ഗണിതം

ഭാഗം - 2

സ്റ്റാൻഡേർഡ്
VIII

കേരളസർക്കാർ
പൊതുവിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

തയ്യാറാക്കിയത്
സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി **(SCERT)** കേരളം

2025

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു. സമ്പൂർണ്ണവും വൈവിധ്യ പൂർണ്ണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

ഗണിതം

8

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in
e-mail : scertkerala@gmail.com, Phone : 0471 - 2341883
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2025
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of General Education, Government of Kerala

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

പലതരം അളവുകളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ഭിന്നസംഖ്യകളും ഉപയോഗിക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്ന് മുൻക്ലാസുകളിൽ കണ്ടു. അളവുകളുടെ ക്രിയകൾ കേവല സംഖ്യകളുടെ ക്രിയകളായി മാറ്റുന്നതും അവയെക്കുറിച്ചുള്ള പൊതുതത്വങ്ങൾ ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ എഴുതുന്നതും പരിചയപ്പെട്ടു. ചതുരം, ത്രികോണം, വൃത്തം എന്നിങ്ങനെയുള്ള ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ പല സവിശേഷതകൾ തിരിച്ചറിയുകയും ചെയ്തു.

ഇത്തരം പഠനങ്ങളുടെ തുടർച്ചയാണ് ഈ പാഠപുസ്തകം. അളവുകളെയും അവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളെയും സംബന്ധിക്കുന്ന ചില പ്രശ്നങ്ങൾ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പരിഹരിക്കുന്ന രീതി ഇവിടെ തുടങ്ങുന്നു. ഭൗതികപ്രശ്നങ്ങളെ ഗണിതപ്രശ്നങ്ങളാക്കി, ബീജഗണിതമാർഗങ്ങളിലൂടെ ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക എന്ന രീതി മിക്കവാറും എല്ലാ ശാസ്ത്രങ്ങളിലും ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നുണ്ട്. അതുകൊണ്ടുതന്നെ, ഗണിതപഠനത്തിന്റെ എല്ലാ ഘട്ടങ്ങളിലും ഇതിന് വലിയ പ്രാധാന്യമുണ്ട്.

സംഖ്യകളെയും അവയുടെ ക്രിയകളെയും കുറിച്ചുള്ള അങ്കഗണിതം, ഇവയെ ചുരുക്കിയെഴുതുന്ന ബീജഗണിതം, രൂപങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള ജ്യാമിതി, വിവരങ്ങളെ സംഖ്യാപരമായി വിശകലനം ചെയ്യുന്ന സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക് എന്നീ ഗണിതശാഖകളിലെ പല ആശയങ്ങളും പ്രയോഗങ്ങളും മുൻ ക്ലാസുകളിലെ പാഠപുസ്തകങ്ങളിലൂടെയും, ഈ ക്ലാസിലെ പാഠപുസ്തകത്തിന്റെ ഒന്നാം ഭാഗത്തിലുടെയും പരിചയപ്പെട്ടല്ലോ. ഇവയെക്കുറിച്ചെല്ലാം ചില പുതിയ അറിവുകളാണ് ഈ രണ്ടാംഭാഗത്തിൽ ഉള്ളത്. ഏഴാംക്ലാസിൽ പഠിച്ച അംശബന്ധം എന്ന ആശയം ഇവിടെ ബീജഗണിതത്തിലൂടെ അവതരിപ്പിക്കുകയും, ജ്യാമിതിയിൽ അതിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ ചർച്ച ചെയ്യുകയും ചെയ്യുന്നു. പ്രൈമറി ക്ലാസുകളിൽ കണ്ട ദശാംശരൂപം എന്ന ആശയം ഇവിടെ മറ്റൊരു തരത്തിൽ വികസിക്കുന്നു.
നേരത്തെ ത്രികോണങ്ങൾ അളവനുസരിച്ചു വരയ്ക്കുകയും, അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുകയും, പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുകയും ചെയ്തതിന്റെ തുടർച്ചയായി, ഇവിടെ ഇതെല്ലാം പലതരം ചതുർഭുജങ്ങളിൽ ചെയ്യുന്നതെങ്ങിനെ എന്ന് വിശദീകരിക്കുന്നു. സംഖ്യാപരമായ വിവരങ്ങൾ പട്ടികകളും ചിത്രങ്ങളുമാക്കുന്ന പുതിയ രീതികളും ഇതിൽ കാണാം.

ഗണിതപ്രയോഗങ്ങളുടെ വ്യാപ്തിയും, ഗണിതയുക്തിയുടെ ഭംഗിയും കൂടുതൽ മനസിലാക്കാൻ ഈ പാഠപുസ്തകം സഹായിക്കും എന്നാണ് പ്രതീക്ഷ.

സ്നേഹാശംസകളോടെ,

ഡോ. ജയപ്രകാശ് ആർ.കെ.
ഡയറക്ടർ
എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി. കേരളം

പാഠപുസ്തകരചനാസമിതി

അഡ്വൈസർ

ഡോ. ഇ. കൃഷ്ണൻ,
ഗണിതവിഭാഗം മേധാവി (റിട്ട.),
യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്, തിരുവനന്തപുരം

ചെയർപേഴ്സൺ

ഡോ. ഷിഖി എം.
പ്രൊഫസർ,
കോളേജ് ഓഫ് എഞ്ചിനിയറിംഗ് ട്രിവാൻഡ്രം,
തിരുവനന്തപുരം

വിദഗ്ധർ

ഡോ. പി. രമേശ് കുമാർ
ഗണിതവിഭാഗം മേധാവി (റിട്ട.),
യൂണിവേഴ്സിറ്റി ഓഫ് കേരള,
കാര്യവട്ടം, തിരുവനന്തപുരം

ഡോ. സുകേഷ് എ.
അസോസിയേറ്റ് പ്രൊഫസർ,
ഗവൺമെന്റ് കോളേജ് ഓഫ് എഞ്ചിനിയറിംഗ്,
കണ്ണൂർ

അംഗങ്ങൾ

ആർ. രാമാനുജം
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
എം.എൻ.കെ.എം.
ഗവ: ഹയർസെക്കന്ററി സ്കൂൾ
പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്

വിജയകുമാരൻ ടി. കെ.
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (റിട്ട.),
ജി.എം.ആർ.എച്ച്.എസ്.എസ്.
ഫോർ ഗേൾസ്, പരവനടുക്കം,
കാസറഗോഡ്

സി. ടി. ഫിറോസ് ബാബു
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.ജി.വി.എച്ച്.എസ്.എസ്.
വണ്ടൂർ, മലപ്പുറം

ഉണ്ണികൃഷ്ണൻ എം. വി.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. കടന്നപ്പള്ളി
പി.ഒ കടന്നപ്പള്ളി, കണ്ണൂർ

നന്ദകുമാർ സി.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ചോതാവൂർ ഹയർ
സെക്കൻഡറി സ്കൂൾ
ചമ്പാട്, കണ്ണൂർ

ശ്രീജിത്ത് മുറിയമ്പത്ത്
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. മടപ്പള്ളി,
വടകര, കോഴിക്കോട്

പത്മപ്രസാദ് കെ.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
പന്തല്ലൂർ എച്ച്.എസ്.എസ്.,
കടമ്പോട് പോസ്റ്റ്, മലപ്പുറം

ഉബൈദുള്ള കെ.സി.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം
എസ്.ഒ.എച്ച്.എസ്.,
അരീക്കോട്, മലപ്പുറം

ഫിറോസ മൊയ്തു
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
കാലിക്കറ്റ് ഗേൾസ് വി.എച്ച്.എസ്.എസ്.,
കുണ്ടുങ്ങൽ, കല്ലായി, കോഴിക്കോട്

പ്രിയ രാജ്
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
എം. ജി. ഡി. ഹൈസ്കൂൾ
പുതുശ്ശേരി,
പുതുശ്ശേരി സൗത്ത് പി.ഒ,
പത്തനംതിട്ട

ആയിഷകുട്ടി കെ.കെ
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.എച്ച്.എസ്. ബീനാച്ചി,
സുൽത്താൻബത്തേരി, വയനാട്

രാജേഷ് എം.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം
കല്ലടി എച്ച്.എസ്.എസ്
കുമരംപുത്തൂർ, മണ്ണാർക്കാട്,
പാലക്കാട്

ഉല്ലാസ് യു.ജി., (ആർട്ടിസ്റ്റ്)
എച്ച്.എസ്.ടി. ഫിസിക്കൽ സയൻസ്, സി.ബി.എച്ച്.എസ്.എസ്. വള്ളിക്കുന്ന്, മലപ്പുറം

അക്കാദമിക് കോഡിനേറ്റർ

ഡോ. അനിൽകുമാർ എ.കെ.
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT)
വിദ്യാഭവൻ, പൂജപ്പുര, തിരുവനന്തപുരം 695 012

ഉള്ളടക്കം

8	അംശബന്ധം	127
9	വൃത്തങ്ങൾ	149
10	ദശാംശരൂപങ്ങൾ	163
11	സാമാന്തരികങ്ങൾ	173
12	ലംബകങ്ങൾ	191
13	സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക്	201

ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി
ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു

കണക്കു ചെയ്തുനോക്കാം

ഗവേഷണം

ഐ.സി.റ്റി. സാധ്യത

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ആമുഖം

ഭാരതത്തിലെ ജനങ്ങളായ നാം ഭാരതത്തെ ഒരു [1]**[പരമാധികാര സ്ഥിതിസമത്വ മതേതര ജനാധിപത്യ റിപ്പബ്ലിക്കായി]** സംവിധാനം ചെയ്യുവാനും അതിലെ പൗരന്മാർക്കെല്ലാം:

സാമൂഹ്യവും സാമ്പത്തികവും രാഷ്ട്രീയവും ആയ **നീതിയും;**

ചിന്തയ്ക്കും ആശയപ്രകടനത്തിനും വിശ്വാസത്തിനും മതനിഷ്ഠയ്ക്കും ആരാധനയ്ക്കും ഉള്ള **സ്വാതന്ത്ര്യവും;**

പദവിയിലും അവസരത്തിലും **സമത്വവും;** സംപ്രാപ്തമാക്കുവാനും;

അവർക്കെല്ലാമിടയിൽ

വ്യക്തിയുടെ അന്തസ്സും [2][രാഷ്ട്രത്തിന്റെ ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും] ഉറപ്പുവരുത്തിക്കൊണ്ട് **സാഹോദര്യം** പുലർത്തുവാനും;

സഗൗരവം തീരുമാനിച്ചിരിക്കയാൽ;

നമ്മുടെ ഭരണഘടനാനിർമ്മാണസഭയിൽ ഈ 1949 നവംബർ ഇരുപത്താറാം ദിവസം **ഇതിനാൽ ഈ ഭരണഘടനയെ സ്വീകരിക്കുകയും നിയമമാക്കുകയും നമുക്കു തന്നെ പ്രദാനം ചെയ്യുകയും ചെയ്യുന്നു.**

---

1. 1976 - ലെ ഭരണഘടന (നാല്പത്തിരണ്ടാം ഭേദഗതി) ആക്റ്റ് 2-ാം വകുപ്പു പ്രകാരം "പരമാധികാര ജനാധിപത്യ റിപ്പബ്ലിക്" എന്നതിന് പകരം ചേർത്തത് (3.1.1977 മുതൽ പ്രാബല്യം).
2. മേല്പറഞ്ഞ ആക്റ്റ് 2-ാം വകുപ്പു പ്രകാരം "രാഷ്ട്രത്തിന്റെ ഐക്യം" എന്നതിനു പകരം ചേർത്തത് (3.1.1977 മുതൽ പ്രാബല്യം).

8

അംശബന്ധം

മടങ്ങും ഭാഗവും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

സ്ക്രൂകളുടെ നീളം പലതരത്തിൽ ഒത്തുനോക്കാം.

കൂടുതലും കുറവുമായി പറയാം:

- ചെറിയ സ്ക്രൂവിന്റെ നീളം, വലിയ സ്ക്രൂവിന്റെ നീളത്തെക്കാൾ 8 മില്ലിമീറ്റർ കുറവാണ്.
- വലിയ സ്ക്രൂവിന്റെ നീളം, ചെറിയ സ്ക്രൂവിന്റെ നീളത്തെക്കാൾ 8 മില്ലിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്.

മടങ്ങും ഭാഗവുമായി പറയാം:

- ചെറിയ സ്ക്രൂവിന്റെ നീളം, വലിയ സ്ക്രൂവിന്റെ നീളത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.
- വലിയ സ്ക്രൂവിന്റെ നീളം, ചെറിയ സ്ക്രൂവിന്റെ നീളത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്.

ഭാഗവും മടങ്ങുമായി മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറയാമെന്ന് ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടു.

- ചെറിയ സ്ക്രൂവിന്റെയും വലിയ സ്ക്രൂവിന്റെയും നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 1 ന് 2.
- വലിയ സ്ക്രൂവിന്റെയും ചെറിയ സ്ക്രൂവിന്റെയും നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 ന് 1

(ഏഴാം ക്ലാസിലെ **അംശബന്ധം** എന്ന പാഠത്തിലെ **മറ്റ് അളവുകൾ** എന്ന ഭാഗം).

ഒന്നിന് രണ്ട് എന്ന അംശബന്ധം എഴുതുന്നത് 1 : 2 എന്നാണെന്നും, രണ്ടിന് ഒന്ന് എന്ന അംശബന്ധം എഴുതുന്നത് 2 : 1 എന്നാണെന്നും ആ പാഠത്തിൽത്തന്നെ കണ്ടു.

ഇനി ഈ സ്ക്രൂകൾ നോക്കുക:

ഇവയുടെ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം, അംശബന്ധമായി പറയുന്നതെങ്ങനെ ?

