിട്ടുള്ളത്. ബി.സി.ഇ. രണ്ടായിരത്തോടടുപ്പിച്ചാണ് ഇവയിൽ പലതും നിർമ്മിച്ചത്.

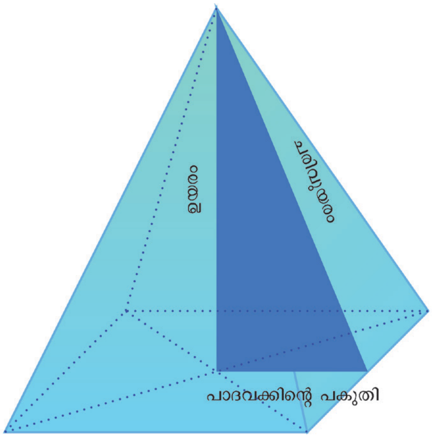
ചിത്രത്തിൽനിന്ന് $AM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ മീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കാം.

അപ്പോൾ കൂടാരമുണ്ടാക്കാൻ, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 6 മീറ്ററും, അതിൽ നിന്നുള്ള ഉയരം 5 മീറ്ററുമായ നാലു സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളാണ് വേണ്ടത്.

ഇവയുടെ മൊത്തം പരപ്പളവ്, $4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 60$ ചതുരശ്രമീറ്ററാണല്ലോ.

കൂടാരമുണ്ടാക്കാൻ ഇത്രയും ക്യാൻവാസ് വേണം.

ഈ കണക്കിൽ കണ്ട കാര്യം എല്ലാ സമചതുരസ്തൂപികയിലും ശരിയാണല്ലോ. ഏതു സമചതുരസ്തൂപികയ്ക്കുള്ളിലും, ചരിവുയരം കർണ്ണമായ ഒരു മട്ടത്രികോണം സങ്കൽപ്പിക്കാം; അതിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ, സ്തൂപികയുടെ ഉയരവും പാദവക്കിന്റെ പകുതിയും.

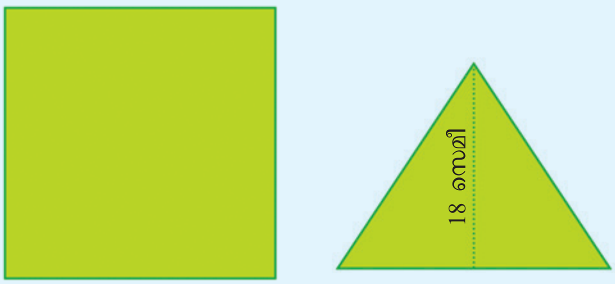


മഹാസ്തൂപിക

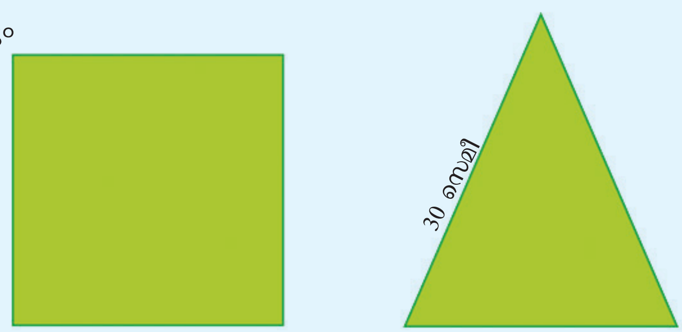
ഈജിപ്റ്റിലെ, ഗിസയിലെ മഹാസ്തൂപികയാണ് (Great Pyramid of Giza) ഏറ്റവും വലിയ പിരമിഡ്. ഇതിന്റെ പാദമായ സമചതുരത്തിന് അരലക്ഷത്തോളം ചതുരശ്രമീറ്റർ പരപ്പുണ്ട്; ഉയരം ഏതാണ്ട് 140 മീറ്ററും. ഇതു നിർമ്മിക്കാൻ ഇരുപതു കൊല്ലത്തോളം വേണ്ടി വന്നിട്ടുണ്ടാകും എന്നാണ് കണക്കുകൂട്ടിയിരിക്കുന്നത്.

കൃത്യമായ സമചതുരത്തിൽ നിന്നു തുടങ്ങി, ഭീമാകാരമായ കല്ലുകൾ മേൽപ്പോട്ട് പടുത്തുയർത്തി, ഒരു ബിന്ദുവിൽ അവസാനിക്കുന്ന ഈ രാജകീയ ശവക്കല്ലറകൾ, മനുഷ്യാധ്വാനത്തിന്റേയും, നിർമ്മാണ വൈദഗ്ധ്യത്തിന്റേയും, ഗണിതവിജ്ഞാനത്തിന്റേയും ജീവിക്കുന്ന പ്രതീകങ്ങളായി ഉയർന്നു നിൽക്കുന്നു.

(1) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ ഒരു സമചതുരവും, നാലു ത്രികോണങ്ങളും ഉപയോഗിച്ചു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കി.
സ്തൂപികയുടെ ഉയരം എത്രയാണ്?



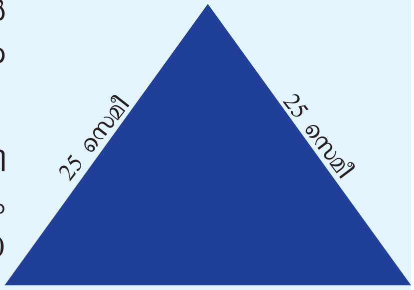
സമചതുരവും ത്രികോണങ്ങളും ഇങ്ങനെ ആയാലോ?



(2) കടലാസ് മുറിച്ച് ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണം. പാദവക്ക് 10 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 12 സെന്റിമീറ്ററും വേണം. ത്രികോണങ്ങളുടെ അളവുകൾ എത്ര ആയിരിക്കണം ?

(3) ഏതു സമചതുരസ്തൂപികയിലും ഉയരം, ചരിവുയരം, പാർശ്വവക്ക് എന്നിവയുടെ വർഗങ്ങൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

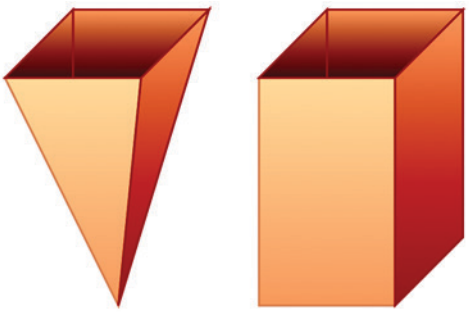
(4) ചിത്രത്തിലെ സമപാർശ്വത്രികോണം പാർശ്വമുഖങ്ങളായി ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണം. അതിന്റെ ഉയരം എന്തായിരിക്കും ? പാദവക്ക് 30 സെന്റിമീറ്ററിനു പകരം 40 സെന്റിമീറ്ററായാലോ ?



തുല്യമായ ഏത് നാലു സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചും സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയുമോ ?

സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

ഏതു സ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം പാദപരപ്പളവിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണെന്ന് കണ്ടല്ലോ. ഒരു സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തമോ ?



സമചതുരസ്തൂപിക തന്നെ എടുക്കാം. ആദ്യം ഒരു പരീക്ഷണമാവാം. നല്ല കട്ടിയുള്ള കടലാസുകൊണ്ട്, ഒരു തുറന്ന സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുക. ഇനി, അതേ പാദവും ഉയരവുമുള്ള ഒരു തുറന്ന സമചതുരസ്തംഭവും ഉണ്ടാക്കുക.

സ്തൂപികയിൽ മണൽ നിറച്ച്, സ്തംഭത്തിലേക്കു പകരുക. മണൽ നിരപ്പിന്റെ ഉയരം സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്ന് അളന്നു നോക്കുക. മൂന്നിലൊന്നല്ലേ? സ്തംഭം നിറയാൻ എത്ര തവണ ഇതുപോലെ സ്തൂപികയിൽ മണലെടുക്കണം ?

അപ്പോൾ സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങാണെന്ന് കാണാം (ഇതിന്റെ ഗണിതപരമായ വിശദീകരണം, പാഠത്തിന്റെ അവസാനഭാഗത്ത് കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്).

സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം, പാദപരപ്പളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണെന്ന് ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ട്.

അപ്പോൾ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തത്തെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം ?

സ്തൂപികാവ്യാപ്തം

ഒരേ പാദവും ഒരേ ഉയരവുമുള്ള ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയും സമചതുരസ്തംഭവും ജിയോജിബ്രയിൽ നിർമ്മിക്കുക. ഇവ പെട്ടെന്ന് തിരിച്ചറിയാൻ ഉള്ളിലുള്ള സ്തൂപികയുടെ നിറം മാറ്റികൊടുക്കുകയും Opacity 100 ആക്കുകയും ചെയ്താൽ മതി (Object properties → Color) Volume ഉപയോഗിച്ച് സ്തൂപികയുടെയും സ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം കണക്കാക്കുക. ഇവ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം ? ഇവയുടെ പാദവും ഉയരവും മാറ്റിയാലോ ?

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, പാദപരപ്പളവിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ മൂന്നി ലൊന്നാണ്

ഉദാഹരണമായി, പാദവക്കുകൾ 10 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 8 സെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപിക യുടെ വ്യാപ്തം $\frac{1}{3} \times 10^2 \times 8 = 266\frac{2}{3}$ ഘനസെന്റിമീറ്ററാണ്.

ലോഹം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു സമചതുരക്കട്ടയുടെ ഒരു വക്കിന്റെ നീളം 15 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഇത് ഉരുക്കി 25 സെന്റിമീറ്റർ പാദവക്കുള്ള ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കി. അതിന്റെ ഉയരം എന്താണ്?

സമചതുരക്കട്ടയുടെ വ്യാപ്തം 15^3 ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

ഉരുക്കി ഉണ്ടാക്കുന്ന സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തവും ഇതുതന്നെ. പാദപരപ്പളവിനെ ഉയര ത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണല്ലോ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം.

കണക്കിലെ സ്തൂപികയുടെ പാദപരപ്പളവ് 25^2 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, ഉയരത്തിന്റെ മൂന്നി ലൊന്ന് $\frac{15^3}{25^2}$ എന്നും, അതിൽനിന്ന് ഉയരം

$$3 \times \frac{15^3}{25^2} = 16.2 \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

എന്നും കാണാം.

(1) പാദവക്ക് 10 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 15 സെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപിക യുടെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ് ?

(2) രണ്ടു സമചതുരസ്തൂപികകളുടെ വ്യാപ്തം തുല്യമാണ്. ഒന്നാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ പാദ വക്കിന്റെ പകുതിയാണ് രണ്ടാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളം. ഒന്നാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ ഉയരത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് രണ്ടാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം ?

(3) രണ്ടു സമചതുരസ്തൂപികകളുടെ പാദവക്കുകൾ 1 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ 1 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലും. ഒന്നാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം 180 ഘനസെന്റിമീറ്ററാണ്. രണ്ടാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ് ?

(4) വക്കുകളെല്ലാം തുല്യമായ ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളം 18 സെന്റി മീറ്ററാണ്. സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കുക.

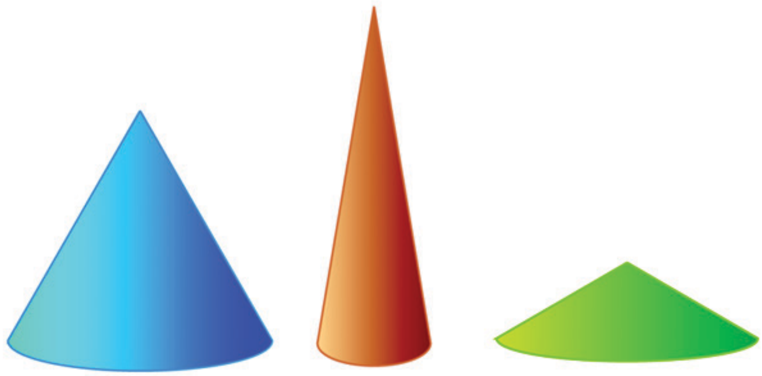
(5) ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം 25 സെന്റിമീറ്ററും, ഉപരിതലപരപ്പളവ് 896 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമാണ്. സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കുക.

(6) വക്കുകളെല്ലാം തുല്യനീളമായ ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഉയരം 12 സെന്റി മീറ്ററാണ്. അതിന്റെ വ്യാപ്തം എന്താണ് ?