അതിന് ചെറുതിന്റെ നീളം വലുതിന്റെ നീളത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്ന് കണക്കാക്കണം.

അതായത്, 12 ന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് 8 ?

ഇത്തരം കണക്കുകൾ ഏഴാംക്ലാസിൽ ചെയ്തത് ഓർമ്മയുണ്ടോ ? (**വിപരീതഭിന്നങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഭാഗവും മടങ്ങും** എന്ന ഭാഗം).

12 ന്റെ $\frac{1}{12}$ ഭാഗമാണ് 1; അതിന്റെ 8 മടങ്ങ് 8.

അതായത്, 12 ന്റെ $\frac{8}{12}$ ഭാഗമാണ് 8.

പൊതുഘടകങ്ങൾ ഒഴിവാക്കി, $\frac{8}{12}$ നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാമല്ലോ:

$$\frac{8}{12} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{2}{3}$$

(ആറാംക്ലാസിലെ ഒരു **ഭിന്നം പലരൂപം** എന്ന പാഠത്തിലെ **അംശവും ഛേദവും** എന്ന ഭാഗം). അപ്പോൾ ചെറിയ സ്കൂവിന്റെ നീളം, വലിയസ്കൂവിന്റെ നീളത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ്.

അതായത്, ഈ ചെറുതിന്റെ നീളവും വലുതിന്റെ നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3.

നീളങ്ങൾ മാത്രമല്ല, മറ്റു രണ്ടളവുകളെയും ഭാഗവും മടങ്ങുമായി പറയാൻ അംശബന്ധം ഉപയോഗിക്കാം എന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി 15 ലിറ്റർ ബക്കറ്റും, 20 ലിറ്റർ ബക്കറ്റും എടുത്താൽ ചെറിയ ബക്കറ്റിൽ കൊള്ളുന്നത്, വലിയ ബക്കറ്റിൽ കൊള്ളുന്നതിന്റെ $\frac{15}{20}$ ഭാഗമാണ്. ഈ ഭിന്നസംഖ്യയെ ലഘുരൂപത്തിൽ എഴുതിയാലോ ?

$$\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

അപ്പോൾ ചെറിയ ബക്കറ്റിന്റെയും വലിയ ബക്കറ്റിന്റെയും ഉള്ളളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 4.

(1) ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഓരോ ജോടി അളവുകളിലും ചെറുതും വലുതും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കണക്കാക്കുക.

(i) 4 മീറ്റർ, 12 മീറ്റർ (ii) 8 ലിറ്റർ, 20 ലിറ്റർ (iii) 20 കിലോഗ്രാം, 25 കിലോഗ്രാം

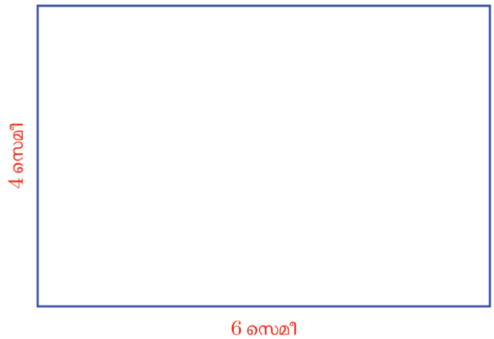
(2) ഒരു പാത്രത്തിൽ 4 ലിറ്ററും, മറ്റൊരു പാത്രത്തിൽ 14 ലിറ്ററും വെള്ളമുണ്ട്.

(i) ആദ്യത്തെ പാത്രത്തിലെയും രണ്ടാമത്തെ പാത്രത്തിലെയും വെള്ളത്തിന്റെ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ് ?

(ii) ഓരോ പാത്രത്തിലും ഒരു ലിറ്റർ വെള്ളം കൂടി ഒഴിച്ചാൽ ഈ അംശബന്ധം എന്താകും ?

ബീജഗണിതം

ഇനി ഈ ചതുരം നോക്കുക:



ഇതിന്റെ ഉയരവും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ് ?

ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം:

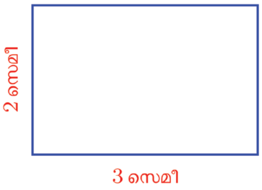
(i) ഉയരം നീളത്തിന്റെ $\frac{4}{6}$ ഭാഗമാണ്.

(ii) $\frac{4}{6}$ ന്റെ ലഘുരൂപം $\frac{2}{3}$

(iii) ഉയരവും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3

(കഴിയുന്നതും ചെറിയ എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് അംശബന്ധം പറയാറുള്ളത് എന്ന് ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ).

ഉയരവും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 ആയ മറ്റൊരു ചതുരം വരയ്ക്കാമോ ? ഇങ്ങനെ വരച്ചാൽപ്പോരേ ?



മറ്റൊരു ചതുരം ?

2 സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും 3 സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും 2 മടങ്ങാണല്ലോ, ആദ്യം വരച്ച ചതുരത്തിന്റെ ഉയരവും നീളവും; 3 മടങ്ങെടുത്താലോ ?

ഇതിലും ഉയരവും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 തന്നെയാണോ ?

ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ ചെയ്തതുപോലെ ആലോചിക്കാം:

(i) 9 ന്റെ $\frac{6}{9}$ ഭാഗമാണ് 6

(ii) $\frac{6}{9} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2}{3}$

(iii) ഉയരം, നീളത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ്

(iv) ഉയരവും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3

ഉയരവും നീളവും $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാക്കിയാലോ ?

$$2 \times \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$$

$$3 \times \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$$

ഉയരം $1\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്ററും, നീളം $2\frac{1}{4}$ സെന്റിമീറ്ററും ആകും. അപ്പോഴും അംശബന്ധം 2 : 3 ആണോ? അതായത്, $2\frac{1}{4}$ ന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണോ, $1\frac{1}{2}$?

മുകളിൽ ചെയ്ത ഗുണനഫലങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഇത് ഇങ്ങനെ പരിശോധിക്കാം:

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} &= \left(3 \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3} \\ &= \left(3 \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} \\ &= 2 \times \frac{3}{4} \\ &= 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

അപ്പോൾ ഈ ചതുരത്തിലും ഉയരവും നീളവും 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്.

$\frac{3}{4}$ നു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും ഭാഗം എടുത്താലും അംശബന്ധം മാറുന്നില്ലെന്ന് ഇതുപോലെ കാണാം.

2 സെന്റിമീറ്ററിനെയും 3 സെന്റിമീറ്ററിനെയും ഒരേ മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആയി മാറ്റുന്നത്, ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചിട്ടാണല്ലോ. അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തു പറയാം?

> ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ഉയരവും നീളവും 2 സെന്റിമീറ്ററിനെയും, 3 സെന്റിമീറ്ററിനെയും ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ ഉയരവും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 ആണ്.

മറിച്ച്, ഉയരവും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 ആയ ഏതു ചതുരമെടുത്താലും, അതിന്റെ ഉയരവും നീളവും 2 സെന്റിമീറ്ററിനെയും 3 സെന്റിമീറ്ററിനെയും ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതുതന്നെ ആയിരിക്കുമോ ?

ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, ഉയരവും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 ആയ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ഉയരം h സെന്റിമീറ്റർ എന്നും, നീളം w സെന്റിമീറ്റർ എന്നും എടുക്കാം.

ഉയരവും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 ആയതിനാൽ, ഉയരം നീളത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ്. അതായത്

$$h = \frac{2}{3}w$$

$\frac{2}{3}$ ഭാഗം എന്നാൽ, $\frac{1}{3}$ ഭാഗത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണല്ലോ (ഏഴാംക്ലാസിലെ **ഭിന്നസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **മടങ്ങും ഗുണനവും** എന്ന ഭാഗം).

അപ്പോൾ ഇതിലെ $\frac{2}{3}w$ നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$\frac{2}{3}w = \frac{1}{3}w \times 2$$

ഇനി $\frac{1}{3}w$ എന്ന സംഖ്യയെ k എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചാൽ,

$$h = 2k$$

എന്നെഴുതാമല്ലോ; $w = 3k$ എന്നും കിട്ടുമോ ?

$$3k = 3 \times \frac{1}{3}w = w$$

അതായത്, ചതുരത്തിന്റെ ഉയരവും നീളവും 2 സെന്റിമീറ്ററിനെയും 3 സെന്റിമീറ്ററിനെയും k എന്ന സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്.

ഉയരവും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 ആയ ഏതു ചതുരത്തിലും, ഉയരവും നീളവും 2 സെന്റിമീറ്ററിനെയും 3 സെന്റിമീറ്ററിനെയും ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്.

2 നും 3 നും പകരം ഏത് എണ്ണൽ സംഖ്യകളെടുത്താലും ഇപ്പോൾ കണ്ട രണ്ട് കാര്യങ്ങളും ശരിയാകുമെന്ന് കാണാൻ വിഷമമില്ല.

മാത്രമല്ല, ചതുരത്തിന്റെ ഉയരവും നീളവും എന്നതിനു പകരം ഏതു രണ്ട് നീളങ്ങളെടുത്താലും, നീളങ്ങൾക്കു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും അളവുകൾ എടുത്താലും ഇവ ശരിയാണ്.

ഉദാഹരണമായി 4 ലിറ്റർ കൊള്ളുന്ന ഒരു പാത്രവും, 10 ലിറ്റർ കൊള്ളുന്ന ഒരു പാത്രവും എടുത്താൽ, വലിയ പാത്രത്തിന്റെ ഉള്ളളവിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് ചെറിയ പാത്രത്തിന്റെ ഉള്ളളവ് ?

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

അപ്പോൾ ചെറിയ പാത്രത്തിന്റെ ഉള്ളളവും, വലിയ പാത്രത്തിന്റെ ഉള്ളളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 5

ഇനി ഉള്ളളവുകൾ 2 ലിറ്ററിനെയും 5 ലിറ്ററിനെയും ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്നവയായ ഏതു രണ്ടു പാത്രങ്ങളിലും, ചെറിയ പാത്രത്തിന്റെയും വലിയ പാത്രത്തിന്റെയും ഉള്ളളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 5 ആണ്; മറിച്ച്, ഉള്ളളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 5 ആയ ഏതു രണ്ടു പാത്രങ്ങളുടെയും, ഉള്ളളവുകൾ 2 ലിറ്ററിനെയും 5 ലിറ്ററിനെയും ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്നവ ആയിരിക്കും.

അപ്പോൾ പൊതുവായി ഇങ്ങനെ പറയാം:

രണ്ട് അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $m : n$ ആണെങ്കിൽ, m നെയും, n നെയും പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏത് സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും $m : n$ ആണ്; മറിച്ച്, $m : n$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലുള്ള ഏത് രണ്ട് അളവുകളും m നെയും n നെയും ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ച് കിട്ടുന്നവയാണ്

ഇതുപയോഗിച്ച്, ഏഴാംക്ലാസിലെ ഒരു കണക്ക് മറ്റൊരു വിധത്തിൽ ചെയ്തുനോക്കാം (**അംശബന്ധം** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഭാഗക്കണക്ക്** എന്ന ഭാഗം):

> സ്കൂളിലൊരു പച്ചക്കറിത്തോട്ടമുണ്ടാക്കാൻ ചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു സ്ഥലം കയർകെട്ടിതിരിക്കണം. കയറിന്റെ നീളം 32 മീറ്റർ. വീതിയും നീളവും 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലായിരിക്കണം എന്നാണ് തീരുമാനം. വീതിയും നീളവും എത്ര മീറ്റർ ആയിരിക്കണം ?

ചതുരത്തിന്റെ വീതിയും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 5 ആയതിനാൽ, ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, വീതിയും നീളവും 3 മീറ്ററിനെയും 5 മീറ്ററിനെയും ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്. വീതിയും നീളവും കണക്കാക്കാൻ ഈ സംഖ്യ കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി. അതിന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കാം.

ഈ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ,

$$\text{വീതി} = 3x \text{ മീറ്റർ}$$

$$\text{നീളം} = 5x \text{ മീറ്റർ}$$

ഇനി x കണ്ടുപിടിക്കാൻ, കണക്കിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന മറ്റൊരു കാര്യം ഉപയോഗിക്കാം. ചതുരമുണ്ടാക്കുന്നത് 32 മീറ്റർ കയറുപയോഗിച്ചാണ് എന്നതിൽ നിന്ന് എന്തു കണക്കാക്കാം ?

(i) ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 32 മീറ്റർ

(ii) വീതിയും നീളവും കൂട്ടിയാൽ 32 ന്റെ പകുതി 16 മീറ്റർ

വീതിയും നീളവും $3x$ മീറ്ററും $5x$ മീറ്ററും ആണല്ലോ; അവ കൂട്ടിയാൽ $3x + 5x = 8x$ മീറ്റർ. നീളവും വീതിയും കൂട്ടിയാൽ 16 മീറ്ററാണെന്നും കണ്ടു. അപ്പോൾ

$$8x = 16$$

ഇതിൽനിന്ന് x കണക്കാക്കാമല്ലൊ.

$$x = 2$$

(**സമവാക്യപരിഹാരം** എന്ന പാഠം ഓർക്കുക).

അപ്പോൾ,

$$\text{വീതി} = 3x = 3 \times 2 = 6 \text{ മീറ്റർ}$$

$$\text{നീളം} = 5x = 5 \times 2 = 10 \text{ മീറ്റർ}$$

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

> ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വീതിയും നീളവും 4 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്; അതിന്റെ പരപ്പളവ് 320 ചതുരശ്രമീറ്റർ. വീതിയും നീളവും എത്ര മീറ്ററാണ്?

ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ, വീതി $4x$ മീറ്റർ, നീളം $5x$ മീറ്റർ എന്നെടുക്കാമല്ലോ. അപ്പോൾ പരപ്പളവ്

$$4x \times 5x = 20x^2 \text{ ചതുരശ്രമീറ്റർ}$$

പരപ്പളവ് 320 ചതുരശ്രമീറ്റർ എന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ

$$20x^2 = 320$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$x^2 = 320 \div 20 = 16$$

എന്നു കണക്കാക്കാം.

അതായത് x എന്ന സംഖ്യയുടെ വർഗം 16. അപ്പോൾ x എന്താണ്?

$$x = 4$$

ഇനി വീതിയും നീളവും കണക്കാക്കാമല്ലോ:

$$\text{വീതി} = 4x = 4 \times 4 = 16 \text{ മീറ്റർ}$$

$$\text{നീളം} = 5x = 5 \times 4 = 20 \text{ മീറ്റർ}$$

(1) ഒരു സമബഹുഭുജത്തിന്റെ അകക്കോണും പുറംകോണും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 7 : 2 ആണ്.

(i) ഓരോ കോണും എത്ര ഡിഗ്രിയാണ്?

(ii) ബഹുഭുജത്തിന് എത്ര വശങ്ങളുണ്ട്?

(2) നാലു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ; എല്ലാറ്റിലും ലംബവശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 3 : 4 ആണ്. ഓരോ ത്രികോണത്തെ കുറിച്ചും മറ്റൊരു വിവരം കൂടി ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഓരോ ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം കണക്കാക്കുക.

(i) ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 24 മീറ്റർ

(ii) ചുറ്റളവ് 24 മീറ്റർ

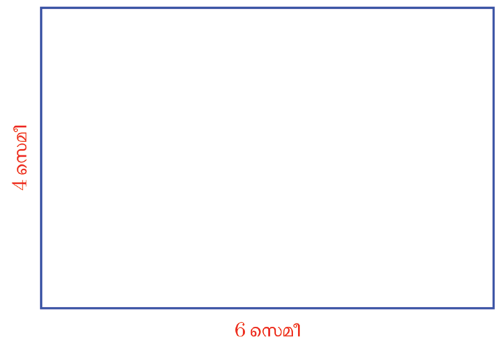
(iii) പരപ്പളവ് 24 ചതുരശ്രമീറ്റർ

(iv) കർണ്ണം 24 മീറ്റർ (നീളങ്ങൾ മീറ്ററും സെന്റീമീറ്ററും ആയി എഴുതുക)

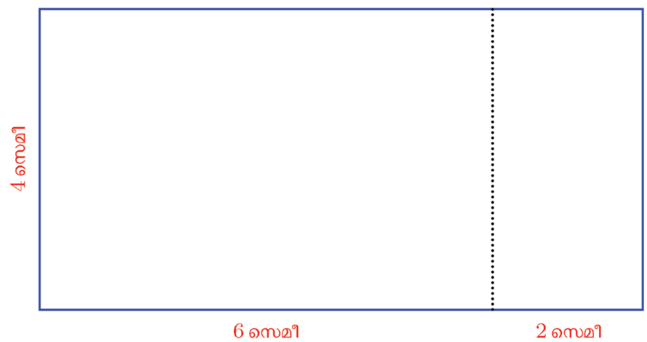
(3) രണ്ടു സമചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 4 ആണ്. അവയുടെ പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

മാറുന്ന അംശബന്ധം

ഈ ചതുരത്തിന്റെ ഉയരവും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?



ഉയരം 2×2 സെന്റിമീറ്ററും, നീളം 3×2 സെന്റിമീറ്ററും ആയതിനാൽ, അംശബന്ധം $2 : 3$. നീളം മാത്രം 2 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി, ചതുരം വലുതാക്കിയാലോ?



ഇതിൽ ഉയരവും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $1 : 2$ ആയി മാറിയില്ലേ? അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യം:

> ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും ഉയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $3 : 2$; നീളം 2 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി ചതുരം വലുതാക്കിയപ്പോൾ, ഈ അംശബന്ധം $5 : 3$ ആയി. ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിന്റെ നീളവും ഉയരവും എത്രയായിരുന്നു?

ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിൽ നീളവും ഉയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $3 : 2$ ആയതിനാൽ, ശരിക്കുള്ള നീളവും ഉയരവും $3x$ സെന്റിമീറ്റർ, $2x$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുക്കാം.

നീളം കൂട്ടിയ ചതുരത്തിലോ?

2 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയപ്പോൾ നീളം $3x + 2$ സെന്റിമീറ്റർ ആയി.

ഉയരത്തിൽ മാറ്റമൊന്നും വരുത്തിയിട്ടില്ല; അത് $2x$ തന്നെ.

വലുതാക്കിയ ചതുരത്തിൽ, നീളവും ഉയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 5 : 3 എന്നാണ് പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്.

അതായത് നീളം, ഉയരത്തിന്റെ $\frac{5}{3}$ മടങ്ങാണ്.

$$3x + 2 = 2x \times \frac{5}{3}$$

ഈ സമവാക്യത്തിലെ വലതു ഭാഗം ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാമല്ലോ.

$$2x \times \frac{5}{3} = 10x \times \frac{1}{3}$$

അപ്പോൾ സമവാക്യം ഇങ്ങനെയായി

$$3x + 2 = 10x \times \frac{1}{3}$$

അതായത്, $10x$ എന്ന സംഖ്യയുടെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ് $3x + 2$ എന്ന സംഖ്യ.

ഇത് തിരിച്ചുപറഞ്ഞാൽ, $3x + 2$ എന്ന സംഖ്യയുടെ 3 മടങ്ങാണ് $10x$ എന്ന സംഖ്യ.

അതായത്

$$10x = 3(3x + 2)$$

ഇനി $3(3x + 2)$ നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$3(3x + 2) = (3 \times 3x) + (3 \times 2) = 9x + 6$$

അപ്പോൾ മുമ്പെഴുതിയ സമവാക്യം ഇങ്ങനെയാകും:

$$10x = 9x + 6$$

ഇതിൽനിന്ന് x കണക്കാക്കാമല്ലോ:

$$x = 6$$

അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിൽ

നീളം $= 3x = 3 \times 6 = 18$ സെമീ

ഉയരം $= 2x = 2 \times 6 = 12$ സെമീ

അംശബന്ധവും രസതന്ത്രവും

രസതന്ത്രത്തിൽ പദാർഥങ്ങളെ മൂലകങ്ങൾ എന്നും സംയുക്തങ്ങൾ എന്നും തരം തിരിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ഏതു സംയുക്തത്തിലും അതിലടങ്ങുന്ന മൂലകങ്ങളുടെ ദ്രവ്യമാനം (mass) ഒരു നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിലായിരിക്കുമെന്ന് പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജോസഫ് പ്രൂസ്റ്റ് എന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞൻ കണ്ടെത്തി.

ഉദാഹരണമായി കോപ്പർ കാർബണേറ്റിൽ എപ്പോഴും കാർബണിന്റെ ദ്രവ്യമാനത്തിന്റെ 5.3 മടങ്ങ് കോപ്പറും, കാർബണിന്റെ 4 മടങ്ങ് ഓക്സിജനും ആയിരിക്കും എന്ന് പരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെ അദ്ദേഹം കണ്ടെത്തി.

മൂലകങ്ങളുടെ തീരെ ചെറിയ കണികകൾ സങ്കല്പിച്ചാൽ ഇത്തരം താരതമ്യം എണ്ണൽ സംഖ്യകളിലൂടെ ആവാം എന്ന ചിന്തയാകണം, പരമാണു എന്ന ആശയത്തിലേക്ക് നയിച്ചത്. പത്തൊമ്പതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജോൺ ഡാൽട്ടൻ എന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞനാണ് ഇത്തരം ഒരു സിദ്ധാന്തം അവതരിപ്പിച്ചത്.

ഡാൽട്ടന്റെ സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് മൂലകങ്ങളുടെ തീരെ ചെറിയ കണികകളായ പരമാണുക്കൾ (atoms) ചേർന്നാണ് സംയുക്തങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നത്. ഏതു സംയുക്തത്തിലും അതിലെ വിവിധ മൂലകങ്ങളുടെ പരമാണുക്കളുടെ എണ്ണം ഒരു നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിലാണ്.

മറ്റൊരു കണക്ക് നോക്കാം:

ആസിഡും വെള്ളവും 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ കലർത്തി 60 ലിറ്റർ ദ്രാവകം ഉണ്ടാക്കി. ഈ അംശബന്ധം 3 : 4 ആക്കാൻ, ആസിഡാണോ വെള്ളമാണോ കൂടുതൽ ചേർക്കേണ്ടത്? എത്ര ലിറ്റർ?

ആസിഡും വെള്ളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 എന്നു പറഞ്ഞാൽ, വെള്ളത്തിന്റെ അളവിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ് ആസിഡിന്റെ അളവ്.

ഈ അംശബന്ധം 3 : 4 ആക്കണമെന്നു പറഞ്ഞാലോ ?

ആസിഡിന്റെ അളവ്, വെള്ളത്തിന്റെ അളവിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാക്കണം.

$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ഇവയിൽ ഏതാണ് വലുത് (ആറാം ക്ലാസിലെ **ഭാഗക്കണക്കുകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വലുതും ചെറുതും** എന്ന ഭാഗം ഓർക്കുക).

അതറിയാൻ, രണ്ടു ഭിന്നങ്ങളെയും ഒരേ ഛേദമുള്ള രൂപത്തിലാക്കണം:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

$\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$ ആയതിനാൽ $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

അപ്പോൾ ആസിഡിന്റെ അളവാണ് കൂട്ടേണ്ടത്.

എത്ര ലിറ്റർ ആസിഡാണ് ചേർക്കേണ്ടത് എന്നു കണക്കുകൂട്ടാൻ, ആദ്യം ആസിഡും വെള്ളവും എത്ര ലിറ്റർ ഉണ്ടെന്നു കണക്കുകൂട്ടാം. ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 ആയതിനാൽ, അളവുകൾ ഇങ്ങനെ എടുക്കാം:

ആസിഡ് = $2x$ ലിറ്റർ

വെള്ളം = $3x$ ലിറ്റർ

മൊത്തം 60 ലിറ്റർ ആയതിനാൽ

$$5x = 60$$

ഇതിൽനിന്ന് $x = 12$ എന്നു കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ

ആസിഡ് = 24 ലിറ്റർ

വെള്ളം = 36 ലിറ്റർ

ഇനി, അംശബന്ധം 3 : 4 ആകാൻ ചേർക്കേണ്ടത് y ലിറ്റർ ആസിഡ് എന്നെടുത്താൽ, അളവുകൾ എന്താകും ?

ആസിഡ് = $(24 + y)$ ലിറ്റർ

വെള്ളം = 36 ലിറ്റർ

ഇതിൽ ആസിഡിന്റെ അളവ്, വെള്ളത്തിന്റെ അളവിന്റെ $\frac{3}{4}$ ആകണമല്ലോ; അതായത്

$$24 + y = 36 \times \frac{3}{4} = 27$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$y = 3$$

എന്നു കണക്കാക്കാം; അതായത്, 3 ലിറ്റർ ആസിഡ് കൂടി ചേർക്കണം.

കണക്കും കാര്യവും

ആസിഡ് കണക്കിൽ, ചേർക്കേണ്ടത് ആസിഡാണെന്ന് തിരിച്ചറിയാതെ, എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൂട്ടണമെന്നു കണക്കാക്കിയാലോ ?

x ലിറ്റർ വെള്ളം ചേർത്തു എന്നെടുത്താൽ, ആസിഡ് 24 ലിറ്റർ, വെള്ളം $36 + x$ ലിറ്റർ എന്നാകും. വെള്ളത്തിന്റെ അളവ്, ആസിഡിന്റെ അളവിന്റെ $\frac{4}{3}$ ആകണം. അതായത്

$$36 + x = \frac{4}{3} \times 24 = 32$$

ഇതിൽനിന്ന് $x = -4$ എന്നാണല്ലോ കിട്ടുന്നത്. ഇതിന്റെ അർഥം 4 ലിറ്റർ വെള്ളം കുറയ്ക്കുകയാണ് വേണ്ടത് എന്നെടുക്കാം.

അപ്പോൾ 24 ലിറ്റർ ആസിഡ്, 32 ലിറ്റർ വെള്ളം. 3 : 4 ആയില്ലേ ?

ഒരു പ്രശ്നമേയുള്ളൂ; ആസിഡും വെള്ളവും കലർന്ന ദ്രാവകത്തിൽനിന്ന് വെള്ളം മാത്രം എടുത്തു മാറ്റുന്നതെങ്ങനെ? അപ്പോൾ കണക്ക് ശരിയാണ്; പക്ഷേ കാര്യം നടക്കില്ല.

അങ്ങോട്ടും ഇങ്ങോട്ടും

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും 33 സെന്റിമീറ്റർ, 1 സെന്റിമീറ്റർ. മറ്റൊരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും 11 സെന്റിമീറ്റർ, 6 സെന്റിമീറ്റർ. ഈ ചതുരങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്? പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലോ? ഇങ്ങനെ ബന്ധപ്പെടുന്ന മറ്റു ജോടി ചതുരങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

(1) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 2. നീളത്തിന്റെ പകുതി കൂടി കൂട്ടി ചതുരം വലുതാക്കി. വലിയ ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ് ?

(2) രണ്ടു കോണുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 1 : 2 ആണ്. ചെറിയ കോൺ 6° കൂട്ടുകയും, വലിയ കോൺ 6° കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്തപ്പോൾ അംശബന്ധം 2 : 3 ആയി. ആദ്യത്തെ കോണുകൾ എത്ര ഡിഗ്രിയാണ് ?