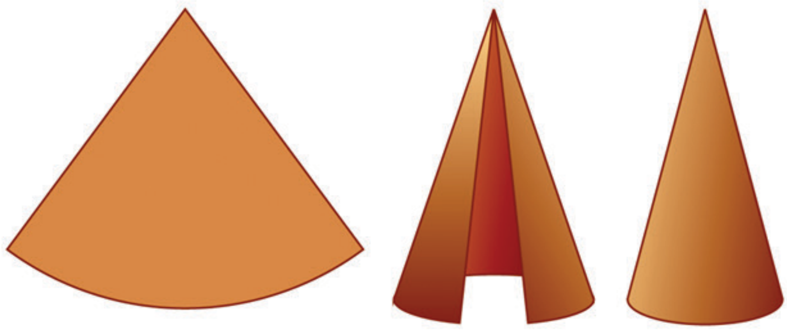
(7) പാദചുറ്റളവ് 64 സെന്റിമീറ്ററും വ്യാപ്തം 1280 ഘനസെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപി കയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എന്താണ് ?

വൃത്തസ്തൂപിക

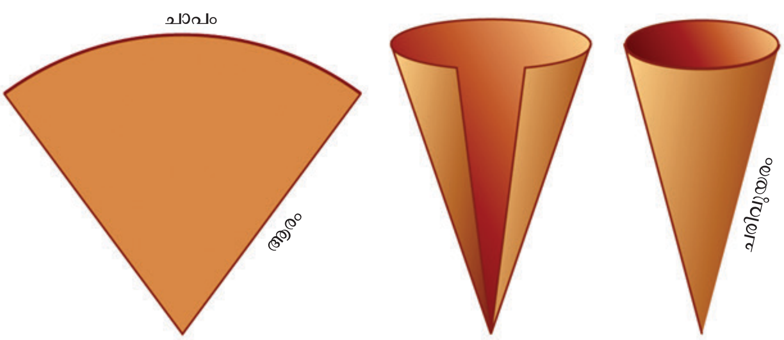
വൃത്തസ്തംഭങ്ങൾ പോലെ, പാദം വൃത്തമായ സ്തൂപികകളുമുണ്ട്.



ഇവയെ **വൃത്തസ്തൂപികകൾ (cones)** എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്. ചതുരം വളച്ച് വൃത്തസ്തംഭമുണ്ടാക്കിയതുപോലെ, ഒരു വൃത്താംശം വളച്ച് വൃത്തസ്തൂപികയുമുണ്ടാക്കാം (അടഞ്ഞ സ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണമെങ്കിൽ, ഒരു കൊച്ചു വൃത്തം വേറെയും വേണം).



ഇതിൽ വളയ്ക്കുന്ന വൃത്താംശത്തിന്റെ അളവുകളും, ഉണ്ടാക്കിയ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ അളവുകളും തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം ?



വൃത്തസ്തൂപിക

സമചതുരസ്തൂപിക പോലെ വൃത്തസ്തൂപികയും ജിയോജിബ്രയിൽ നിർമിക്കാം. Graphicsൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് 3D Graphicsൽ Extrude to Pyramid or Cone ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തസ്തൂപിക നിർമ്മിക്കാം. ആവശ്യമെങ്കിൽ ആരവും ഉയരവും മാറ്റാൻ സ്ലൈഡറുകൾ ഉപയോഗിക്കാം.

വൃത്താംശത്തിന്റെ ആരം, സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരമാകും; വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപനീളം, സ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവുമാകും.

വൃത്താംശത്തിന്റെ വലുപ്പം കേന്ദ്രകോണിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് പലപ്പോഴും പറയുന്നത്. ഈ കണക്കു നോക്കൂ.

> ആരം 12 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു വൃത്തത്തിൽ നിന്ന് 45° കേന്ദ്രകോണുള്ള വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുത്തു. ഇതു വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരവും പാദത്തിന്റെ ആരവും എത്രയാണ് ?

സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം, വൃത്തത്തിന്റെ ആരമായ 12 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ. പാദത്തിന്റെ ആരമോ? 45° എന്നത്, 360° യുടെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണല്ലോ. വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളം, കേന്ദ്രകോണിന് ആനുപാതികവുമാണ്. അപ്പോൾ ഈ വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളം, മൊത്തം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണ്. ഈ ചാപമാണ് സ്തൂപികയുടെ പാദവൃത്തം. അതായത്, സ്തൂപികയുടെ പാദവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുത്ത വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണ്. ആരങ്ങൾ, ചുറ്റളവുകൾക്ക് ആനുപാതികമായതിനാൽ, ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗംതന്നെയാണ്. അതായത്, സ്തൂപികയുടെ പാദത്തിന്റെ ആരം

$$12 \times \frac{1}{8} = 1.5 \text{ സെന്റിമീറ്റർ.}$$

മറിച്ചൊരു ചോദ്യമായാലോ ?

> പാദത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 15 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കാൻ, വൃത്താംശം വേണം. ചരിവുയരം 15 സെന്റിമീറ്റർ വേണമെന്നുള്ളതിനാൽ, 15 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽനിന്നു തന്നെ വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുക്കണം. അതിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയായിരിക്കണം ?

സ്തൂപികയുടെ പാദമായ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം, വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുക്കുന്ന വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ഭാഗമാണല്ലോ (അതെങ്ങനെ?). അപ്പോൾ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ്. ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപനീളമാണല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപം, അതു വെട്ടിയെടുത്ത വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ്. അതിനാൽ, അതിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $360° \times \frac{1}{3} = 120°$.

(1) ആരം 10 സെന്റിമീറ്ററും കേന്ദ്രകോൺ 60° ഉം ആയ വൃത്താംശം വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദത്തിന്റെ ആരവും ചരിവുയരവും എത്രയാണ് ?

(2) പാദത്തിന്റെ ആരം 10 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 25 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപിക നിർമ്മിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന വൃത്താംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയാണ് ?

(3) ഒരു അർധവൃത്തം വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരവും ചരിവുയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ് ?

വക്രതലപരപ്പളവ്

വൃത്തസ്തംഭത്തിലെന്നപോലെ, വൃത്തസ്തൂപികയ്ക്കും ഒരു വക്രതലമുണ്ട്; അതിന്റെ ചരിഞ്ഞുയരുന്ന ഭാഗം. വൃത്തസ്തൂപിക വളച്ചുണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവാണ് ഈ വക്രതലത്തിന്റെ പരപ്പളവ് (വൃത്തസ്തംഭത്തിലും, അതിന്റെ വക്രതലം ചുരുട്ടിയുണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവാണല്ലോ, വക്രതലപരപ്പളവ്).

ജിയോജിബ്രയിൽ നിർമ്മിച്ച വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവ് Algebra യിലെ Surface എന്നതിൽ കാണാം.

കണക്കു നോക്കുക.

ആരം 8 സെന്റിമീറ്ററും ചരിവുയരം 30 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു തൊപ്പി ഉണ്ടാക്കാൻ എത്ര ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസ് വേണം ?

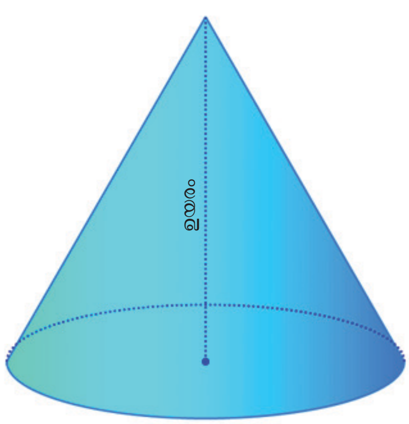
ഇത്തരമൊരു തൊപ്പിയുണ്ടാക്കാൻ വേണ്ട വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവാണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്. ചരിവുയരം 30 സെന്റിമീറ്റർ വേണ്ടതിനാൽ, ഇത്രയും ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽനിന്നു വേണം, വൃത്താംശം മുറിച്ചെടുക്കാൻ.

കൂടാതെ, സ്തൂപികയുടെ പാദമായ കൊച്ചുവൃത്തത്തിന്റെ ആരം 8 സെന്റിമീറ്ററായിരിക്കണം. അതായത്, വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുക്കുന്ന വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ ഭാഗം. അപ്പോൾ, ചെറുവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, വൻവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ ഇതേ ഭാഗമാണ്. ചെറുവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണ്, വെട്ടിയെടുക്കേണ്ട വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളം. ഇങ്ങനെ നോക്കുമ്പോൾ, വെട്ടിയെടുക്കേണ്ട വൃത്താംശം, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{4}{15}$ ഭാഗമാണെന്നു കാണാം. അതിനാൽ, അതിന്റെ പരപ്പളവ്, ഈ വൃത്തത്തിന്റെ ഇതേ ഭാഗമാണ്. അതായത്

$$\pi \times 30^2 \times \frac{4}{15} = \pi \times 2 \times 30 \times 4 = 240\pi \text{ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ}$$

അപ്പോൾ തൊപ്പിയുണ്ടാക്കാൻ 240π ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസു വേണം (ക്രിയചെയ്ത്, ഇത് ഏതാണ്ട് 754 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണെന്നു കാണാം).

സമചതുരസ്തൂപികയിലെന്നപോലെ വൃത്തസ്തൂപികയിലും, പാദത്തിൽ നിന്ന് ശീർഷത്തിലേക്കുള്ള ലംബദൂരമാണ് ഉയരം. വൃത്തസ്തൂപികയിൽ, ഇത് പാദമായ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും, ശീർഷവും തമ്മിലുള്ള അകലമാണ്.



വക്രതലപരപ്പളവ്

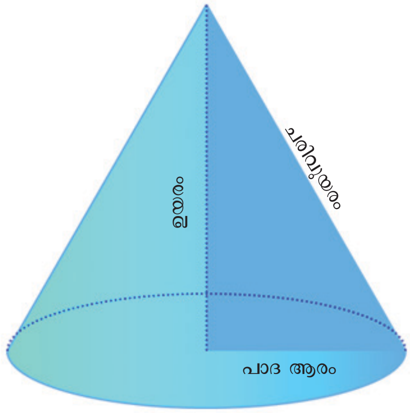
ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതലപരപ്പളവ്, അതുണ്ടാക്കാനുപയോഗിച്ച വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവുതന്നെയാണല്ലോ. സ്തൂപികയുടെ പാദആരം r എന്നും, ചരിവുയരം l എന്നുമെടുത്താൽ, വൃത്താംശത്തിന്റെ ആരം l എന്നും, കേന്ദ്രകോൺ $\frac{r}{l} \times 360°$ എന്നും കിട്ടും. അപ്പോൾ അതിന്റെ പരപ്പളവ്,

$$\frac{1}{360} \times \left(\frac{r}{l} \times 360\right) \times \pi l^2 = \pi r l$$

എന്നു കണക്കാക്കാം (ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിച്ചത് ഓർക്കുക).

അതായത്, വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവ്, പാദചുറ്റളവിന്റെയും ചരിവുയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

സമചതുരസ്തൂപികയിലെന്നപോലെ വൃത്തസ്തൂപികയിലും, ഉയരവും ചരിവുയരവും തമ്മിലൊരു മട്ടത്രികോണ ബന്ധമുണ്ട്:



ഉദാഹരണമായി പാദത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 10 സെന്റിമീറ്ററും ആയ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം $\sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ സെന്റിമീറ്ററാണ്.

(1) പാദത്തിന്റെ ആരം 12 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 25 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ഒരു വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വക്രതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(2) പാദത്തിന്റെ വ്യാസം 30 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 40 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപിക യുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(3) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു പൂക്കുറ്റിയുടെ പാദവ്യാസം 10 സെന്റി മീറ്ററും ഉയരം 12 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇത്തരം 10000 പൂക്കുറ്റികളുടെ പുറംഭാഗം മുഴുവൻ വർണക്കടലാസ് ഒട്ടിക്കണം. ഒരു ചതുരശ്രമീറ്റർ വർണക്കടലാസിന് 2 രൂപയാണ് വില. ഇതിന് ആകെ എത്ര രൂപ ചെലവാകും?