(3) ഒരു ദ്രാവകത്തിൽ, ആസിഡും വെള്ളവും 3 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. 15 ലിറ്റർ ആസിഡ് കൂടി ഒഴിച്ചപ്പോൾ, ഇത് 3 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിലായി. ഇപ്പോൾ ദ്രാവകത്തിൽ എത്ര ലിറ്റർ ആസിഡും വെള്ളവും ഉണ്ട് ?

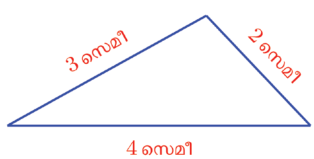
(4) 54 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ഉയരവും നീളവും 4 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്.

(i) ഉയരമോ നീളമോ കൂട്ടി, ഈ അംശബന്ധം 2 : 3 ആക്കണം. ഏതാണ് കൂട്ടേണ്ടത് ? എത്ര കൂട്ടണം ?

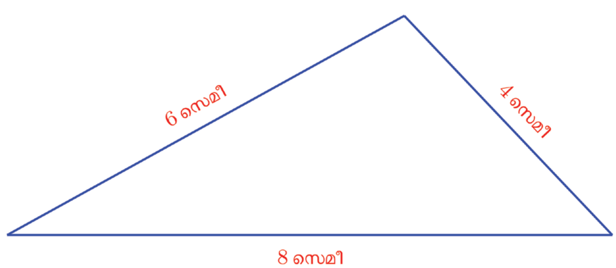
(ii) ഉയരമോ നീളമോ കുറച്ച്, ഈ അംശബന്ധം 2 : 3 ആക്കണം. ഏതാണ് കുറയ്ക്കേണ്ടത് ? എത്ര കുറയ്ക്കണം ?

മൂന്ന് അളവുകൾ

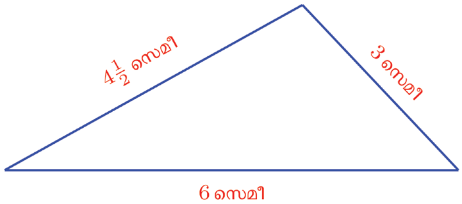
ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:



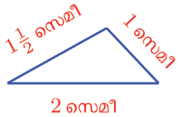
ഇതിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം രണ്ടു മടങ്ങാക്കി മറ്റൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാം:



ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങാക്കിയാൽ ഇങ്ങനെയൊരു ത്രികോണം കിട്ടും.



വശങ്ങളെല്ലാം പകുതിയാക്കിയാലോ ?



മധുരിക്കുന്ന അംശബന്ധം

പഞ്ചസാരയിൽ ഏതെല്ലാം മൂലകങ്ങളാണുള്ളത് എന്നറിയാമോ ?

കാർബൺ, ഹൈഡ്രജൻ, ഓക്സിജൻ ഇവ ഓരോന്നും പല അളവുകളിലാണുള്ളത്. 12 കാർബൺ ആറ്റവും, 22 ഹൈഡ്രജൻ ആറ്റവും, 11 ഓക്സിജൻ ആറ്റവും അടങ്ങിയതാണ് പഞ്ചസാരയുടെ ഒരു തന്മാത്ര. അതായത്, പഞ്ചസാരയിലെ കാർബൺ, ഹൈഡ്രജൻ, ഓക്സിജൻ എന്നിവയുടെ അംശബന്ധം 12 : 22 : 11. പഞ്ചസാര തന്മാത്രയുടെ ചുരുക്കെഴുത്ത് $C_{12}\ H_{22}\ O_{11}$. പഞ്ചസാര ചൂടാക്കിയാൽ എന്താണ് സംഭവിക്കുക? കാരണം എന്താണ്?

ഈ ത്രികോണങ്ങൾ ഓരോന്നിലും, വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററിനെയും, 3 സെന്റിമീറ്ററിനെയും, 2 സെന്റിമീറ്ററിനെയും ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണല്ലോ.

ഇക്കാര്യവും അംശബന്ധമായി പറയാം:

ഈ നാലു ത്രികോണങ്ങളിലും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 4 : 3 : 2 ആണ്.

മറ്റു തരത്തിലുള്ള മൂന്നു അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധവും ഇങ്ങനെ അംശബന്ധമായി പറയാം.

ഉദാഹരണമായി, 15 ലിറ്റർ, 30 ലിറ്റർ, 10 ലിറ്റർ കൊള്ളുന്ന പാത്രങ്ങളുടെ ഉള്ളളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 6 : 2.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ

l, m, n എന്നീ മൂന്നു സംഖ്യകളെ ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്ന ഏതു മൂന്നളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും $l : m : n$ ആണ്

ഒരു കണക്കു നോക്കാം:

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 5 : 7 ആണ്; അതിന്റെ ചുറ്റളവ്, 45 സെന്റിമീറ്ററും. വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം എന്താണ് ?

ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്ററിനെയും 5 സെന്റിമീറ്ററിനെയും 7 സെന്റിമീറ്ററിനെയും ഒരേ സംഖ്യ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചുകിട്ടുന്നവയാണല്ലോ. ഈ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ, ചുറ്റളവ്

$$3x + 5x + 7x = 15x \text{ സെമീ}$$

ഇത് 45 സെന്റിമീറ്ററാണെന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. അപ്പോൾ

$$15x = 45$$

ഇതിൽനിന്ന് $x = 3$ എന്നും, വശങ്ങളുടെ നീളം 9 സെന്റിമീറ്റർ, 15 സെന്റിമീറ്റർ, 21 സെന്റിമീറ്റർ എന്നും കണക്കാക്കാമല്ലോ.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

> ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ, AB, BC ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $3 : 4$ ഉം BC, CA ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $4 : 5$ ഉം ആണ്. മൂന്നു വശങ്ങളും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ് ?

AB, BC ഇവയുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്ററിനെയും 4 സെന്റിമീറ്ററിനെയും ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണല്ലോ. ഈ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ

$$AB = 3x \text{ സെമീ} \quad BC = 4x \text{ സെമീ}$$

ഇനി BC, CA ഇവയുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററിനെയും 5 സെന്റിമീറ്ററിനെയും ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്.

അതിൽ 4 സെന്റിമീറ്ററിനെ x കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ് BC യുടെ നീളം; അപ്പോൾ CA യുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററിനെ ഇതേ സംഖ്യ x കൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിച്ചതാകണമല്ലോ. അതായത്

$$CA = 5x \text{ സെമീ}$$

AB, BC, CA ഇവയുടെ നീളങ്ങൾ $3x$ സെന്റിമീറ്റർ, $4x$ സെന്റിമീറ്റർ, $5x$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെ ആയതിനാൽ, അവയുടെ അംശബന്ധം $3 : 4 : 5$.

ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളത്തിനു പകരം മറ്റ് മൂന്നളവുകളായാലും, അംശബന്ധങ്ങൾ ഇങ്ങനെ ചേർത്തു പറയാമല്ലോ. പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ

> ഏതെങ്കിലും മൂന്നളവുകളിൽ, ആദ്യത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $l : m$ ഉം, രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $m : n$ ഉം ആണെങ്കിൽ, ഈ മൂന്ന് അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $l : m : n$ ആണ്.

ഇനി അംശബന്ധങ്ങൾ ഇങ്ങനെ ആയാലോ ?

> ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ, AB, BC ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $2 : 3$ ഉം BC, CA ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $4 : 5$ ഉം ആണ്. മൂന്നു വശങ്ങളും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ് ?

AB, BC ഇവയുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററിനെയും 3 സെന്റിമീറ്ററിനെയും ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണല്ലോ. ഈ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ

$$AB = 2x \text{ സെമീ} \quad BC = 3x \text{ സെമീ}$$

ഇതുപോലെ BC, CA ഇവയുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററിനെയും 5 സെന്റിമീറ്ററിനെയും മറ്റൊരു സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്. ഈ സംഖ്യ y എന്നെടുത്താൽ

$$BC = 4y \text{ സെമീ} \quad CA = 5y \text{ സെമീ}$$

ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തിൽ BC യുടെ നീളം $3x$ സെന്റിമീറ്ററും, രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിൽ BC യുടെ നീളം $4y$ സെന്റിമീറ്ററും ആണല്ലോ. അപ്പോൾ

$$4y = 3x$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്

$$y = \frac{3}{4}x$$

അപ്പോൾ

$$CA = 5y = 5 \times \frac{3}{4}x = \frac{15}{4}x$$

ഇനി AB, BC, CA എന്നീ മൂന്നു നീളങ്ങളെയും x ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാം.

$AB = 2x$ സെമീ

$BC = 3x$ സെമീ

$CA = \frac{15}{4}x$ സെമീ

അംശബന്ധം എഴുതുന്നത് എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചാണല്ലോ. അതിന് ഇവയെ ഇങ്ങനെ മാറ്റി എഴുതാം:

$AB = 8 \times \frac{x}{4}$ സെമീ

$BC = 12 \times \frac{x}{4}$ സെമീ

$CA = 15 \times \frac{x}{4}$ സെമീ

അതായത് നീളങ്ങൾ 8 സെന്റിമീറ്ററിനെയും 12 സെന്റിമീറ്ററിനെയും 15 സെന്റിമീറ്ററിനെയും $\frac{x}{4}$ എന്ന സംഖ്യ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്; അപ്പോൾ അവയുടെ അംശബന്ധം 8 : 12 : 15.

മട്ടത്രികോണങ്ങൾ

3 സെന്റിമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ, 5 സെന്റിമീറ്റർ വശങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ പ്രത്യേകത എന്താണ്?

$3^2 + 4^2 = 5^2$ ആയതിനാൽ ഇതൊരു മട്ടത്രികോണമാണ്.

വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളെല്ലാം ഇരട്ടിച്ചാലോ? അപ്പോൾ കിട്ടുന്ന ത്രികോണവും മട്ടത്രികോണമാകുമോ ?

$6^2 + 8^2 = 10^2$ എന്നതും ശരിയാണ്.

അതായത്, വശങ്ങൾ ഇരട്ടിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ത്രികോണവും മട്ടത്രികോണം തന്നെ.

വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ x മടങ്ങാക്കിയാലോ?

$(3x)^2 + (4x)^2 = 9x^2 + 16x^2 = 25x^2 = (5x)^2$

അതായത്, $3x$, $4x$, $5x$ വശങ്ങളുള്ള ത്രികോണവും മട്ടത്രികോണമാണ്.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം 3 : 4 : 5 ആയ എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളും മട്ടത്രികോണമാണ്.

വശങ്ങളുടെ നീളം 5 : 12 : 13 ആയ ത്രികോണങ്ങൾ മട്ടത്രികോണമാകുമോ ?

(1) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ 1 : 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഓരോ കോണും എത്രയാണ് ?

(2) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 2 : 3 : 4 ആണ്. ഏറ്റവും വലിയ വശം, ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തെക്കാൾ 20 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലുമാണ്. വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു ചതുരപ്പെട്ടിയുടെ നീളവും, വീതിയും, ഉയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 : 5 ആണ്; അതിന്റെ വ്യാപ്തം 3750 ഘനസെന്റിമീറ്ററും. നീളവും വീതിയും ഉയരവും കണക്കാക്കുക.

(4) ഒരു പെട്ടിയിൽ മൂന്നു നിറത്തിലുള്ള മുത്തുകളുണ്ട്. കറുത്ത മുത്തുകളുടെയും വെളുത്ത മുത്തുകളുടെയും എണ്ണം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം, 3 : 5; വെളുത്ത മുത്തുകളുടെയും ചുവന്ന മുത്തുകളുടെയും എണ്ണം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം, 2 : 3. മൂന്നു നിറത്തിലുമുള്ള മുത്തുകളുടെയും എണ്ണം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ് ?

വരയുടെ ഭാഗങ്ങൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

AB എന്ന വരയെ *P* എന്ന ബിന്ദു, *AP*, *PB* എന്നീ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.

AP, *PB* എന്നീ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ് ? *AP* യുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണല്ലോ *PB*. അപ്പോൾ *AP* യും *PB* യും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 1 : 2.

ഇത് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$AP : PB = 1 : 2$$

ഇക്കാര്യം പറയുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്:

P എന്ന ബിന്ദു, *AB* എന്ന വരയെ 1 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു.

അപ്പോൾ *AB* എന്ന വരയിലെ ഏതു ബിന്ദു എടുത്താലും അത് വരയെ ഒരു നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

Q എന്ന ബിന്ദു, *AB* യെ ഭാഗിക്കുന്ന അംശബന്ധം എന്താണ് ?

1.5 ന്റെ 3 മടങ്ങാണല്ലോ 4.5; അപ്പോൾ

$$AQ : QB = 1:3$$

ഇങ്ങനെ *AB* എന്ന വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവും *AB* യെ ഒരു നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു.

മറിച്ച്, ഏത് അംശബന്ധത്തിലും AB യെ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദു ഉണ്ടോ ?

ഉദാഹരണമായി, AB യെ 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദു ഏതാണ് ?

A യിൽനിന്ന് ആ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം കണക്കാക്കിയാൽ മതിയല്ലോ.

അതായത് ആ ബിന്ദു R എന്നെടുത്താൽ, AR എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണെന്നു കണക്കാക്കണം. $AR : RB = 2 : 3$ ആകണമെങ്കിൽ, AR, RB ഇവ 2 നെയും 3 നെയും ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതായിരിക്കണം. ഗുണിക്കുന്ന സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ

$$AR = 2x \text{ സെമീ} \qquad RB = 3x \text{ സെമീ}$$

ഇവിടെ

$$AR + RB = AB = 6 \text{ സെമീ}$$

ആണല്ലോ. അപ്പോൾ

$$5x = 6$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$x = \frac{6}{5}$$

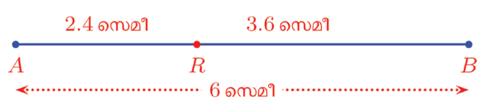
എന്നും തുടർന്ന്

$$AR = \frac{12}{5} \text{ സെമീ} \quad RB = \frac{18}{5} \text{ സെമീ}$$

എന്നും കണക്കാക്കാം.

ഇവയെ ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതുന്നതാണ് ഇവിടെ സൗകര്യം

$$AR = \frac{24}{10} = 2.4 \text{ സെമീ}, \quad RB = \frac{36}{10} = 3.6 \text{ സെമീ}$$

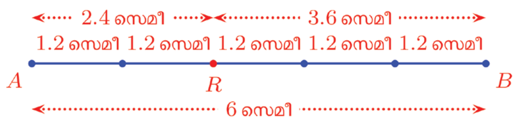


ഈ കണക്കുകൂട്ടലുകൾ ജ്യാമിതീയമായി കാണാം. ഇവിടെ x കണക്കാക്കിയത് എങ്ങനെയാണ്?

$$x = \frac{6}{5} = \frac{12}{10} = 1.2$$

അതായത്, 6 സെന്റിമീറ്ററിനെ 5 സമഭാഗങ്ങളാക്കിയാൽ, ഓരോ ഭാഗത്തിന്റെയും നീളം $x = 1.2$ സെന്റിമീറ്റർ:

ഇതിൽ ആദ്യത്തെ 2 ഭാഗങ്ങൾ ചേർന്നത് *AR,* മിച്ചമുള്ള 3 ഭാഗങ്ങൾ ചേർന്നത് *RB*



അപ്പോൾ *AB* യെ 2 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം എവിടെയാണ് ?

AB യെ 2 + 5 = 7 സമഭാഗങ്ങളാക്കി, അവയിൽ ആദ്യത്തെ 2 ഭാഗം ചേർത്ത് *AS* എന്നും, മിച്ചമുള്ള 5 ഭാഗം ചേർത്ത് *SB* എന്നും എടുക്കണം:

$\frac{6}{7}$ സെന്റിമീറ്റർ, സ്കെയിൽ ഉപയോഗിച്ച് അളക്കാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. എന്നാൽ ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞ രീതിയിൽ ഒരു വരയെ ഏത് അംശബന്ധത്തിലും ഭാഗിക്കാനുള്ള ഒരു മാർഗം ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ കാണാം (**സമാന്തര വരകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **അസമഭാഗങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

അപ്പോൾ, ഒരു വരയെ *m* : *n* എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനത്തെക്കുറിച്ച് എന്തുപറയാം ?

ഒരു വരയെ *m* : *n* എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദു, വരയെ *m* + *n* സമഭാഗങ്ങളാക്കിയതിൽ ആദ്യത്തെ *m* ഭാഗങ്ങളും, മിച്ചമുള്ള *n* ഭാഗങ്ങളുമായി വേർതിരിക്കുന്ന ബിന്ദുവാണ്

ഉദാഹരണമായി, ഒരു വരയിലെ നീളം എന്തായിരുന്നാലും, അതിനെ 2 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം ഇങ്ങനെ കാണിക്കാം:

ഇതിൽനിന്ന് മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി കാണാം.

- *AB* യെ 7 സമഭാഗങ്ങളാക്കിയതിൽ 2 എണ്ണം ചേർന്നതാണ് *AP*
- *AB* യെ 7 സമഭാഗങ്ങളാക്കിയതിൽ 5 എണ്ണം ചേർന്നതാണ് *PB*

അതായത്

- *AB* യുടെ $\frac{2}{7}$ ഭാഗമാണ് *AP*
- *AB* യുടെ $\frac{5}{7}$ ഭാഗമാണ് *PB*

പൊതുവെ എന്തു പറയാം ?

ഒരു വരയെ $m : n$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിച്ചാൽ, ഈ ഭാഗങ്ങൾ മൊത്തം വരയുടെ $\frac{m}{m+n}$ ഭാഗവും $\frac{n}{m+n}$ ഭാഗവുമാണ്

(1) ചുവടെയുള്ള ഓരോ കണക്കിലും, ഒരു വരയുടെ നീളവും അതിലെ ഒരു ബിന്ദു വരയെ ഭാഗിക്കുന്ന അംശബന്ധവും പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. വര വരച്ച് ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക.

(i) $AB = 14$ സെമീ $AP : PB = 3 : 4$

(ii) $AB = 12$ സെമീ $AP : PB = 3 : 5$

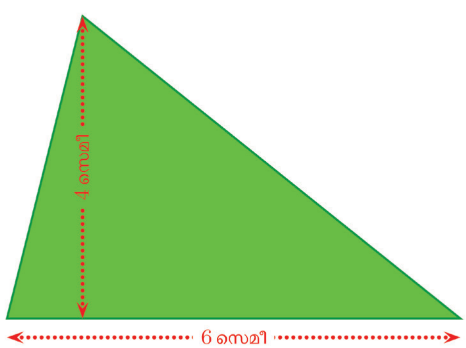
(iii) $AB = 7$ സെമീ $AP : PB = 2 : 3$

(2) 9 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വരയെ ഒരു ബിന്ദു $2 : 3$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു. ഓരോ ഭാഗത്തിന്റെയും നീളം കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു വരയെ $3 : 5$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിച്ചതിൽ വലിയ ഭാഗത്തിന്റെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററാണ്. മൊത്തം വരയുടെ നീളം എത്രയാണ് ?

ത്രികോണഭാഗങ്ങൾ

ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:

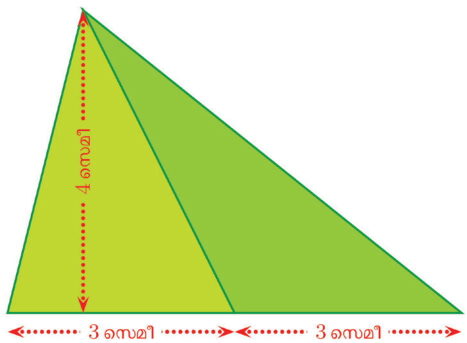


ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററും, അതിൽനിന്ന് എതിർ മൂലയിലേക്കുള്ള ഉയരം 4 സെന്റിമീറ്ററും. പരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12 \text{ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ}$$

ഇനി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ആദ്യം കണ്ട ത്രികോണത്തിന്റെ മുകൾമൂലയും, താഴത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിച്ച് വരച്ചിരിക്കുന്നു.

ഈ വര ത്രികോണത്തെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു. ഈ ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ എത്രയാണ്?

രണ്ടിന്റെയും താഴത്തെ വശങ്ങളുടെ നീളം ഒന്നുതന്നെയല്ലേ?

മുകളിലെ മൂലയിലേക്കുള്ള ഉയരമോ?

അപ്പോൾ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ്

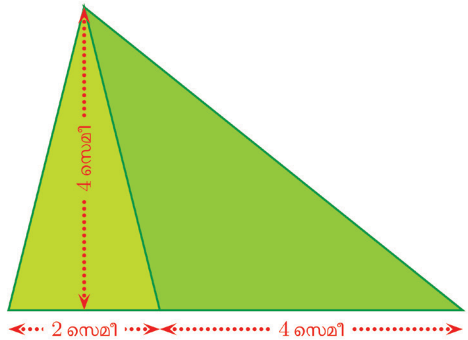
$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 \text{ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ}$$

അളവുകൾ മാറ്റി വേറെ ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചാലും, ഇങ്ങനെ ഭാഗിച്ചു കിട്ടുന്ന ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ പരപ്പളവാകില്ലേ?

പൊതുവെ എന്തു പറയാം?

> ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഒരു മൂലയും എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ത്രികോണത്തെ ഒരേ പരപ്പളവുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു.

ഇനി മുകളിലെ മൂല താഴത്തെ വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിനുപകരം, മറ്റേതെങ്കിലും ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലോ? ഉദാഹരണമായി, ഈ ചിത്രം നോക്കുക:



ഇപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ എത്രയാണ്?

ഇടതു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

വലതു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

അതായത്, ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

താഴത്തെ വശത്തിനെ മുറിച്ചിരിക്കുന്നതും ഇതേ കണക്കിലല്ലേ ? ചെറിയ കഷണത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് വലിയ കഷണത്തിന്റെ നീളം.

ഇക്കാര്യം അംശബന്ധമായി പറഞ്ഞാലോ ?

താഴത്തെ വശത്തെ മുറിച്ചിരിക്കുന്നത് 1 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ; ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നതും അതേ അംശബന്ധത്തിൽ.

അംശബന്ധം മാറ്റിയാലും ഇത് ശരിയാകുമോ ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

(i) ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽ നിന്നുള്ള ഒരു വര എതിർവശത്തെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു; ത്രികോണത്തെത്തന്നെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളാക്കുന്നു.

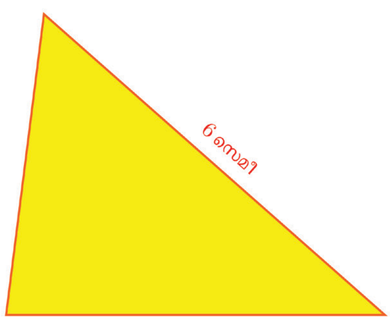
(ii) വശത്തിന്റെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളെയും ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരത്തിന്റെ പകുതി എന്ന ഒരേ സംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് ത്രികോണഭാഗങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ.

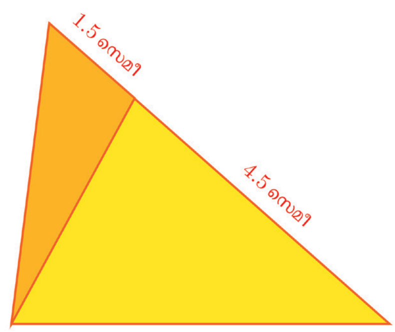
(iii) അപ്പോൾ വശത്തിന്റെ ഭാഗങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം തന്നെയാണ്, ത്രികോണഭാഗങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലും.

ഇതു ചുരുക്കി ഇങ്ങനെ പറയാം:

ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഏതു മൂലയിൽ നിന്നും എതിർവശത്തെയ്ക്കു വരയ്ക്കുന്ന ഒരു വര, ഈ വശത്തിന്റെ നീളത്തെയും, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെയും ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്

ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



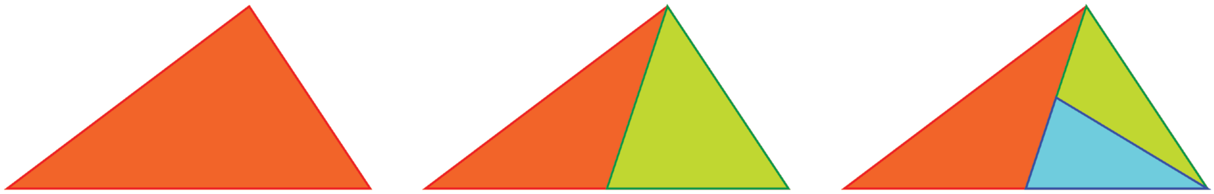


ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതു മൂലയിൽ നിന്നുള്ള വര, വലതു വശത്തെ മുറിക്കുന്നത് എന്ത് അംശബന്ധത്തിലാണ് ?

1.5 ന്റെ 3 മടങ്ങാണല്ലോ 4.5; അപ്പോൾ വശത്തിന്റെ ചെറിയ ഭാഗവും വലിയ ഭാഗവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 1 : 3

വലതു ചിത്രത്തിലെ രണ്ട് ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും ഇതുതന്നെ; അതായത്, ഇവയിലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങാണ് വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

ഇനി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



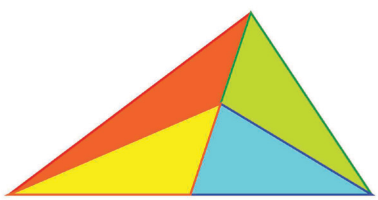
ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ മൂലയും താഴത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിച്ച് രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിച്ചതാണ് രണ്ടാമത്തെ ചിത്രം.

രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലെ രണ്ടു ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളിൽ പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ വലതു മൂലയും ഇടതു വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിച്ചതാണ് മൂന്നാമത്തെ ചിത്രം.

ഈ ചിത്രത്തിലെ ചുവപ്പ്, പച്ച, നീല ത്രികോണങ്ങൾ ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവ്, അവയെല്ലാം ചേർന്ന വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ എത്ര ഭാഗം വീതമാണ് ?

പച്ചയും നീലയും ത്രികോണങ്ങൾ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കാൽ ഭാഗം വീതമാണെന്ന് കാണാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ ?

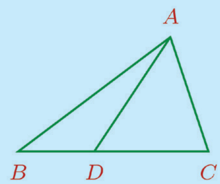
ഇനി ചുവന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതു മൂലയും, വലതു വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും കൂടി യോജിപ്പിച്ചാലോ ?



നാലു ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളും വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗം വീതമാണ് ?

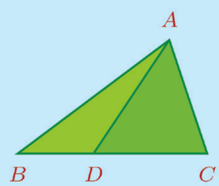
പരപ്പളവുകളുടെ ബന്ധം

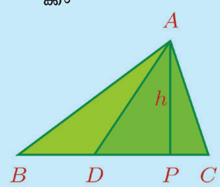
ചിത്രം നോക്കൂ.



ഇതിലെ ABD, ACD എന്നീത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ് ?