(4) ഒരു അർധവൃത്തം വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതലപരപ്പളവ് അതിന്റെ പാദപരപ്പളവിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കാണാൻ ചെയ്തതുപോലെ ഒരു പരീക്ഷണം ഇവിടെയുമാകാം. ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുക. അതേ പാദവും ഉയരവുമുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തംഭവും. സ്തൂപികയിൽ മണൽ നിറച്ച് വൃത്തസ്തംഭത്തിലേക്ക് പകർന്നുനോക്കൂ. ഇവിടെയും സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണെന്ന് കാണാം. അതായത്,

വൃത്തസ്തൂപികാവ്യാപ്തം

സ്തൂപികാവ്യാപ്തം എന്ന ഭാഗത്ത് ചെയ്തത് പോലെ ഒരേ പാദവും ഒരേ ഉയരവുമുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയും ഒരു വൃത്തസ്തംഭവും നിർമിക്കുക. ഇവയുടെ വ്യാപ്തം താരതമ്യം ചെയ്യുക.

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, പാദപരപ്പളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണ്

(ഇതിന്റെയും ഗണിതപരമായ വിശദീകരണം, പാഠത്തിന്റെ അവസാനം കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്).

ഉദാഹരണമായി, പാദത്തിന്റെ ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 6 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപിക യുടെ വ്യാപ്തം

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 6 = 32\pi$$ ഘനസെന്റിമീറ്ററാണ്.

(1) വൃത്തസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തടിക്കഷണത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം 15 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 40 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇതിൽ നിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ് ?

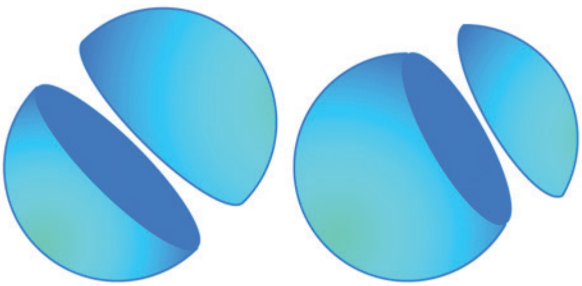
(2) പാദത്തിന്റെ ആരം 12 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 20 സെന്റിമീറ്ററുമായ കട്ടിയായ ഒരു വൃത്തസ്തംഭം ഉരുക്കി, പാദത്തിന്റെ ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമായ എത്ര വൃത്തസ്തൂപികകൾ ഉണ്ടാക്കാം ?

(3) 216° കേന്ദ്രകോണും 25 സെന്റിമീറ്റർ ആരവുമുള്ള ഒരു വൃത്താംശം വളച്ച് വൃത്തസ്തൂപിക ആക്കിയാൽ അതിന്റെ ആരവും ഉയരവും എത്രയായിരിക്കും ? വ്യാപ്തമോ ?

(4) രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികകളുടെ ആരങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 3 : 5, അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3, അവയുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ അംശബന്ധം എത്രയാണ് ?

(5) തുല്യവ്യാപ്തമുള്ള രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികകളുടെ ആരങ്ങൾ 4 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. അവയുടെ ഉയരങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

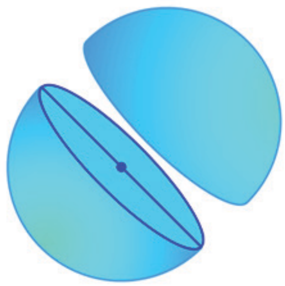
ഗോളം



പന്തുകളിയുടെ ഹരമായും, ലഡ്ഡുവിന്റെ മധുരമായുമൊക്കെ ഗോളങ്ങൾ ആസ്വദിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇനി ഗോളത്തിന്റെ ഗണിതമാവാം (ഇംഗ്ലീഷിൽ ഗോളത്തിന് sphere എന്നാണു പേര്).

വൃത്തസ്തംഭത്തിനെയോ, വൃത്തസ്തൂപികയെയോ പാദത്തിനു സമാന്തരമായി മുറിച്ചാൽ, വൃത്തം കിട്ടും. ഗോളത്തെ എങ്ങനെ മുറിച്ചാലും വൃത്തം കിട്ടും.

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് അതിലെ ഏതു ബിന്ദുവിലേക്കുമുള്ള അകലം തുല്യമാണല്ലോ. ഗോളത്തിനുമുണ്ടൊരു കേന്ദ്രം; അതിൽ നിന്ന് ഗോളോപരിതലത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം ഒരേ അകലമാണ്. ഈ അകലത്തെ ഗോളത്തിന്റെ ആരം എന്നു പറയുന്നു; അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങിനെ വ്യാസമെന്നും.



ഒരു ഗോളത്തെ കൃത്യം പകുതിയായി മുറിച്ചാൽ ഉണ്ടാകുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ആരവും വ്യാസവുമൊക്കെയാണ്, ഗോളത്തിന്റെയും കേന്ദ്രവും ആരവും വ്യാസവും.

ഇതുവരെ കണ്ട രൂപങ്ങളിൽ ചെയ്തപോലെ, ഗോളത്തെ മുറിച്ചു നിവർത്തി ഉപരിതലപരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയില്ല. അല്പം ചുളിവോ, വലിച്ചുനീട്ടലോ ഇല്ലാതെ, ഗോളത്തെ മുറിച്ചു നിരപ്പാക്കാൻ കഴിയില്ല എന്നതാണ് കാര്യം.

എന്നാൽ ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ആരം r എന്നെടുത്താൽ, ഉപരിതലപരപ്പളവ് $4\pi r^2$ ആണെന്നു തെളിയിക്കാം (വിശദീകരണം പാഠത്തിന്റെ അവസാനം ചേർത്തിട്ടുണ്ട്).

മറ്റൊരുരീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ

ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്, അതിന്റെ ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിനെ 4π കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്

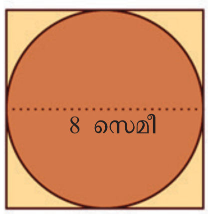
കൂടാതെ ആരം r ആയ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{4}{3}\pi r^3$ എന്ന് തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട് (ഇതിന്റെയും വിശദീകരണം പാഠത്തിന്റെ അവസാനം കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്).

ഈ കണക്ക് നോക്കൂ:

വക്കുകളുടെയെല്ലാം നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു സമചതുരക്കട്ടയിൽ നിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസം, സമചതുരക്കട്ടയുടെ വക്കിന്റെ നീളമാണെന്ന് ചിത്രത്തിൽനിന്നു കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

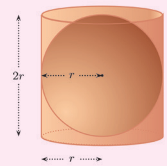
$$4\pi \times 4^2 = 64\pi$$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ



ഗോളവും സ്തംഭവും

ഒരു ഗോളത്തിനെ കൃത്യമായി പൊതിയുന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ആരം, ഗോളത്തിന്റെ തന്നെ ആരവും, ഉയരം ഈ ആരത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങുമാണല്ലോ.

അതായത്, ഗോളത്തിന്റെ ആരം r എന്നെടുത്താൽ, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ആരം r, ഉയരം $2r$. അപ്പോൾ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്.



$$(2\pi r \times 2r)+(2\times\pi r^2)=6\pi r^2$$

ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് $4\pi r^2$. ഈ രണ്ടു പരപ്പളവുകളും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $3 : 2$.

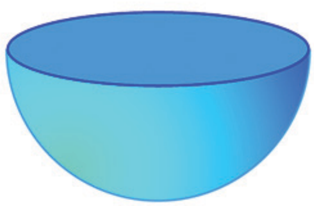
മാത്രവുമല്ല, സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$$ ഉം

ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{4}{3}\pi r^3$ ഉം ആയതിനാൽ, വ്യാപ്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും $3 : 2$ തന്നെ.

മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം:

12 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള കട്ടിയായ ഒരു ഗോളത്തെ രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളായി മുറിച്ചു കിട്ടുന്ന ഒരു അർധഗോളത്തിന്റെ (hemisphere) ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?



ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലത്തിന്റെ പകുതിയും ഒരു വൃത്തവും ചേർന്നതാണല്ലോ അർധഗോളം.

ഗോളത്തിന്റെ ആരം 12 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

$$4\pi \times 12^2 = 576\pi$$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇതിന്റെ പകുതിയും വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവും ചേർന്നതാണ് അർധഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്. വൃത്തത്തിന്റെ ആരവും 12 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ പരപ്പളവ്

$$\pi \times 12^2 = 144\pi$$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

അപ്പോൾ അർധഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2} \times 576\pi + 144\pi = 432\pi$$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

(1) കട്ടിയായ ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് 120 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണ്. അത് മുറിച്ച് രണ്ട് അർധഗോളങ്ങളാക്കിയാൽ ഓരോന്നിന്റെയും ഉപരിതലപരപ്പളവ് എന്തായിരിക്കും ?

(2) രണ്ടു ഗോളങ്ങളുടെ വ്യാപ്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 27 : 64 ആണ്. അവയുടെ ആരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ് ? ഉപരിതലപരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധമോ ?

(3) ലോഹം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ നീളം 10 സെന്റിമീറ്ററും, ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇതുരുക്കി, 2 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള എത്ര ഗോളങ്ങളുണ്ടാക്കാം?

(4) 12 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള ഒരു ലോഹഗോളം ഉരുക്കി തുല്യവലുപ്പമുള്ള കട്ടിയായ 27 ചെറുഗോളങ്ങളുണ്ടാക്കി. ചെറുഗോളങ്ങളുടെ ആരമെന്തായിരിക്കും ?

(5) 10 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള കട്ടിയായ ഒരു ഗോളത്തിൽനിന്ന്, 16 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരവും പരമാവധി വലുപ്പവുമുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക വെട്ടിയെടുത്തു. സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് ?

(6) കട്ടിയായ ഒരു ഗോളം, രണ്ട് അർധഗോളങ്ങളായി മുറിച്ച്, ഒന്നിൽനിന്ന് പരമാവധി വലുപ്പമുള്ള സമചതുരസ്തൂപികയും, മറ്റൊന്നിൽനിന്ന് പരമാവധി വലുപ്പമുള്ള വൃത്തസ്തൂപികയും മുറിച്ചെടുക്കുന്നു. ഇവയുടെ വ്യാപ്തം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

(1) കട്ടിയായ ഒരു അർധഗോളത്തിൽനിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കുന്ന ഏറ്റവും വലിയ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖങ്ങളുടെ പ്രത്യേകത എന്താണ് ?

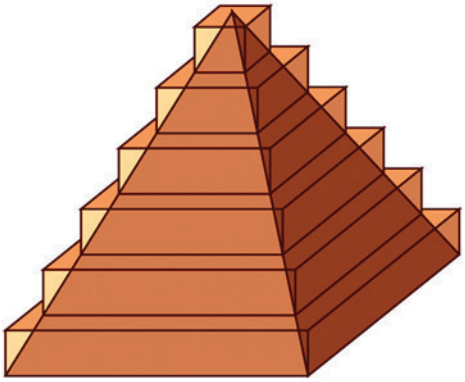
(2) ഒരു സമചതുരക്കട്ടയിൽ കൃത്യമായി കൊള്ളുന്ന (പരമാവധി വലുപ്പമുള്ള) വൃത്തസ്തംഭം, വൃത്തസ്തൂപിക, സമചതുരസ്തൂപിക, ഗോളം എന്നിവയുടെ വ്യാപ്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

അനുബന്ധം

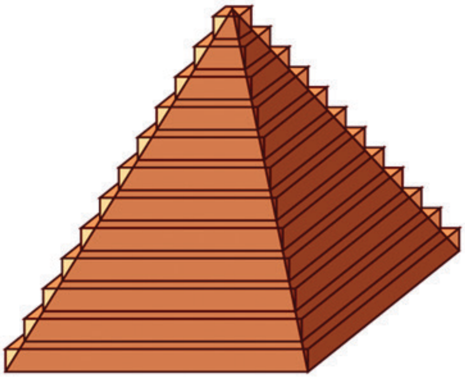
സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തവും, ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവും, വ്യാപ്തവും കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ക്രിയകൾ മാത്രമാണല്ലോ കണ്ടത്. ഇവ എങ്ങനെ കിട്ടി എന്നറിയാൻ താത്പര്യമുള്ളവർക്ക് വേണ്ടി, അവയുടെ വിശദീകരണങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഏകദേശരൂപമായി കുറെ സമചതുരപ്പലകകളുടെ കൂട്ടം സങ്കൽപിക്കാം.