A യിൽ നിന്ന് BC യിലേയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക





ഈ ലംബത്തിന്റെ നീളം h എന്നെടുത്താൽ

ΔABD യുടെ പരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2}h \times BD$$

ΔACD യുടെ പരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2}h \times CD$$

അപ്പോൾ

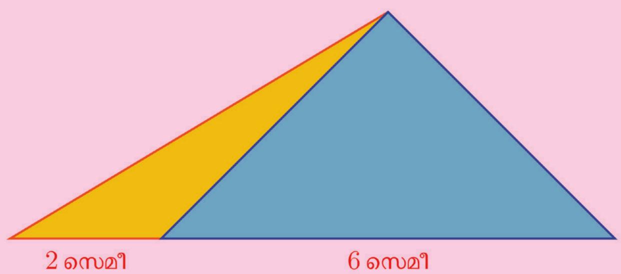
$$\frac{\Delta ABD \text{ യുടെ പരപ്പളവ്}}{\Delta ACD \text{ യുടെ പരപ്പളവ്}} = \frac{BD}{CD}$$

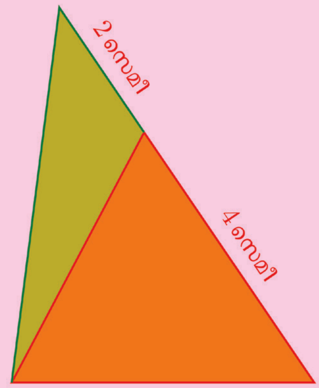
അതായത്, ഈ പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധം BD, CD എന്നീ നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തന്നെയാണ്.

അപ്പോൾ, ഒരു ത്രികോണത്തെ ഒരേ പരപ്പളവുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നതെങ്ങനെ?

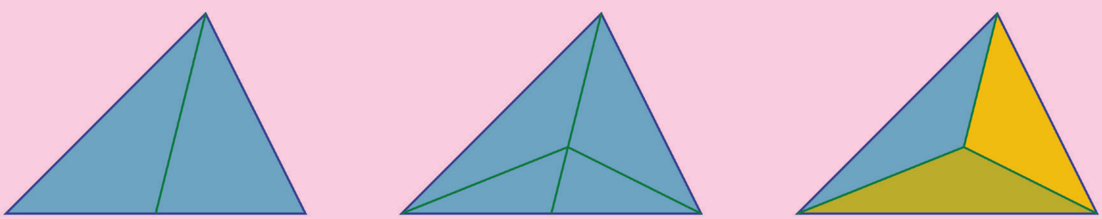
ഒരു ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പ്, രണ്ടാമത്തെ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പിന്റെ ഇരട്ടിയാകണമെങ്കിലോ?

(1) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ചിത്രത്തിലും ഒരു ത്രികോണത്തെ ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു. ഓരോ ചിത്രത്തിലും ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ മൊത്തം ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്നു കണക്കാക്കുക:





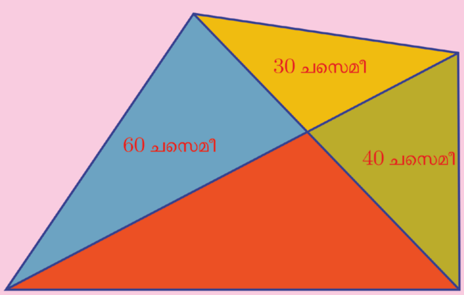
(2) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ മൂലയും താഴത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിച്ചശേഷം, ഈ വരയെ 2 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവുമായി മറ്റു രണ്ടു മൂലകൾ യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.



മൂന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിലെ മൂന്നു ത്രികോണങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് ?

(3) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ അതിനെ നാലു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു. മൂന്നു ഭാഗങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.

ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൊത്തം പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



9

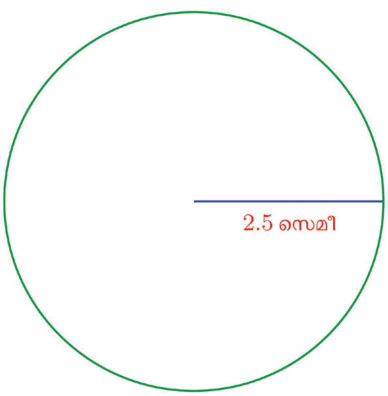
വൃത്തങ്ങൾ

വ്യാസം

ആരം പലതായി വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചു ശീലമുണ്ടല്ലോ. ആരം 2.5 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

ആദ്യം 2.5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ഒരു വര വരയ്ക്കുക.

ഇനി വരയുടെ ഒരറ്റത്ത് കോമ്പസ് മുന ഉറപ്പിച്ച്, പെൻസിൽ മുന മറ്റേ അറ്റം വരെ നീട്ടി, വൃത്തം വരയ്ക്കാമല്ലോ.



ഇതുപോലെ, ആരം 2.25 സെന്റിമീറ്റർ ആയ വൃത്തം വരയ്ക്കാമോ ?

സമഭാജികൾ എന്ന പാഠത്തിൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം 3.25 സെന്റിമീറ്ററായ സമഭുജത്രികോണം വരച്ചത് ഓർത്തുനോക്കൂ. 6.5 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ പകുതിയാക്കിയല്ലേ അതു ചെയ്തത്?

അതുപോലെ 4.5 സെന്റിമീറ്റർ വരയെ പകുതിയാക്കിയാൽ, 2.25 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വര കിട്ടുമല്ലോ.

കേന്ദ്രവും ആരവും

വൃത്തത്തെക്കുറിച്ച് അഞ്ചാംക്ലാസിലെ **വരയും വട്ടവും** എന്ന പാഠത്തിലെ **വട്ടക്കണക്ക്** എന്ന ഭാഗത്ത് പറഞ്ഞത് ഓർമ്മയുണ്ടോ?

വട്ടം വരയ്ക്കാൻ, കോമ്പസിന്റെ മുന ഒരു സ്ഥാനത്ത് ഉറപ്പിച്ചു നിർത്തുകയും, പെൻസിലിന്റെ മുന അതിനു ചുറ്റും കറക്കുകയും ആണല്ലോ. ഈ സഞ്ചാരത്തിലെപ്പോഴും, പെൻസിൽമുന കോമ്പസ് മുനയിൽ നിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലാണ്.

ഇത് കണക്കിന്റെ ഭാഷയിൽ ഇങ്ങനെ പറയാം:

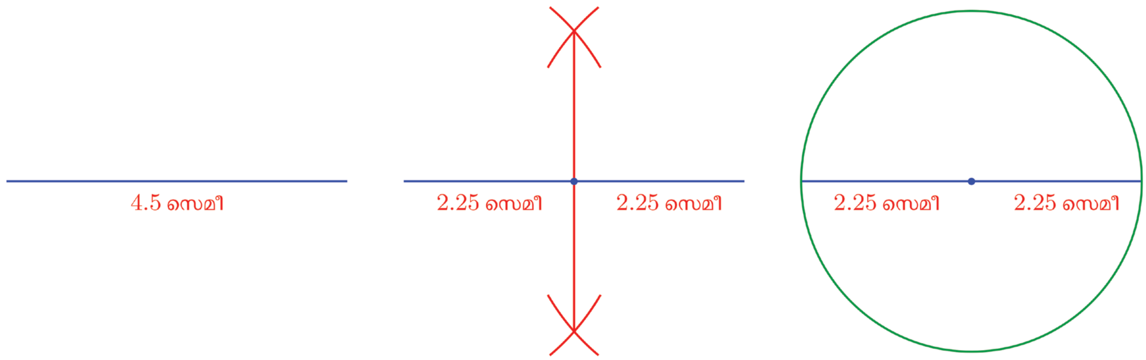
> ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന മറ്റൊരു ബിന്ദുവിന്റെ പാതയാണ് വൃത്തം.

- അനങ്ങാതെ നടുക്കു നിൽക്കുന്ന ബിന്ദു: വൃത്തകേന്ദ്രം.
- അനങ്ങാത്ത ബിന്ദുവും, കറങ്ങുന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള മാറാത്ത അകലം: വൃത്തത്തിന്റെ ആരം

സഞ്ചാരപാത

ജിയോജിബ്രയിൽ A എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Segment with Given Length ഉപയോഗിച്ച് A യിൽ ക്ലിക്കു ചെയ്യുമ്പോൾ വരുന്ന ജാലകത്തിൽ 2.5 എന്ന് നൽകിയാൽ നീളം 2.5 ആയ AB എന്ന ഒരു വര ലഭിക്കും. B എന്ന ബിന്ദുവിന് Trace on നൽകുക (Right click → Trace on). ഈ ബിന്ദുവിന് Animation നൽകുക (Right click → Animation On). B യുടെ സഞ്ചാരപാത എന്താണ് ?

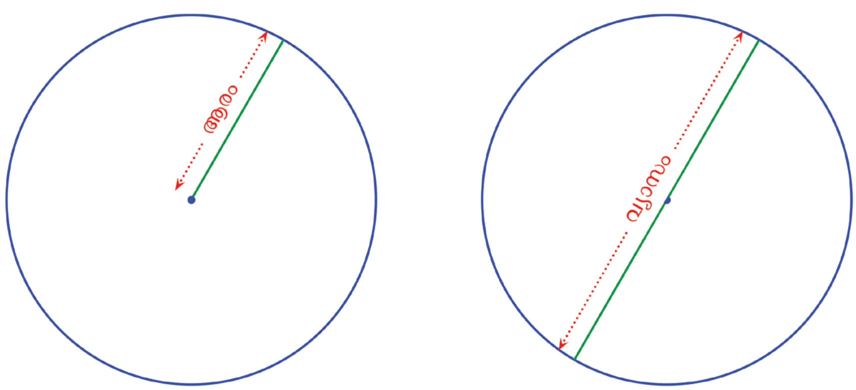
ഏതു വരയെയും ലംബസമഭാജി വരച്ചു പകുതിയാക്കുകയും ചെയ്യാം.



ഇവിടെ ആരത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് നീളമുള്ള വര ഉപയോഗിച്ചാണല്ലോ വൃത്തം വരച്ചത്.
ആരത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങിനെ, **വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം (diameter)** എന്നാണു പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി, ഇപ്പോൾ വരച്ച വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 2.25 സെന്റിമീറ്ററും, വ്യാസം 4.5 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്.

വൃത്തകേന്ദ്രവും, വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവും തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെയും ആരം എന്നു തന്നെയാണ് പറയുന്നത്; അതുപോലെ ആരത്തെ കേന്ദ്രത്തിന്റെ മറുഭാഗത്തെയ്ക്ക് നീട്ടി, വൃത്തവുമായി വീണ്ടും മുട്ടിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന വരയെയും വ്യാസം എന്നുതന്നെയാണ് പറയുന്നത്.



അപ്പോൾ വ്യാസം എന്നതിനെ ഇങ്ങനെയും പറയാം: വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുകയും, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നു പോകുകയും ചെയ്യുന്ന ഒരു വരയാണ് വ്യാസം.

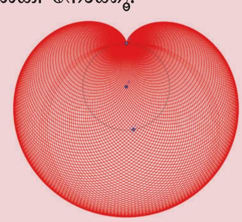
ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾക്കെല്ലാം പൊതുവായി **ഞാൺ (chord)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

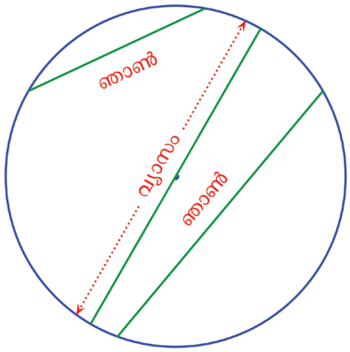
അപ്പോൾ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഞാണുകളാണ് വ്യാസങ്ങൾ.

നിശ്ചിത ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി നിശ്ചിത ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കാൻ Circle : Centre & Radius ഉപയോഗിച്ച് ബിന്ദുവിൽ ക്ലിക്കുചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ ആരം നൽകിയാൽ മതി. നിശ്ചിത ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി മറ്റൊരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നു പോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ Circle with Centre through Point ഉപയോഗിച്ച് ബിന്ദുക്കളിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്കു ചെയ്താൽ മതി.

വൃത്ത ചിത്രങ്ങൾ

A എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ആരം 3 ആയ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് വൃത്തത്തിൽ B, C എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. C കേന്ദ്രമായി B യിൽക്കൂടി കടന്നു പോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തത്തിന് ഉചിതമായ ഒരു നിറം തിരഞ്ഞെടുക്കാവുന്നതാണ് (Right click → Object Properties Color). വൃത്തത്തിന് Trace On നൽകുക. C എന്ന ബിന്ദുവിന് Animation നൽകി നോക്കൂ.





A എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ആരം 3 ആയ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് വൃത്തത്തിൽ B, C എന്നിങ്ങനെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Segment ഉപയോഗിച്ച് B, C ഇവ യോജിപ്പിച്ച് ഞാൺ വരയ്ക്കുക. Distance or Length ഉപയോഗിച്ച് ഈ വരയിൽ ക്ലിക്കു ചെയ്ത് ഞാണിന്റെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. C യുടെ സ്ഥാനം വൃത്തത്തിലൂടെ മാറ്റി നോക്കൂ. ഞാണിന്റെ ഏറ്റവും കൂടിയ നീളം എത്രയാണ് ? എപ്പോഴാണ് ഞാണിന് ഏറ്റവും കൂടിയ നീളം ലഭിക്കുന്നത് ?

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് ഒരു കാര്യം കൂടി വ്യക്തമാണ്: വൃത്തത്തിലെ ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ ഞാൺ, വ്യാസമാണ്.

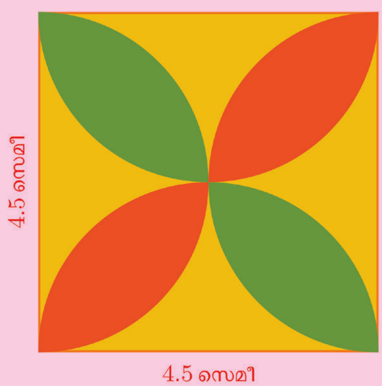
അപ്പോൾ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം എന്നത് എങ്ങനെയെല്ലാം പറയാം ?

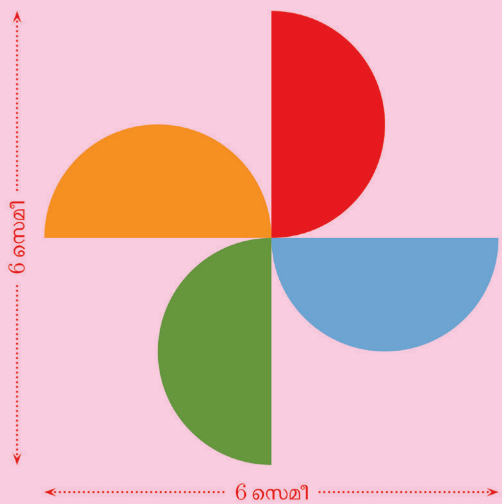
ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം

- ആരത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്
- വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഞാണാണ്
- വൃത്തത്തിലെ ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ ഞാണാണ്

(1) ആരം 2.75 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

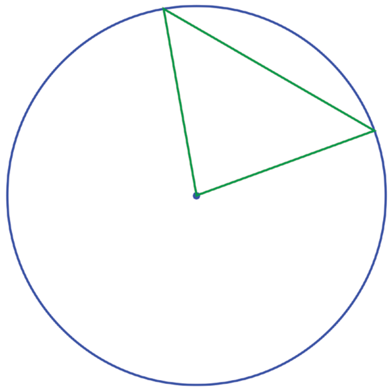
(2) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.





ഞാണുകൾ

ഒരു ഞാണിന്റെ രണ്ടറ്റവും വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ ഒരു ത്രികോണം കിട്ടുമല്ലോ:

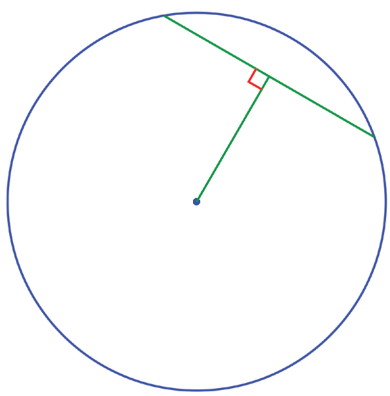


ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം ഞാൺ തന്നെ; മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ വൃത്തത്തിന്റെ ആരമാണ്, അതിനാൽ തുല്യവും.

അതായത്, ഇതൊരു സമപാർശ്വത്രികോണമാണ്. ഏതു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിലും, തുല്യമായ വശങ്ങൾ ചേരുന്ന മൂലയിൽ നിന്ന് എതിർവശത്തെക്കുള്ള ലംബം, ഈ വശത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യും എന്ന് **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ (**സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

ഇവിടെ തുല്യവശങ്ങൾ ചേരുന്ന മൂല വൃത്തകേന്ദ്രമാണ്; എതിർവശം, ഞാണും. അപ്പോൾ മുകളിൽ പറഞ്ഞ ത്രികോണതത്വം, ഒരു വൃത്തതത്വമായി ഇങ്ങനെ പറയാം:

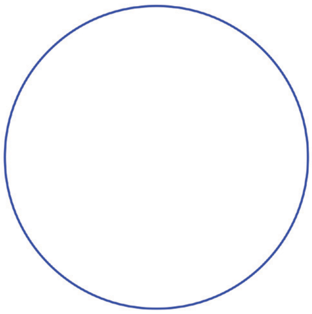
വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഞാണിലേക്കുള്ള ലംബം, ഞാണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു



തുല്യത്രികോണം എന്ന പാഠത്തിലെ **സമപാർശ്വത്രികോണം** എന്ന ഭാഗത്തിൽ പറഞ്ഞതുപോലെ ഇക്കാര്യംതന്നെ മറ്റു രണ്ട് തരത്തിലും പറയാം:

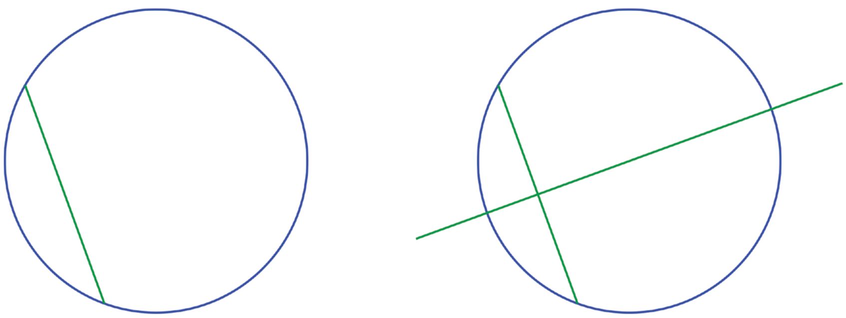
- ഞാണിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും വൃത്തകേന്ദ്രവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയാണ്, ഞാണിന്റെ ലംബസമഭാജി
- ഞാണിന്റെ ലംബസമഭാജി, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകും

ഇതുപയോഗിച്ച്, ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കാം. ഒരു വളയോ, ചെറിയൊരു വട്ടപ്പാത്രമോ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക:

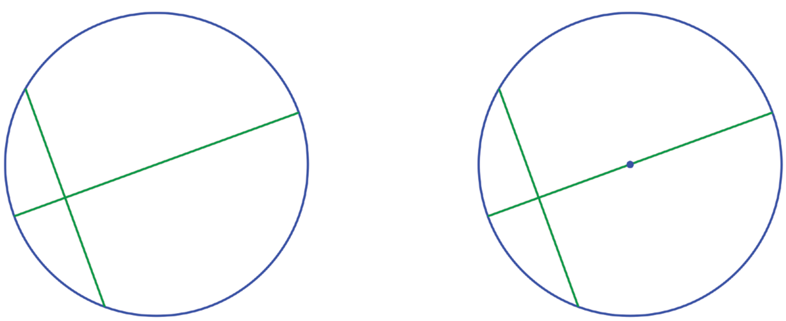


A കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിന് BC എന്ന ഞാൺ വരയ്ക്കുക. Perpendicular Bisector ഉപയോഗിച്ച് ഞാണിന്റെ ലംബസമഭാജി വരയ്ക്കുക. ഇത് വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ ക്കൂടി കടന്നു പോകുന്നുണ്ടോ? B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

ഇതിന്റെ കേന്ദ്രം ഏതു ഞാണിന്റെയും ലംബസമഭാജിയിലാണല്ലോ. അപ്പോൾ ആദ്യം ഇതിലെ ഒരു ഞാണും അതിന്റെ ലംബസമഭാജിയും വരയ്ക്കാം.

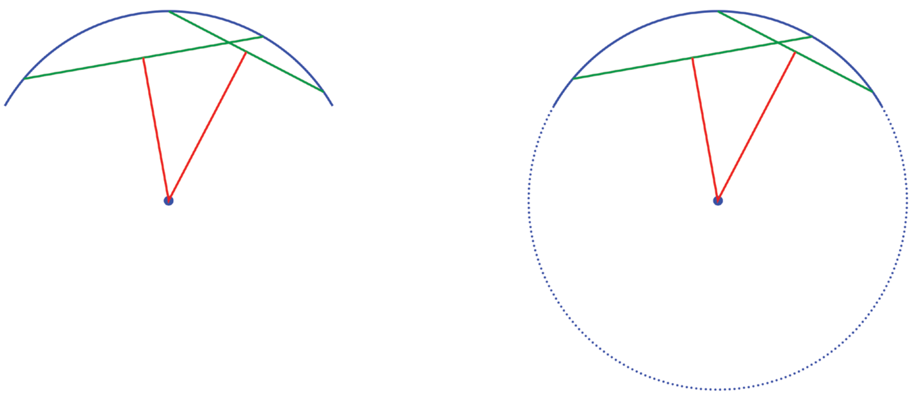


ഈ ലംബസമഭാജി വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുമല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള അതിന്റെ ഭാഗങ്ങൾ മായ്ച്ചുകളഞ്ഞാൽ, കേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഞാണായി; അതായത് വ്യാസം. ഇനി ഈ വ്യാസത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവായി കേന്ദ്രം അടയാളപ്പെടുത്താമല്ലോ:

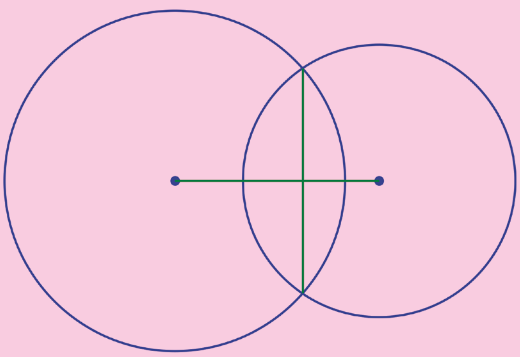


ഇനി വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗം മാത്രം (ഉദാഹരണമായി, ഒരു വളക്കഷണം) കിട്ടിയാലും, ഇതുപോലെ വൃത്തകേന്ദ്രവും അതുവഴി മുഴുവൻ വൃത്തവും കണ്ടുപിടിക്കാം. ആദ്യം ഈ കഷ ണത്തിൽത്തന്നെ രണ്ടു ഞാണുകൾ വരയ്ക്കുക:

വൃത്തകേന്ദ്രം ഈ രണ്ടു ഞാണുകളുടെയും ലംബസമഭാജിയിൽ ആകണം; അതായത്, അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവാണ് വൃത്തകേന്ദ്രം:



(1) ചിത്രത്തിലെ വിലങ്ങനെയുള്ള വര, വൃത്തകേന്ദ്രങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചു വരച്ചതും, കുത്തനെയുള്ള വര, വൃത്തങ്ങൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു വര ച്ചതുമാണ്.



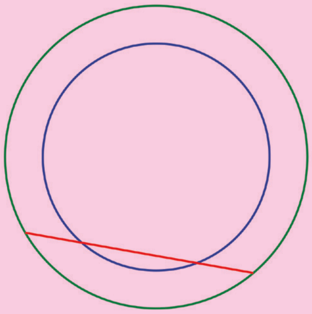
ചുവടെപ്പറയുന്ന കാര്യങ്ങളുടെ കാരണമെഴുതുക:

(i) കുത്തനെയുള്ള വരയുടെ ലംബസമഭാജി, രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെയും കേന്ദ്രങ്ങ ളിലൂടെ കടന്നുപോകും.

(ii) വിലങ്ങനെയുള്ള വര, കുത്തനെയുള്ള വരയുടെ ലംബസമഭാജിയാണ്.

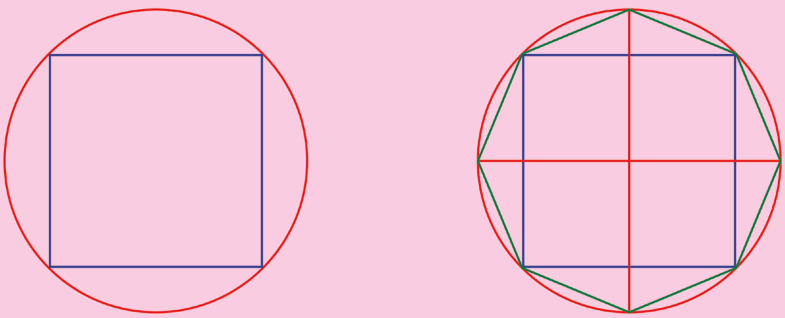
ഇതിൽനിന്നു കിട്ടുന്ന പൊതുതത്വം എന്താണ്?

(2) ഒരേ കേന്ദ്രമായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളും, ഒരു വരയുമാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്:



വരയുടെ ഇരുഭാഗത്തും, വൃത്തങ്ങൾക്കിടയിലെ ഭാഗങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(3) ഒരു സമചതുരവും, അതിന്റെ നാലു മൂലകളിലൂടെയുള്ള വൃത്തവും വരയ്ക്കുക. സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായ വ്യാസങ്ങൾ വൃത്തത്തെ മുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കളും, സമചതുരത്തിന്റെ മൂലകളും യോജിപ്പിച്ച് മറ്റൊരു ബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക.

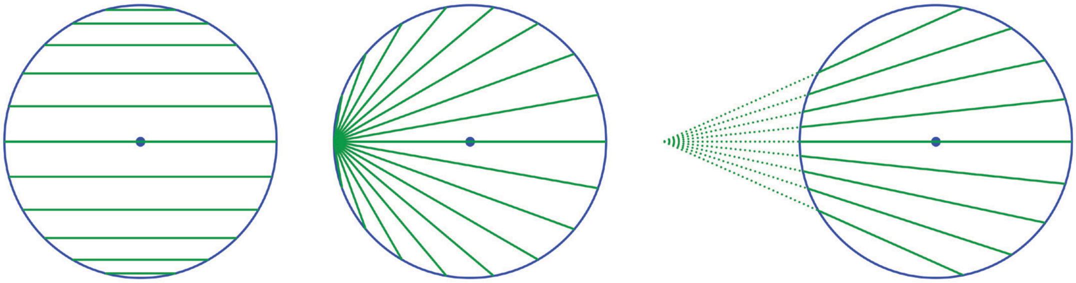


ഇതൊരു സമഅഷ്ടഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

തുല്യ ഞാണുകൾ

വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന ഞാണുകളാണ് വ്യാസങ്ങൾ; ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ ഞാണുകളും വ്യാസങ്ങൾതന്നെ.