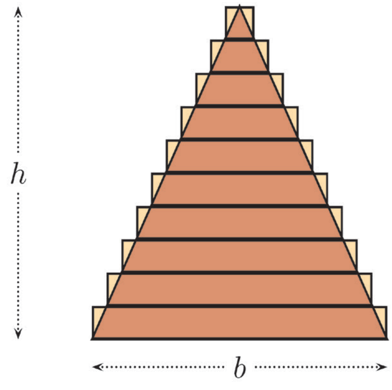


പലകകളുടെ കനം കുറയുകയും, എണ്ണം കൂടുകയും ചെയ്യുന്നതിനനുസരിച്ച്, അവയുടെ അടുക്ക് കൂടുതൽ സ്തൂപികാസമാനമാകും.



അപ്പോൾ ഈ പലകകളുടെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുക, സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തത്തോട് അടുത്തടുത്തു വരും.

ഉദാഹരണമായി, 10 പലകകളാണ് ഉപയോഗിച്ചതെന്നു കരുതുക. ഓരോ പലകയും ഒരു സമചതുരസ്തംഭമാണല്ലോ; ഇവയുടെ ഉയരം തുല്യമായിട്ടെടുക്കാം. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം h എന്നെടുത്താൽ, ഒരു പലകയുടെ ഉയരം $\frac{1}{10}h$. ഇനി ഓരോ പലകയുടെയും പാദം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും ?



സ്തൂപികയെയും അതിനെ പൊതിഞ്ഞു നിൽക്കുന്ന പലകകളുടെ അടുക്കിനെയും ശീർഷത്തിലൂടെ കുത്തനെ മുറിച്ചാൽ, ഇത്തരമൊരു രൂപം കിട്ടും:

മുകളിൽനിന്നു തുടങ്ങി, സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ വലുതായി വരുന്നുണ്ടല്ലോ; ഇവയുടെ ഉയരം വർധിക്കുന്നത്, ഓരോ പലകയിലും $\frac{1}{10}h$ എന്ന നിരക്കിലാണ്. ഇവയെല്ലാം സദൃശമായതിനാൽ (എന്തുകൊണ്ട് ?) പാദങ്ങളും ഇതേ നിരക്കിൽത്തന്നെ കൂടണം. അതായത്, സ്തൂപികയുടെ പാദം b എന്നെടുത്താൽ, മുകളിൽനിന്നുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ പാദം $\frac{1}{10}b, \frac{2}{10}b, \dots, b$ എന്നിങ്ങനെയാണ്.

അപ്പോൾ ഈ പലകകളുടെ വ്യാപ്തം

$$\left(\frac{1}{10}b\right)^2 \times \frac{1}{10}h, \left(\frac{2}{10}b\right)^2 \times \frac{1}{10}h, \dots b^2 \times \frac{1}{10}h$$

എന്നിങ്ങനെയാണ്, അവയുടെ തുകയോ ?

$$\frac{1}{10}b^2h\left[\frac{1}{10^2} + \frac{2^2}{10^2} + \dots + \frac{9^2}{10^2} + \frac{10^2}{10^2}\right] = \frac{1}{1000}b^2h(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2)$$

ഇത്തരം തുകകൾ കണ്ടുപിടിക്കാനൊരു മാർഗം, **സമാന്തരശ്രേണികൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വർഗങ്ങളുടെ തുകകൾ** എന്ന ഭാഗത്തു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = \frac{1}{6} \times 10 \times (10 + 1) \times (2 \times 10 + 1)$$

അപ്പോൾ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുക

$$\frac{1}{1000}b^2h \times \frac{1}{6} \times 10 \times 11 \times 21 = \frac{1}{6}b^2h \times \frac{10}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{21}{10} = \frac{1}{6}b^2h \times 1.1 \times 2.1$$

ഇനി ഇതുപോലെ 100 പലകകൾ സങ്കൽപ്പിച്ചു നോക്കൂ (അതേതായാലും വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല).

പലകകളുടെ കനം $\frac{1}{100}h$ ആകും; പാദങ്ങളുടെ വശം $\frac{1}{100}b, \frac{2}{100}b, \frac{3}{100}b, \dots, b$ എന്നിങ്ങനെയാകും. വ്യാപ്തങ്ങളുടെ തുക

$$\begin{aligned}\frac{1}{100^3}b^2h \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2) &= \frac{1}{100^3}b^2h \times \frac{1}{6} \times 100 \times 101 \times 201 \\ &= \frac{1}{6}b^2h \times \frac{100}{100} \times \frac{101}{100} \times \frac{201}{100} \\ &= \frac{1}{6}b^2h \times 1.01 \times 2.01\end{aligned}$$

പലകകളുടെ എണ്ണം 1000 ആക്കിയാലോ ? കണക്കുകൂട്ടാതെ തന്നെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{1}{6}b^2h \times 1.001 \times 2.001$$

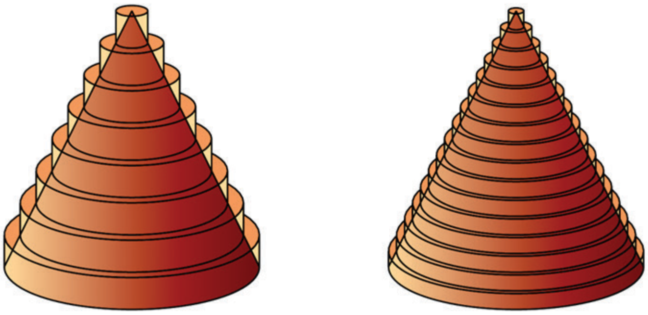
എന്നു കാണാമല്ലോ. ഈ തുകകൾ ഏതു സംഖ്യയോടാണ് അടുത്തടുത്തു വരുന്നത് ?

ഇതാണ് സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം. അതായത്

$$\frac{1}{6}b^2h \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}b^2h$$

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

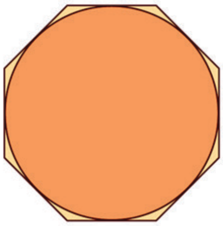
സമചതുരപ്പലകകളടുക്കി, സമചതുര സ്തൂപികയുടെ ഏകദേശം രൂപങ്ങളുണ്ടാക്കിയതുപോലെ, വട്ടപ്പലകകളടുക്കി വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഏകദേശരൂപങ്ങൾ ചമയ്ക്കാം:



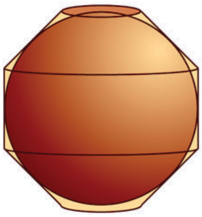
ഇതിലൂടെ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തവും കണ്ടുപിടിക്കാം (ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ).

ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

ഇതിന്, ആദ്യം ഗോളത്തിന്റെ മധ്യത്തുകൂടിയുള്ള ഒരു വൃത്തവും വശങ്ങളെല്ലാം അതിനെ തൊടുന്ന ഒരു സമബഹുഭുജവും സങ്കൽപ്പിക്കുക.



ഇനി ഇതൊന്ന് കറക്കിയാൽ അകത്തൊരു ഗോളവും പുറത്ത് മറ്റൊരു രൂപവും കിട്ടും.

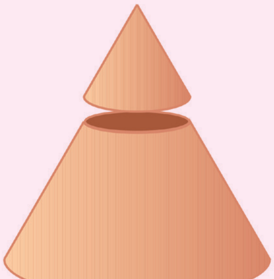


ഈ ചിത്രത്തിൽ, പുറത്തുള്ള രൂപത്തിനെ രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികാപീഠവും, ഒരു വൃത്തസ്തംഭവുമായി ഭാഗിക്കാം:

ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതനുസരിച്ച്, പുറത്തെ രൂപം, ഗോളത്തോട് കൂടുതൽ അടുക്കും:

ചെറുതും വലുതും

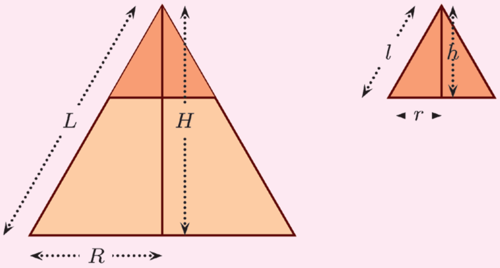
ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയെ പാദത്തിനു സമാന്തരമായി മുറിച്ചാൽ, മുകളിലൊരു കൊച്ചു വൃത്തസ്തൂപിക കിട്ടും.



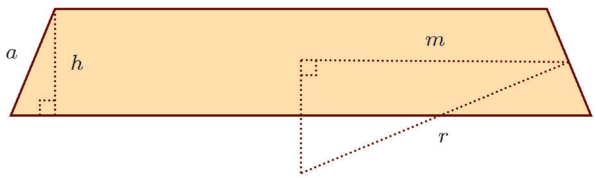
ചെറിയ സ്തൂപികയുടെ അളവുകളും വലിയ സ്തൂപികയുടെ അളവുകളും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ ?

പാദത്തിന്റെ ആരം, ഉയരം, ചരിവുയരം ഇവയെല്ലാം വലിയ സ്തൂപികയ്ക്ക് R, H, L എന്നും ചെറുതിന് r, h, l എന്നുമെടുത്താൽ, ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} = \frac{l}{L}$$



ഈ സ്തൂപികാപീഠങ്ങളുടെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ, അവയിൽ ഒന്നെടുത്തു നോക്കാം. ഇതിന്റെ മധ്യത്തുകൂടിയുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ ആരം m എന്നും, ഉയരം h എന്നുമെടുക്കാം. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നും, അതിനെ പൊതിയുന്ന ബഹുഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശം a എന്നുംകൂടി എടുത്താൽ, ചുവടെ കാണുന്ന ചിത്രം കിട്ടും.



ഇതിലെ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാകയാൽ

$$\frac{m}{r} = \frac{h}{a}$$

എന്നു കാണാം. അതായത്

$$am = rh$$

ഇതു കറങ്ങിയുണ്ടാകുന്ന പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് $2\pi ma$ ആണെന്ന് **പീഠവും സ്തംഭവും** എന്ന ഭാഗത്തു കാണാം (അവസാനത്തെ പുറം). മുകളിലെ സമവാക്യപ്രകാരം, ഇത് $2\pi rh$ നു തുല്യമാണ്. അതായത്, പാദത്തിന്റെ ആരം r ഉം, ഉയരം h ഉം ആയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതല പരപ്പളവ്.

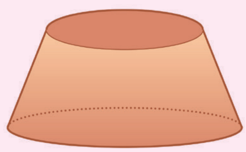
അപ്പോൾ എന്തുകിട്ടി ? മുകളിൽ കണ്ട ഗോളത്തിന്റെ ഏകദേശരൂപത്തിലെ ഓരോ സ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെയും പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, അതേ ഉയരവും, ഗോളത്തിന്റെ ആരവുമായ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവാണ്.

അതിനാൽ, ഈ ഏകദേശരൂപത്തിന്റെ ആകെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, ഈ വൃത്തസ്തംഭങ്ങളുടെ ആകെ പാർശ്വതലപരപ്പളവാണ്. ഈ വൃത്തസ്തംഭങ്ങൾ കൂട്ടിവച്ചാൽ കിട്ടുന്നതോ ? വലിയൊരു വൃത്തസ്തംഭം:

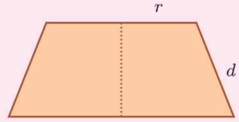
വൃത്തത്തെ പൊതിയുന്ന ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതനുസരിച്ച് അത് കൂടുതൽ വൃത്തസമാനമാകും; ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന രൂപം, ഗോളസമാനമാകും. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്, വശങ്ങൾ എത്ര കൂടിയാലും, ഈ രൂപത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവാണ്. അപ്പോൾ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവും, അതിനെ പൊതിയുന്ന വൃത്തസ്തംഭ

വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠം

ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ മുകളിൽനിന്ന് ഒരു കൊച്ചു വൃത്തസ്തൂപിക വെട്ടിയെടുത്താൽ താഴെ മിച്ചം വരുന്ന ഭാഗത്തിന് വൃത്തസ്തൂപികാപീഠം (frustum of a cone) എന്നാണ് പേര്.



ഒരു വൃത്തസ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെ മുകളിലത്തെയും താഴത്തെയും വൃത്തങ്ങളുടെ ആരവും, ചരിവുയരവും അറിയാമെങ്കിൽ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ?



വലിയ സ്തൂപികയുടെയും, ചെറിയ സ്തൂപികയുടെയും ചരിവുയരങ്ങൾ L, l എന്നെടുത്താൽ, ചിത്രത്തിൽ $d = L - l$. അപ്പോൾ പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്,

$$\begin{aligned} \pi RL - \pi rl &= \pi(RL - rl) \\ &= \pi(R(l + d) - rl) \\ &= \pi(Rl + Rd - rl) \end{aligned}$$

ഇതിൽ നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്, $\frac{r}{R} = \frac{l}{L}$

ആയതിനാൽ, $Rl = rL$ എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്

$$\begin{aligned} \pi(rL + Rd - rl) &= \pi(r(L - l) + Rd) \\ &= \pi(rd + Rd) \\ &= \pi(r + R)d \end{aligned}$$

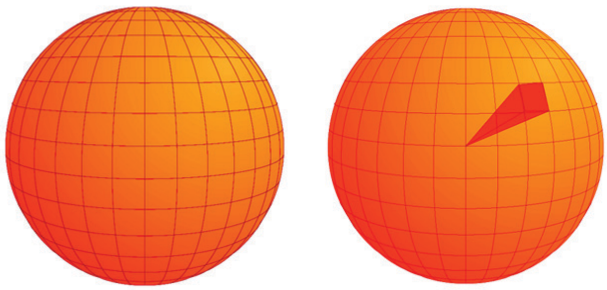
ത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് തന്നെ. വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം r ഉം, ഉയരം $2r$ ഉം ആയതിനാൽ അതിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്

$$2\pi \times r \times 2r = 4\pi r^2$$

ഇതുതന്നെയാണ് ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവും.

ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക:

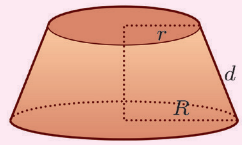


നെടുകെയും കുറുകെയുമുള്ള വൃത്തങ്ങൾ കൊണ്ട് ഗോളത്തിനെ കളങ്ങളായി തിരിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇത്തരമൊരു കളത്തിന്റെ മൂലകളെ ഗോളകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ, സമചതുരസ്തൂപിക പോലുള്ള ഒരു രൂപം കിട്ടും.

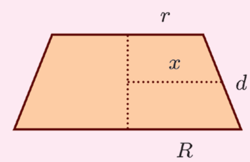
ഇത്തരം രൂപങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് ഗോളം; അതിനാൽ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ഈ രൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുകയാണ്. ഇനി ഗോളത്തിലെ കളങ്ങളോരോന്നിനേയും, ഗോളത്തെ തൊടുന്ന ചെറുസമചതുരങ്ങളാക്കിമാറ്റിയാൽ, ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന ഒരു രൂപം കിട്ടും; അത് ശരിയായ സമചതുരസ്തൂപികകൾ യോജിപ്പിച്ചതാണ്. ഈ സ്തൂപികകളുടെയെല്ലാം ഉയരം, ഗോളത്തിന്റെ ആരം തന്നെയാണ്. ഇത് r എന്നും, ഒരു സ്തൂപികയുടെ പാദപരപ്പളവ് a എന്നുമെടുത്താൽ, അതിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{1}{3}ar$ എന്നു കിട്ടും. ഗോളത്തെ പൊതിഞ്ഞുനിൽക്കുന്ന രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ഈ സ്തൂപികകളുടെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുകയാണല്ലോ. സ്തൂപികകളുടെയെല്ലാം പാദങ്ങൾ ചേർന്നാൽ, ഈ രൂപത്തിന്റെ ഉപരിതലവുമാകും. അപ്പോൾ ഈ സ്തൂപികകളുടെയെല്ലാം പാദപരപ്പളവുകളുടെ

പീഠവും സ്തംഭവും

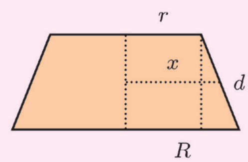
ചിത്രത്തിലെ വൃത്തസ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതല പരപ്പളവ് $\pi(r + R)d$ എന്നു കണ്ടല്ലോ.



ഇതിന്റെ മധ്യത്തുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ ആരം x എന്നെടുത്താൽ ഇങ്ങനെയൊരു ചിത്രം കിട്ടും.



ഇങ്ങനെ ഒരു വരകൂടി വരച്ചാലോ?



വലതുവശത്തെ രണ്ടു സദൃശമട്ടത്രികോണങ്ങളിൽനിന്ന്,

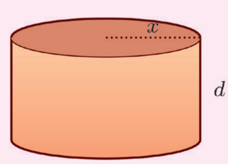
$$\frac{x - r}{R - r} = \frac{1}{2}$$

എന്നു കാണാം. ഇതു ലഘൂകരിച്ചാൽ

$$x = \frac{1}{2}(R + r)$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്, പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതല പരപ്പളവ്, $2\pi xd$.

ഇത്, പാദത്തിന്റെ ആരം x ഉം, ഉയരം d യും ആയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവല്ലേ?



തുക, ഈ രൂപത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവാണ്. അത് s എന്നെടുത്താൽ, രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{1}{3}$ sr എന്നു കിട്ടും.

ഗോളത്തിലെ കളങ്ങൾ ചെറുതാകുകയും അവയുടെ എണ്ണം കൂടുകയും ചെയ്യുന്തോറും ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന രൂപം കൂടുതൽ ഗോളത്തോടടുക്കും; s എന്നത്, ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവിനോടും. അത് $4\pi r^2$ ആണെന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\frac{1}{3} \times 4\pi r^2 \times r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

എന്ന സംഖ്യയോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു. ഇതു തന്നെയാണ് ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം.

13 സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക്

ശരിയല്ലാത്ത ശരാശരി

അടുത്തടുത്തു താമസിക്കുന്ന 10 കുടുംബങ്ങളുടെ മാസവരുമാനം ഇങ്ങനെയാണ്.

16500	21700	18600	21050	19500
17000	21000	18000	22000	17500

ഇക്കൂട്ടത്തിന്റെ മാധ്യവരുമാനം എത്ര രൂപയാണ് ?

വരുമാനമെല്ലാം കൂട്ടി, 10 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, മാധ്യം 19285 രൂപയെന്നു കിട്ടും.

ഇനി ഈ പത്തു കുടുംബങ്ങളുടെയും മാസവരുമാനത്തിന്റെ വിശദവിവരങ്ങൾക്കു പകരം, മാധ്യമായ തുക മാത്രം കിട്ടിയാലും ഇവരുടെ മൊത്തത്തിലുള്ള സാമ്പത്തികസ്ഥിതിയെക്കുറിച്ച് പൊതുവായി ചിലതെല്ലാം പറയാം;

- ഇവരുടെയെല്ലാം മാസവരുമാനം 19285 രൂപയോട് ഏറെക്കുറെ അടുത്ത തുകകളാണ്.
- ആരുടെയും മാസവരുമാനം 19285 രൂപയിൽനിന്ന് ഏറെക്കൂടുതലോ കുറവോ അല്ല.
- 19285 രൂപയിൽക്കൂടുതൽ മാസവരുമാനമുള്ളവരുടെ എണ്ണവും, ഈ തുകയേക്കാൾ കുറഞ്ഞ മാസവരുമാനമുള്ളവരുടെ എണ്ണവും ഏറെക്കുറെ തുല്യമാണ്.

ഇവരുടെ അടുത്തുതന്നെ 175000 രൂപ മാസവരുമാനമുള്ള ഒരു കുടുംബം കൂടി താമസമാക്കി യെന്നു കരുതുക. ഇപ്പോൾ ഈ 11 കുടുംബങ്ങളുടെ മാധ്യവരുമാനം എന്തായി ?

$$\frac{(19285 \times 10) + 175000}{11} = 33441 \text{ രൂപ}$$

ഇനി ഈ വിവരങ്ങളൊന്നും പറയാതെ, ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ മാധ്യം മാത്രം പറഞ്ഞാൽ, ഈ 11 കുടുംബ ങ്ങളുടെയെല്ലാം മാസവരുമാനം ഏതാണ്ട് 30000 രൂപയാണെന്ന തെറ്റായ ധാരണ ഉണ്ടാകില്ലേ ? ഈ സംഖ്യ, ഇതിലെ പത്തു കുടുംബങ്ങളുടെയും മാസവരുമാനത്തിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങോളമാണ്.

ഒരു കാര്യത്തെക്കുറിച്ചുള്ള കുറേ സംഖ്യകളെ, പൊതുവായ ധാരണ നൽകാൻ പറ്റിയ ഒരു സംഖ്യയായി ചുരുക്കുക എന്നതാണല്ലോ മാധ്യം കണക്കാക്കുന്നതിന്റെ ഉദ്ദേശ്യം. പക്ഷേ കൂട്ടത്തിലെ മറ്റു സംഖ്യകളേക്കാൾ വളരെ വലുതോ, തീരെ ചെറുതോ ആയ സംഖ്യകൾ (എണ്ണത്തിൽ കുറവായിരുന്നാൽപ്പോലും) മാധ്യത്തെ വളരെയധികം സ്വാധീനിക്കും.

നമ്മുടെ ഉദാഹരണത്തിൽ, ആദ്യത്തെ പത്തു സംഖ്യകളേക്കാൾ വളരെ വലിയ ഒരേയൊരു സംഖ്യയാണ്, മാധ്യത്തെ വല്ലാതെ മാറ്റിക്കളഞ്ഞത്. ഇതുപോലെ വളരെ വലുതോ ചെറുതോ ആയ സംഖ്യകൾ മാധ്യത്തെ സംബന്ധിച്ച പൊതു ധാരണ തെറ്റിക്കുന്ന മറ്റു സന്ദർഭങ്ങൾ പറയാമോ ?

മറ്റൊരു ശരാശരി

നമ്മുടെ ഉദാഹരണത്തിലെ 11 കുടുംബങ്ങളുടെ മാസവരുമാനത്തെക്കുറിച്ച് ശരിയായ സൂചന നൽകുന്ന ഒരു സംഖ്യ കണക്കാക്കേണ്ടതുണ്ടല്ലോ. അത്തരമൊരു സംഖ്യയെപ്പറ്റി ആലോചിച്ചു നോക്കാം.

വരുമാനങ്ങളെല്ലാം സംഖ്യകളുടെ വലുപ്പക്രമത്തിലെഴുതി, നടുക്കുള്ള സംഖ്യ എടുത്താൽ, 5 കുടുംബങ്ങളുടെ വരുമാനം അതിനേക്കാൾ കുറവും, വേറെ 5 കുടുംബങ്ങളുടെ വരുമാനം അതിൽ കൂടുതലും ആയിരിക്കുമല്ലോ.

ആദ്യം സംഖ്യകൾ ക്രമമായി എഴുതാം.

16500, 17000, 17500, 18000, 18600, 19500, 21000, 21050, 21700, 22000, 175000

ഇതിൽ നടുക്കുള്ള സംഖ്യ 19500. ഇതിനെ മുകളിലെഴുതിയ സംഖ്യകളുടെ **മധ്യമം (median)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

അതായത്, ഈ 11 കുടുംബങ്ങളുടെ മധ്യമ മാസവരുമാനം 19500 രൂപയാണ്. ഇത് മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറയാം. ആകെയുള്ള 11 കുടുംബങ്ങളിൽ 5 കുടുംബങ്ങളുടെ മാസവരുമാനം 19500 നേക്കാൾ കുറവും 5 കുടുംബങ്ങളുടെ മാസവരുമാനം 19500 നേക്കാൾ കൂടുതലുമാണ്. അതായത്, മധ്യമവരുമാനത്തെക്കാൾ കുറഞ്ഞ വരുമാനമുള്ള കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണവും, മധ്യമത്തെക്കാൾ കൂടിയ വരുമാനമുള്ള കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണവും തുല്യമാണ്. ഇനി ആദ്യത്തെ 10 കുടുംബങ്ങൾ മാത്രമെടുത്താലോ ? ഇവയുടെ മാസവരുമാനം മാത്രം ക്രമമായെഴുതിയാൽ, നടുക്ക് ഒരു സംഖ്യയ്ക്ക് പകരം, 18600, 19500 എന്നീ രണ്ടു സംഖ്യകൾ വരും.

ഇവിടെയും മധ്യമമായെടുക്കേണ്ടത്, അതിനേക്കാൾ കുറഞ്ഞവയുടെ എണ്ണവും, അതിനേക്കാൾ കൂടിയവയുടെ എണ്ണവും തുല്യമാകുന്ന തരത്തിലാണ്. 18600 നും 19500 നും ഇടയ്ക്കുള്ള ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും ഇതു ശരിയാകും. സാധാരണയായി ഇവയുടെ തുകയുടെ പകുതിയാണ് മധ്യമമായി എടുക്കുന്നത്. അതായത്, ആദ്യത്തെ 10 കുടുംബങ്ങളുടെ മധ്യമ മാസവരുമാനം $\frac{1}{2}(18600 + 19500) = 19050$ രൂപ

മധ്യമമായ 19050 രൂപ എന്നത്, മാധ്യമായ 19285 രൂപ എന്നതുപോലെതന്നെ ആദ്യത്തെ പത്തു കുടുംബങ്ങളുടെ സാമ്പത്തികസ്ഥിതിയെക്കുറിച്ച് പൊതുവായ ധാരണ തരുന്നുണ്ടല്ലോ (മാധ്യവും മധ്യമവും തമ്മിൽ വലിയ വ്യത്യാസമില്ലതാനും).

പതിനൊന്നാമത്തെ കുടുംബത്തിന്റെ വലിയ വരുമാനം മധ്യമത്തിൽ വലിയ മാറ്റമുണ്ടാക്കുന്നില്ല എന്നതാണ് ഇവിടെ പ്രധാനം. മാത്രമല്ല, കുറേ കുടുംബങ്ങളുടെ മധ്യമ വരുമാനം 19050 രൂപ,

അതിലൊരു കുടുംബത്തിന്റെ മാസവരുമാനം 21000 രൂപ എന്നുമാത്രം പറഞ്ഞാൽ, ഇവയിലെ പകുതിയിലേറെ കുടുംബങ്ങളേക്കാൾ വരുമാനം ഇപ്പറഞ്ഞ കുടുംബത്തിനുണ്ടെന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

(1) ലോങ്ജമ്പ് പരിശീലനത്തിൽ അഹിരഥ് ചാടിയ ദൂരങ്ങൾ ഇങ്ങനെയാണ്.

6.10, 6.20, 6.18, 6.20, 6.25, 6.21, 6.15, 6.10

ദൂരമെല്ലാം മീറ്ററിലാണ്. ഇവയുടെ മധ്യമവും മാധ്യവും കണ്ടുപിടിക്കുക. അവ തമ്മിൽ വലിയ വ്യത്യാസമില്ലാത്തത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

(2) കേരളത്തിലെ വിവിധ ജില്ലകളിൽ 2025 ജൂൺ മാസത്തിലെ ആദ്യത്തെ ഒരാഴ്ച പെയ്ത മഴയുടെ അളവ് രേഖപ്പെടുത്തിയ പട്ടികയാണ് ചുവടെയുള്ളത്.

ജില്ല	മഴയുടെ അളവ് (മി.മീ.)
കാസർഗോഡ്	108.7
കണ്ണൂർ	89.4
കോഴിക്കോട്	74.8
വയനാട്	72.0
മലപ്പുറം	42.6
പാലക്കാട്	35.7
തൃശ്ശൂർ	66.4
എറണാകുളം	73.5
കോട്ടയം	69.1
ഇടുക്കി	50.5
പത്തനംതിട്ട	43.6
ആലപ്പുഴ	93.1
കൊല്ലം	39.0
തിരുവനന്തപുരം	37.5

ആ ആഴ്ചയിൽ കേരളത്തിലെ മഴയുടെ മാധ്യവും മധ്യമവും കണക്കാക്കുക. മധ്യമത്തേക്കാൾ മാധ്യം കുറഞ്ഞത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

(3) സമാന്തരശ്രേണിയിലായ കുറേ സംഖ്യകളുടെ മധ്യമവും മാധ്യവും തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ആവൃത്തിയും മധ്യമവും

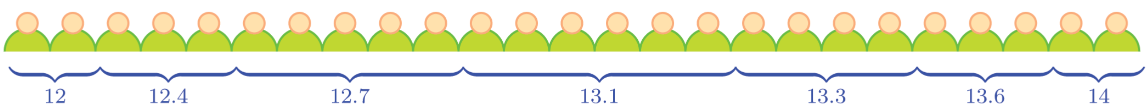
രക്തത്തിലെ ഹീമോഗ്ലോബിന്റെ അളവ്, സാധാരണയായി ഒരു ഡെസി ലിറ്ററിൽ (അതായത് 100 മില്ലിലിറ്റർ) എത്ര ഗ്രാം എന്ന തോതിലാണ് പറയുന്നത്. 25 കുട്ടികളുടെ രക്തപരിശോധന നടത്തി, ഹീമോഗ്ലോബിന്റെ അളവനുസരിച്ച് തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണിത്.

ഹീമോഗ്ലോബിൻ (ഗ്രാം/ഡെ.ലി.)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
12.0	2
12.4	3
12.7	5
13.1	6
13.3	4
13.6	3
14.0	2

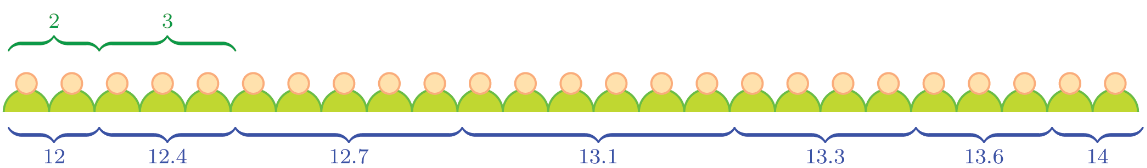
ഇതിൽനിന്നും ഹീമോഗ്ലോബിൻ അളവിന്റെ മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കാം. മധ്യമം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

നടുക്കു വരുന്നതാണ് മധ്യമം; അതായത്, ഈ പട്ടികയിലെ 25 കുട്ടികളിൽ, 12 പേരുടെ ഹീമോഗ്ലോബിൻ അളവ് മധ്യമത്തെക്കാൾ കുറവായിരിക്കണം; 12 കുട്ടികളുടേത് കൂടുതലും.

ഇതു കണക്കാക്കാൻ, അളവുകളുടെ ക്രമത്തിൽ കുട്ടികളെ നിരത്തി നിർത്തി, പതിമൂന്നാമത്തെ കുട്ടിയുടെ അളവ് എടുത്താൽ മതി. ഇങ്ങനെ നിർത്തുന്നതായി സങ്കൽപ്പിച്ചുനോക്കൂ.

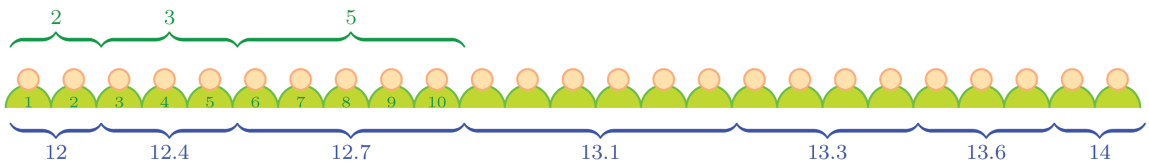


ആദ്യത്തെ 2 കുട്ടികൾക്ക് ഹീമോഗ്ലോബിൻ 12, അടുത്ത 3 കുട്ടികൾക്ക് 12.4 എന്നിങ്ങനെയാണ് വരി നീളുന്നത്.



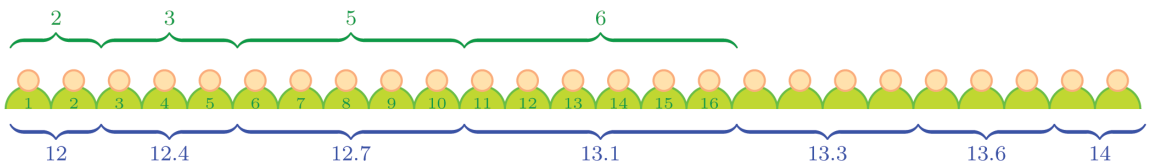
നമുക്കു വേണ്ടത് 13-ാം കുട്ടിയുടെ അളവാണല്ലോ; പട്ടികയിലെ എണ്ണം കൂട്ടിക്കൂട്ടി ഹീമോഗ്ലോബിൻ ശ്രേണിയിൽ ഇയാളുടെ സ്ഥാനം കണ്ടുപിടിക്കാം. ആദ്യത്തെ രണ്ടു കൂട്ടത്തിലെ $2 + 3 = 5$ കുട്ടികളെ എടുക്കുമ്പോൾ, അളവ് 12.4 വരെയായി, അതായത്, 5-ാം കുട്ടിയുടെ അളവ് 12.4.

വീണ്ടും അടുത്ത കൂട്ടത്തിലെ 5 കുട്ടികളെയും കൂട്ടിയാൽ 5 + 5 = 10 കുട്ടികളായി, അളവ് 12.7 ൽ എത്തും.

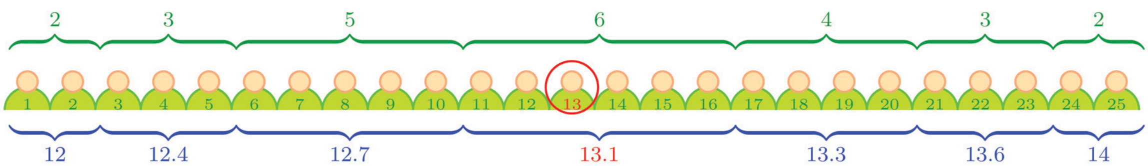


അതായത് 10-ാം കുട്ടിയുടെ അളവ് 12.7

ഇനി അടുത്ത കൂട്ടത്തിലെ 6 കുട്ടികളെക്കൂടി കൂട്ടിയാൽ 10 + 6 = 16 കുട്ടികളായി.



നമുക്കു വേണ്ടത് 13-ാം കുട്ടിയുടെ അളവാണ്. വരിയിലെ 11 മുതൽ 16 വരെയുള്ള സ്ഥാനങ്ങളിലെ കുട്ടികളുടെ ഹീമോഗ്ലോബിൻ അളവ് 13.1 ആണല്ലോ, അപ്പോൾ 13-ാം കുട്ടിയുടെ ഹീമോഗ്ലോബിൻ അളവും 13.1 തന്നെ. ഇതുതന്നെയാണ് അളവുകളുടെ മധ്യമവും.



ചിത്രത്തിനു പകരം ഇതൊരു പട്ടികയാക്കാം.

ഹീമോഗ്ലോബിൻ അളവ് (ഗ്രാം/ഡെ.ലി.)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
12.0 വരെ	2
12.4 വരെ	5
12.7 വരെ	10
13.1 വരെ	16
13.3 വരെ	20
13.6 വരെ	23
14.0 വരെ	25

പട്ടികയിൽ നിന്നും 11 മുതൽ 16 വരെയുള്ള സ്ഥാനങ്ങളിലെ കുട്ടികളുടെ ഹീമോഗ്ലോബിൻ അളവ് 13.1 ആണെന്നു കാണാം. മൊത്തം കുട്ടികളുടെ നടുക്കുള്ള 13-ാം സ്ഥാനക്കാരനും ഇക്കൂട്ടത്തിലായതിനാൽ, മധ്യമം 13.1 എന്നു കണക്കാക്കാം.

(1) ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിൽ, ഒരു പ്രദേശത്തെ 35 കുടുംബങ്ങളെ മാസവരുമാനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തരംതിരിച്ചിരിക്കുന്നു.

മാസവരുമാനം (രൂപ)	കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം
10000	3
11000	7
12000	8
13000	5
14000	5
15000	4
16000	3

മധ്യമവരുമാനം കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു തൊഴിൽശാലയിൽ പലതരം ജോലിചെയ്യുന്നവരുടെ എണ്ണം ദിവസക്കൂലിയനുസരിച്ച് എഴുതിയ പട്ടികയാണിത്.

ദിവസക്കൂലി (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
700	2
800	4
900	5
1000	7
1100	5
1200	4
1300	3

ദിവസക്കൂലിയുടെ മധ്യമം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(3) ഒരു ആശുപത്രിയിൽ, ഒരാഴ്ച പിറന്ന കുട്ടികളെ ഭാരമനുസരിച്ച് എണ്ണം തിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെയുള്ളത്.

ശിശുക്കളുടെ ഭാരം (കി.ഗ്രാം)	ശിശുക്കളുടെ എണ്ണം
2.500	4
2.600	6
2.750	8
2.800	10
3.000	12
3.150	10
3.250	8
3.300	7
3.500	5

ഭാരത്തിന്റെ മധ്യമം കണക്കാക്കുക.

വിഭാഗങ്ങളും മധ്യമവും

ഒരു തൊഴിൽശാലയിലെ ജോലിക്കാരെ ദിവസക്കൂലിയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

ദിവസക്കൂലി (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
400 - 500	6
500 - 600	7
600 - 700	10
700 - 800	9
800 - 900	5
900 - 1000	4
ആകെ	**41**

ഈ തൊഴിൽശാലയിലെ മധ്യമ ദിവസക്കൂലി എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ? ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ കൂലി കിട്ടുന്നവർ മുതൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ കൂലി കിട്ടുന്നവർ വരെയുള്ള ജോലിക്കാരെ ക്രമീകരിച്ചാൽ, നടുക്കു വരുന്ന ആളുടെ കൂലിയാണ് കണക്കാക്കേണ്ടത്. ആകെ 41 ജോലിക്കാരാണുള്ളത്; അപ്പോൾ നടുക്കുവരുന്നത്, ഈ ക്രമത്തിൽ 21-ാം ആൾ.

പട്ടികയിൽ ദിവസക്കൂലിയെ പലതായി ഭാഗിച്ചതിൽ ഏതു വിഭാഗത്തിലാണ് 21-ാം ആൾ എന്നാദ്യം കണ്ടുപിടിക്കാം. നേരത്തെ ചെയ്ത കണക്കിലെപ്പോലെ, ഓരോ വിഭാഗത്തിലെയും ജോലിക്കാരെ ചേർക്കുമ്പോൾ ആകെ എത്ര പേരാകുമെന്നു നോക്കാം:

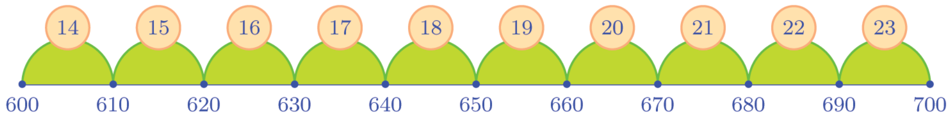
ദിവസക്കൂലി (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
500 നേക്കാൾ കുറവ്	6
600 നേക്കാൾ കുറവ്	13
700 നേക്കാൾ കുറവ്	23
800 നേക്കാൾ കുറവ്	32
900 നേക്കാൾ കുറവ്	37
1000 നേക്കാൾ കുറവ്	41

പട്ടികയനുസരിച്ച്, 600 രൂപയിൽ കുറവ് കൂലി കിട്ടുന്നവരെ ഒന്നിച്ചെടുക്കുമ്പോൾ 13-ാം ആൾ വരെയായി; 700 രൂപയിൽ കുറവ് കൂലി കിട്ടുന്നവരെക്കൂടി ചേർത്തപ്പോൾ 23-ാം ആൾ വരെയായി. ഈ രണ്ടു ജോലിക്കാർക്ക് ഇടയിലാണല്ലോ നമുക്കുവേണ്ട 21-ാം ആൾ. അപ്പോൾ, അയാളുടെ കൂലി 600 രൂപയ്ക്കും 700 രൂപയ്ക്കും ഇടയിലാണെന്നു കിട്ടി.

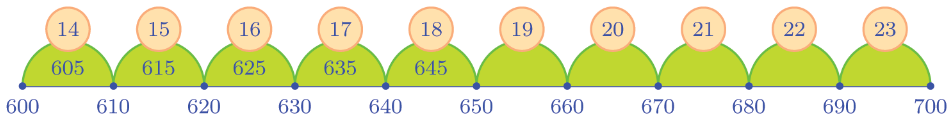
കൂലി കുറേക്കൂടി കൃത്യമായി കണക്കാക്കാൻ എന്തു ചെയ്യും ?

14-ാം ആൾ മുതൽ 23-ാം ആൾ വരെയുള്ള 10 ജോലിക്കാരുടെ ദിവസക്കൂലി 600 രൂപയ്ക്കും 700 രൂപയ്ക്കും ഇടയിലാണ് എന്നല്ലാതെ ഇവരിൽ ഓരോരുത്തരുടെയും ദിവസക്കൂലി എത്രയാണെന്നു അറിയില്ലല്ലോ.

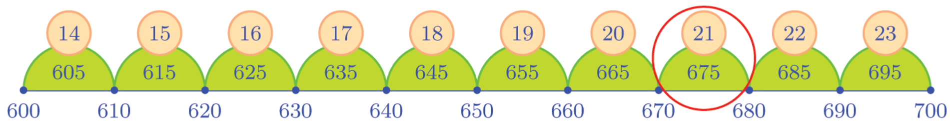
അപ്പോൾ ചില സങ്കൽപ്പങ്ങൾ വേണ്ടിവരും (വിഭാഗപ്പട്ടികയിൽനിന്ന് മാധ്യം കണക്കാക്കാനും ചില സങ്കൽപ്പങ്ങൾ വേണ്ടിവന്നല്ലോ). 600 മുതൽ 700 വരെയുള്ള 100 രൂപയെ 10 സമഭാഗങ്ങളാക്കി, ഓരോ ഭാഗത്തിലും ഒരാൾ എന്നെടുക്കാം:



ഇതിലോരോ ഉപവിഭാഗത്തിലെയും ആളുടെ കൂലി ഈ ഉപവിഭാഗത്തിന്റെ കൃത്യം നടുവിലാണെന്നും സങ്കൽപ്പിക്കാം:



ഈ സങ്കൽപ്പങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ 21-ാം ആളുടെ കൂലി കണക്കാക്കാമല്ലോ.



അതായത്, ദിവസക്കൂലിയുടെ മധ്യമം 675 രൂപ.

ചിത്രമൊന്നും വരയ്ക്കാതെതന്നെ ഇതു കണക്കാക്കാം. ദിവസക്കൂലിയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ജോലിക്കാരെ ക്രമീകരിക്കുന്നതിനെക്കുറിച്ച് നമ്മുടെ സങ്കൽപ്പങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള മധ്യമ കൂലി കണക്കാക്കിയത് എങ്ങനെയാണ്?

- 14-ാം ആളുടെ കൂലി 605 രൂപ.
- തുടർന്ന് 23-ാം ആൾവരെയുള്ള ഓരോരുത്തരുടെയും കൂലി 10 രൂപ വീതം കൂടുന്നു.
- 14-ാം ആൾ മുതൽ, നമുക്കുവേണ്ട 21-ാം ആൾ വരെ എത്താൻ 7 പേരെക്കൂടി കൂട്ടണം.

അപ്പോൾ ഇതൊരു സംഖ്യാ പ്രശ്നമായില്ലേ?

605 ൽ തുടങ്ങി, 10 വീതം 7 തവണ കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ എന്താണ്? ഇതിന്റെ ഉത്തരം

$$605 + (7 \times 10) = 675$$

എന്ന് കണക്കാക്കാമല്ലോ.

ഇത്തരം ധാരാളം കണക്കുകൾ **സമാന്തരശ്രേണികൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

പടമൊന്നും വരയ്ക്കാതെ ഇതുപോലൊരു കണക്കു ചെയ്തു നോക്കാം. ഒരു സ്ഥാപനത്തിൽ പണിയെടുക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം, പ്രായമനുസരിച്ച് പട്ടികപ്പെടുത്തിയതാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

പ്രായം	തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം
25 - 30	4
30 - 35	7
35 - 40	8
40 - 45	10
45 - 50	9
50 - 55	8
ആകെ	46

മധ്യമപ്രായം കണക്കാക്കണം. ഇതിൽ ആളുകളുടെ എണ്ണം 46 എന്ന ഇരട്ടസംഖ്യ ആയതിനാൽ, ആളുകളെ പ്രായമനുസരിച്ച് ക്രമപ്പെടുത്തി, 23, 24 സ്ഥാനങ്ങളിൽ വരുന്നവരുടെ പ്രായത്തിന്റെ തുകയുടെ പകുതി എടുക്കണം.

ആദ്യം കൂട്ടാവൃത്തികളെഴുതാം.

പ്രായം	തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം
30 നേക്കാൾ കുറവ്	4
35 നേക്കാൾ കുറവ്	11
40 നേക്കാൾ കുറവ്	19
45 നേക്കാൾ കുറവ്	29
50 നേക്കാൾ കുറവ്	38
55 നേക്കാൾ കുറവ്	46

ഇതനുസരിച്ച്, പ്രായം ക്രമത്തിൽ 20 മുതൽ 29 വരെയുള്ള സ്ഥാനത്തു വരുന്ന 10 പേർ, 40നും 45നും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ളവരാണ്. നമുക്കാവശ്യമായ 23ഉം 24ഉം സ്ഥാനത്തുള്ളവർ ഇക്കൂട്ടത്തിലാണല്ലോ.

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ 40 മുതൽ 45 വരെയുള്ള 5 വർഷത്തെ 10 സമഭാഗങ്ങളാക്കി, ഈ ഓരോ ഉപവിഭാഗത്തിലും ഒരാൾ വീതമുണ്ടെന്നും, അത്തരമൊരാളുടെ പ്രായം ഉപവിഭാഗത്തിന്റെ നടുക്കുള്ള സംഖ്യയാണെന്നും സങ്കൽപിക്കാം. അപ്പോൾ ഓരോ ഉപവിഭാഗത്തിന്റെയും നീളം $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ വർഷം.

ഇതനുസരിച്ച് 20-ാം സ്ഥാനത്തുള്ള ആളുടെ പ്രായം, 40 വർഷത്തിന്റെയും $40\frac{1}{2}$ വർഷത്തിന്റെയും നടുക്ക്, അതായത് $40\frac{1}{4}$ വർഷം. തുടർന്ന് 29-ാം സ്ഥാനം വരെയുള്ള ഓരോരുത്തരുടെയും പ്രായം $\frac{1}{2}$ വീതം കൂടുമെന്നാണ് സങ്കൽപം; അപ്പോൾ 23-ാം സ്ഥാനത്തുള്ളയാളുടെ പ്രായം

$$40\frac{1}{4}+\left(3\times\frac{1}{2}\right)=40\frac{1}{4}+1\frac{1}{2}=41\frac{3}{4} \text{ വർഷം}$$

24-ാം സ്ഥാനത്തുള്ളയാളുടെ പ്രായം

$$41\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=42\frac{1}{4} \text{ വർഷം}$$

ഇനി മധ്യമപ്രായം കിട്ടാൻ, ഈ പ്രായങ്ങളുടെ തുകയുടെ പകുതി എടുക്കണം

$$\frac{1}{2}\left(41\frac{3}{4}+42\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\times 84=42$$

അങ്ങനെ മധ്യമപ്രായം 42 എന്നു കാണാം.

ഈ കണക്കിൽ 23 ഉം 24 ഉം സ്ഥാനത്തുവരുന്നവർ 40 – 45 എന്ന ഒരേ പ്രായവിഭാഗത്തിലാണ്. ഇങ്ങനെയല്ലാത്ത സന്ദർഭങ്ങളിൽ അല്പം വ്യത്യസ്തമായാണ് മധ്യമം കണക്കാക്കുന്നത്. ഈ ഉദാഹരണം നോക്കൂ:

ഒരു പരീക്ഷയെഴുതിയ കുട്ടികളെ മാർക്കിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

മാർക്ക്	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
0 - 10	4
10 - 20	7
20 - 30	9
30 - 40	12
40 - 50	8
ആകെ	**40**

മധ്യമ മാർക്ക് കണക്കാക്കണം.

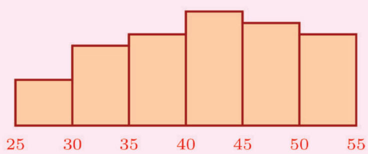
ആദ്യം കൂട്ടാവൃത്തികൾ എഴുതാം:

മാർക്ക്	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
10 നേക്കാൾ കുറവ്	4
20 നേക്കാൾ കുറവ്	11
30 നേക്കാൾ കുറവ്	20
40 നേക്കാൾ കുറവ്	32
50 നേക്കാൾ കുറവ്	40

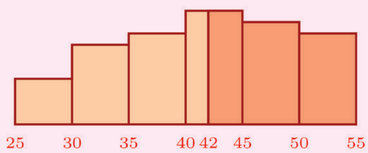
ഇവിടെ കുട്ടികളെ മാർക്കിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ (ഏറ്റവും കുറവ് മുതൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ വരെ) ക്രമീകരിച്ചാൽ, 30ൽ താഴെ മാർക്കുള്ളവർ 20; അതായത്, ആകെയുള്ള 40 കുട്ടികളിൽ പകുതി.

മധ്യമപരപ്പളവ്

ആവൃത്തിപ്പട്ടികയുടെ ആവൃത്തി ചതുരം വരച്ചത് ഓർമ്മയില്ലേ ? പ്രായക്കണക്കിലെ ആവൃത്തി ചതുരം ഇങ്ങനെയാണ്:



ഇതിൽ മധ്യമമായ 42 ൽക്കൂടി കുത്തനെ ഒരു വര വരച്ചാൽ ചിത്രം രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാകും.



ഈ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ് തുല്യമാണെന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ലല്ലോ (ചെയ്തു നോക്കൂ).

എല്ലാ കണക്കിലും മധ്യമത്തിന് ഈ ഗുണമുണ്ടോ ?

അപ്പോൾ മാർക്കിന്റെ മധ്യമമായി 30 തന്നെയാണ് എടുക്കുന്നത്. ആകെയുള്ളവരിൽ പകുതി പ്പേരുടെ മാർക്ക് 30ൽ താഴെയും, മിച്ചമുള്ള പകുതിപ്പേരുടെ മാർക്ക് 30ൽ കൂടുതലോ, 30 തന്നെയോ ആണെന്നതാണ് ഇതിലെ ന്യായം.

(1) ഒരു പ്രദേശത്തെ കുറേ വീടുകളെ വൈദ്യുതി ഉപയോഗമനുസരിച്ച് തരംതിരിച്ച പട്ടിക ഇങ്ങനെയാണ്.

വൈദ്യുതി ഉപയോഗം (യൂണിറ്റ്)	വീടുകളുടെ എണ്ണം
220 - 240	3
240 - 260	6
260 - 280	7
280 - 300	10
300 - 320	9
320 - 340	4

വൈദ്യുതി ഉപയോഗത്തിന്റെ മധ്യമം കണക്കാക്കുക.

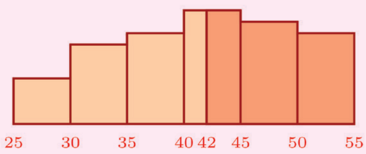
(2) ഒരു ക്ലാസിലെ കുട്ടികളെ കണക്കു പരീക്ഷയ്ക്ക് കിട്ടിയ മാർക്ക് അനുസരിച്ച് എണ്ണം തിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെയുള്ളത്.

മാർക്ക്	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
0 - 10	4
10 - 20	8
20 - 30	10
30 - 40	9
40 - 50	5

ക്ലാസിലെ മധ്യമ മാർക്ക് കണക്കാക്കുക.

മധ്യമസാധ്യത

മധ്യമത്തിലൂടെയുള്ള ലംബം, ആവൃത്തി ചതുരത്തെ ഒരേ പരപ്പളവുള്ള രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുമെന്നു കണ്ടല്ലോ:



അപ്പോൾ, ഈ ചിത്രത്തിൽ ഒരു കുത്തിട്ടാൽ, അത് ഇതിലേതെങ്കിലും ഭാഗത്തിലാകാൻ ഒരേ സാധ്യതയാണ് (അഥവാ, സാധ്യത $\frac{1}{2}$).

അതായത്, കണക്കിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന സ്ഥാപനത്തിൽ പ്രത്യേക പരിഗണനയൊന്നുമില്ലാതെ ഒരാളെ എടുത്താൽ, അയാളുടെ പ്രായം 42 ൽ കുറവാകാനും, കൂടുതലാകാനും ഒരേ സാധ്യതയാണ്.

(3) ഒരു സ്ഥാപനത്തിലെ ഉദ്യോഗസ്ഥർ ഒരു വർഷം കൊടുത്ത ആദായനികുതിയുടെ പട്ടികയാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

ആദായനികുതി (രൂപ)	ഉദ്യോഗസ്ഥരുടെ എണ്ണം
1000 - 2000	8
2000 - 3000	10
3000 - 4000	15
4000 - 5000	20
5000 - 6000	22
6000 - 7000	8
7000 - 8000	6
8000 - 9000	3

ആദായനികുതിയുടെ മധ്യമം കണക്കാക്കുക.

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ഭാഗം IV ക

മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ

51 ക. മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ - താഴെപ്പറയുന്നവ ഭാരതത്തിലെ ഓരോ പൗരന്റെയും കർത്തവ്യം ആയിരിക്കുന്നതാണ് :

(ക) ഭരണഘടനയെ അനുസരിക്കുകയും അതിന്റെ ആദർശങ്ങളെയും സ്ഥാപനങ്ങളെയും ദേശീയപതാകയെയും ദേശീയഗാനത്തെയും ആദരിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഖ) സ്വാതന്ത്ര്യത്തിനുവേണ്ടിയുള്ള നമ്മുടെ ദേശീയസമരത്തിന് പ്രചോദനം നൽകിയ മഹനീയാദർശങ്ങളെ പരിപോഷിപ്പിക്കുകയും പിൻതുടരുകയും ചെയ്യുക;

(ഗ) ഭാരതത്തിന്റെ പരമാധികാരവും ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും നിലനിർത്തുകയും സംരക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഘ) രാജ്യത്തെ കാത്തുസൂക്ഷിക്കുകയും ദേശീയസേവനം അനുഷ്ഠിക്കുവാൻ ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ അനുഷ്ഠിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ങ) മതപരവും ഭാഷാപരവും പ്രാദേശികവും വിഭാഗീയവുമായ വൈവിധ്യങ്ങൾക്കതീതമായി ഭാരതത്തിലെ എല്ലാ ജനങ്ങൾക്കുമിടയിൽ, സൗഹാർദവും പൊതുവായ സാഹോദര്യമനോഭാവവും പുലർത്തുക, സ്ത്രീകളുടെ അന്തസ്സിന് കുറവു വരുത്തുന്ന ആചാരങ്ങൾ പരിത്യജിക്കുക;

(ച) നമ്മുടെ സമ്മിശ്രസംസ്കാരത്തിന്റെ സമ്പന്നമായ പാരമ്പര്യത്തെ വിലമതിക്കുകയും നിലനിറുത്തുകയും ചെയ്യുക;

(ഛ) വനങ്ങളും തടാകങ്ങളും നദികളും വന്യജീവികളും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രകൃത്യാ ഉള്ള പരിസ്ഥിതി സംരക്ഷിക്കുകയും അഭിവൃദ്ധിപ്പെടുത്തുകയും, ജീവികളോട് കാരുണ്യം കാണിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ജ) ശാസ്ത്രീയമായ കാഴ്ചപ്പാടും മാനവികതയും, അന്വേഷണത്തിനും പരിഷ്കരണത്തിനും ഉള്ള മനോഭാവവും വികസിപ്പിക്കുക;

(ഝ) പൊതുസ്വത്ത് പരിരക്ഷിക്കുകയും ശപഥം ചെയ്ത് അക്രമം ഉപേക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഞ) രാഷ്ട്രം യത്നത്തിന്റെയും ലക്ഷ്യപ്രാപ്തിയുടെയും ഉന്നതതലങ്ങളിലേക്ക് നിരന്തരം ഉയരത്തക്കവണ്ണം വ്യക്തിപരവും കൂട്ടായതുമായ പ്രവർത്തനത്തിന്റെ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും ഉൽകൃഷ്ടതയ്ക്കുവേണ്ടി അധ്വാനിക്കുക;

(ട) ആറിനും പതിനാലിനും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ള തന്റെ കുട്ടിക്കോ തന്റെ സംരക്ഷണയിലുള്ള കുട്ടികൾക്കോ, അതതു സംഗതി പോലെ, മാതാപിതാക്കളോ രക്ഷാകർത്താവോ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനുള്ള അവസരങ്ങൾ ഏർപ്പെടുത്തുക.

കുട്ടികളുടെ അവകാശങ്ങൾ

പ്രിയമുള്ള കുട്ടികളേ,

നിങ്ങൾക്കുള്ള അവകാശങ്ങളെന്തെല്ലാമെന്ന് അറിയേണ്ടതില്ലേ? അവകാശങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള അറിവ് നിങ്ങളുടെ പങ്കാളിത്തം, സംരക്ഷണം, സാമൂഹികനീതി എന്നിവ ഉറപ്പാക്കാൻ പ്രേരണയും പ്രചോദനവും നൽകും. നിങ്ങളുടെ അവകാശങ്ങൾ സംരക്ഷിക്കാൻ ഇപ്പോൾ ഒരു കമ്മീഷൻ പ്രവർത്തിക്കുന്നുണ്ട്. കേരള സംസ്ഥാന ബാലാവകാശസംരക്ഷണ കമ്മീഷൻ എന്നാണ് അതിന്റെ പേര്. എന്തെല്ലാമാണ് നിങ്ങൾക്കുള്ള അവകാശങ്ങൾ എന്നു നോക്കാം.

- സംസാരത്തിനും ആശയപ്രകടനത്തിനുമുള്ള സ്വാതന്ത്ര്യം
- ജീവന്റെയും വ്യക്തിസ്വാതന്ത്ര്യത്തിന്റെയും സംരക്ഷണം
- അതിജീവനത്തിനും പൂർണ്ണവികാസത്തിനുമുള്ള അവകാശം
- ജാതി-മത-വർഗ-വർണ്ണ ചിന്തകൾക്കതീതമായി ബഹുമാനിക്കപ്പെടാനും അംഗീകരിക്കപ്പെടാനുമുള്ള അവകാശം
- മാനസികവും ശാരീരികവും ലൈംഗികവുമായ പീഡനങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള സംരക്ഷണത്തിനും പരിചരണത്തിനുമുള്ള അവകാശം
- പങ്കാളിത്തത്തിനുള്ള അവകാശം
- ബാലവേലയിൽനിന്നും ആപൽക്കരമായ ജോലികളിൽനിന്നുമുള്ള മോചനം
- ശൈശവവിവാഹത്തിൽനിന്നുള്ള സംരക്ഷണം
- സ്വന്തം സംസ്കാരം അറിയുന്നതിനും അതനുസരിച്ച് ജീവിക്കുന്നതിനുമുള്ള സ്വാതന്ത്ര്യം
- അവഗണനകളിൽനിന്നുള്ള സംരക്ഷണം
- സൗജന്യവും നിർബന്ധിതവുമായ വിദ്യാഭ്യാസ അവകാശം
- കളിക്കാനും പഠിക്കാനുമുള്ള അവകാശം
- സ്നേഹവും സുരക്ഷയും നൽകുന്ന കുടുംബവും സമൂഹവും ലഭ്യമാകാനുള്ള അവകാശം

നിങ്ങളുടെ ചില ഉത്തരവാദിത്വങ്ങൾ

- സ്കൂൾ, പൊതുസംവിധാനങ്ങൾ എന്നിവ നശിപ്പിക്കാതെ സംരക്ഷിക്കുക.
- സ്കൂളിലും പഠനപ്രവർത്തനങ്ങളിലും കൃത്യനിഷ്ഠ പാലിക്കുക.
- സ്കൂൾ അധികാരികളെയും അധ്യാപകരെയും മാതാപിതാക്കളെയും സഹപാഠികളെയും ബഹുമാനിക്കുകയും അംഗീകരിക്കുകയും ചെയ്യുക.
- ജാതി-മത-വർഗ-വർണ്ണ ചിന്തകൾക്കതീതമായി മറ്റുള്ളവരെ ബഹുമാനിക്കാനും അംഗീകരിക്കാനും സന്നദ്ധരാവുക.

ബന്ധപ്പെടേണ്ട വിലാസം:

കേരള സംസ്ഥാന ബാലാവകാശസംരക്ഷണ കമ്മീഷൻ

ശ്രീ ഗണേഷ്, റ്റി.സി. 14/2036, വാൻറോസ് ജംങ്ഷൻ,
കേരള യൂണിവേഴ്സിറ്റി പി.ഒ, തിരുവനന്തപുരം – 34
ഫോൺ 0471 – 2326603
ഇ- മെയിൽ childrights.cpcr@kerala.gov.in, rte.cpcr@kerala.gov.in
വെബ്സൈറ്റ് : www.kescpcr.kerala.gov.in

ചൈൽഡ് ഹെൽപ്പ് ലൈൻ - 1098, ക്രൈം സ്റ്റോപ്പർ - 1090, നിർഭയ – 1800 425 1400
കേരള പൊലീസ് ഹെൽപ്പ് ലൈൻ - 0471 – 3243000/44000/45000

online ***R.T.E Monitoring : www.nireekshana.org.in***