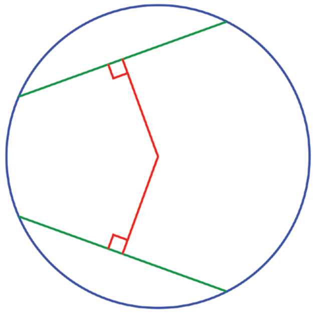
കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നകലുംതോറും, ഞാണിന്റെ നീളം കുറഞ്ഞുവരും:



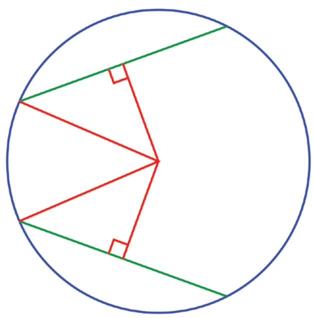
നിരങ്ങിനീങ്ങിയാലും, കറങ്ങിനീങ്ങിയാലും, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു തോന്നുന്നില്ലേ ?

ഇതെങ്ങനെ ഉറപ്പിക്കും ?

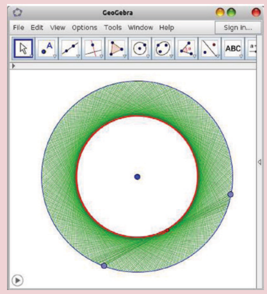
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരേ ലംബദൂരത്തിലുള്ള രണ്ടു ഞാണുകൾ. ഇവയ്ക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു കാണിക്കാൻ, ഓരോന്നിന്റെയും ഒരറ്റം, വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുക:



ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ട് ഒരു ഞാൺ വരയ്ക്കുക. ഈ ഞാണിന്റെ മധ്യബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഞാണിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾക്ക് Animation നൽകുക. ഞാണിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിന് Trace On നൽകുക. ഇതിന്റെ സഞ്ചാരപാത എന്താണ്? എന്തുകൊണ്ടാണിങ്ങനെ ? ഞാണിന് Trace On നൽകി നോക്കൂ. ഞാണിന് നിറം നൽകി ചിത്രം മനോഹരമാക്കുകയുമാവാം.



ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ കർണ്ണങ്ങൾ, വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങളാകയാൽ തുല്യമാണ്. ഒരു ജോടി ലംബവശങ്ങൾ ഞാണുകളിലേക്കുള്ള തുല്യ ലംബങ്ങളാണ്. അപ്പോൾ പൈഥാഗറസ് തത്വമനുസരിച്ച്, മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബം മുറിച്ച കഷണങ്ങളായതിനാൽ, ഈ മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങൾ ഞാണുകളുടെ പകുതിയാണ്, അങ്ങനെ ഞാണുകളുടെ പകുതികൾ തുല്യമാണെന്നു കാണാം; ഞാണുകളും.

വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്

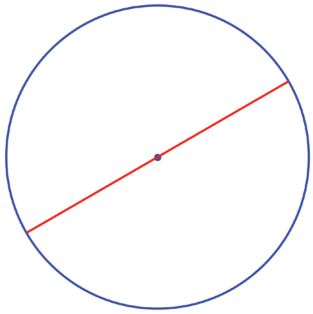
ഇതു തിരിച്ചു പറഞ്ഞാൽ ശരിയാകുമോ ?

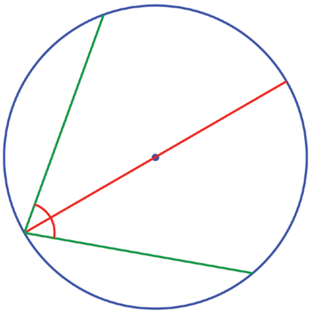
അതായത്, ഒരു വൃത്തത്തിലെ തുല്യമായ രണ്ടു ഞാണുകൾ, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലാണോ ?

ഇനി ആദ്യം കണ്ട മൂന്നു ചിത്രങ്ങളിലെ രണ്ടാമത്തെ ചിത്രം നോക്കുക. ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന ഞാണുകളിൽ, ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് നീളവും മാറുന്നില്ലേ ?

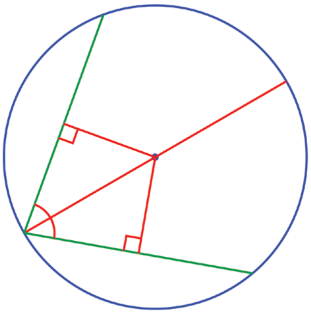
വ്യാസത്തിന്റെ ഇരുവശത്തുമായി ഒരേ കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണോ ?

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ. വൃത്തത്തിൽ ഒരു വ്യാസം വരച്ച്, അതിന്റെ ഇരുവശത്തുമായി ഒരേ കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഞാണുകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.





ഈ ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണോ എന്നു നോക്കാൻ, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഇവ രണ്ടിലേക്കും ലംബം വരയ്ക്കാം:



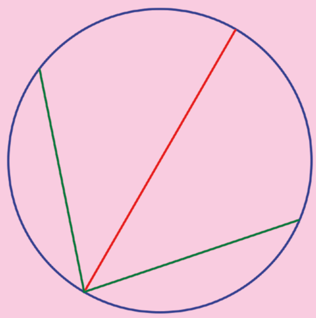
ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന മട്ടത്രികോണങ്ങളിലെ രണ്ടു കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, മൂന്നാമത്തെ കോണുകളും തുല്യമാണ്, ഇവയ്ക്ക് ഒരേ കർണ്ണവുമാണല്ലോ. ഒരു വശവും അതിലെ രണ്ടു കോണുകളും തുല്യമായതിനാൽ, ത്രികോണങ്ങളിലെ മറ്റു വശങ്ങളും തുല്യമാണ് (**തുല്യ ത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **രണ്ടു കോണുകൾ** എന്ന ഭാഗം).

ത്രികോണങ്ങളുടെ പച്ച വശങ്ങൾ ഞാണുകളുടെ പകുതിയാണല്ലോ. ഇവ തുല്യമായതിനാൽ, ഞാണുകളും തുല്യം തന്നെ.

മറിച്ച്, ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റത്തുനിന്ന് ഒരേ നീളമുള്ള രണ്ടു ഞാണുകൾ വരച്ചാൽ, അവ വ്യാസവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ തുല്യമായിരിക്കുമോ ?

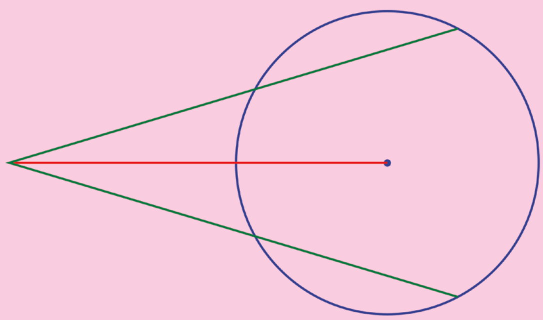
(1) ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഒരേ നീളമുള്ള ഞാണുകളെല്ലാം കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(2) ചിത്രത്തിൽ വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റത്തുനിന്ന് ഒരേ നീളമുള്ള രണ്ടു ഞാണുകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.



ഞാണുകൾ വ്യാസവുമായുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

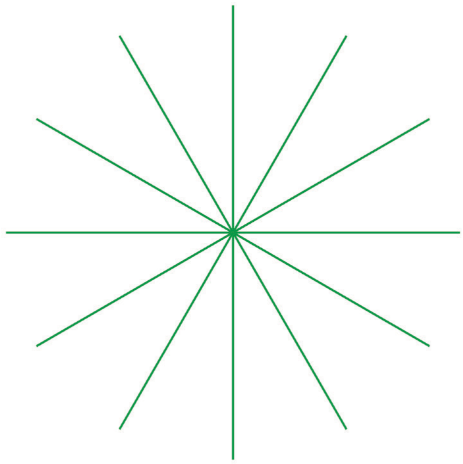
(3) ചിത്രത്തിൽ വൃത്തത്തിലെ ഒരേ നീളമുള്ള രണ്ടു ഞാണുകൾ നീട്ടിവരച്ചത് ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു:



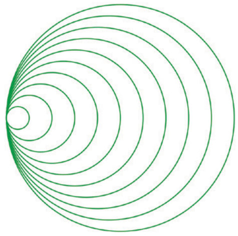
കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും വൃത്തകേന്ദ്രവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുമായി ഒരേ കോണുകളാണ് ഈ വരകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നത് എന്നു തെളിയിക്കുക.

വരകളും വൃത്തങ്ങളും

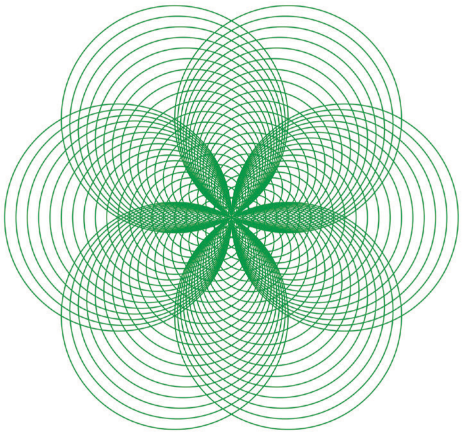
ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന അനേകം വരകൾ വരയ്ക്കാം:



ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന അനേകം വൃത്തങ്ങളും വരയ്ക്കാം; ഏതെങ്കിലും ബിന്ദു കേന്ദ്രമായും, ഈ നിശ്ചിത ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം ആരമായും വരച്ചാൽ മതിയല്ലോ.



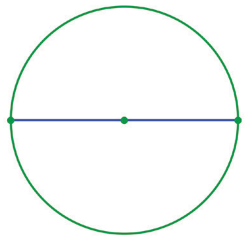
കൂടുതൽ വൃത്തങ്ങൾ വരച്ച്, ഭംഗിയുള്ള ചിത്രങ്ങളും വരയ്ക്കാം:



ഇനി രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താലോ? അവ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു വര വരയ്ക്കാം. ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ?

നോട്ടുബുക്കിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. അവയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമോ?

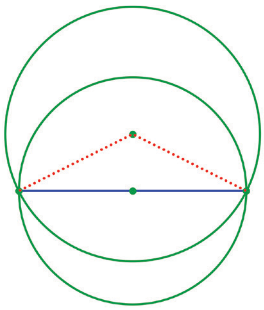
വളരെയെളുപ്പം ചെയ്യാവുന്നത്, ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വ്യാസമായി വൃത്തം വരയ്ക്കുകയാണ്.



മറ്റൊരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമോ?

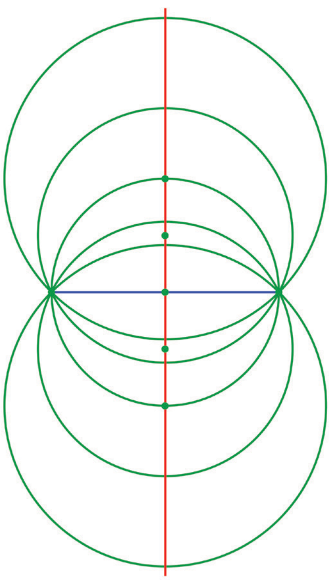
അതിന്റെ കേന്ദ്രം എവിടെയും ആകാമോ?

ഈ ബിന്ദുക്കൾ വൃത്തത്തിലാകണമെങ്കിൽ, അവ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലായിരിക്കണ്ടേ?



തിരിച്ചു പറഞ്ഞാൽ ഈ ബിന്ദുക്കളിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലായ ഒരു ബിന്ദുവെടുത്താൽ, അതു കേന്ദ്രമായും ഈ അകലം ആരമായും വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തം ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകും:

രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലായതിനാൽ, കേന്ദ്രം ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലായിരിക്കണം. മറിച്ച്, ഈ ലംബസമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദു കേന്ദ്രമായും ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാമല്ലോ.

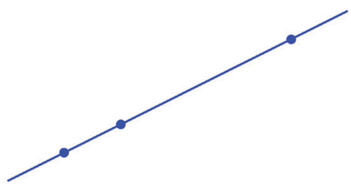


AB എന്ന ഒരു വര വരച്ച് അതിന്റെ ലംബ സമഭാജി വരയ്ക്കുക. ഇതിൽ C കേന്ദ്രമായി A യിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിന് Trace On നൽകുക. C എന്ന ബിന്ദുവിന് Animation നൽകി നോക്കൂ.

അതായത്, രണ്ടു നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കളിലൂടെ ഒരേയൊരു വര മാത്രമേ വരയ്ക്കാൻ കഴിയുള്ളൂ; പക്ഷേ അനേകം വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.

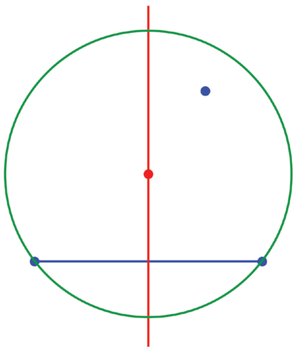
ഇനി മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ എടുത്താലോ ?

ഏതെങ്കിലും രണ്ടെണ്ണം യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിൽത്തന്നെയാണ് മൂന്നാമത്തെ ബിന്ദു എങ്കിൽ, ആ വര ഈ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും കടന്നുപോകും; അല്ലെങ്കിൽ മൂന്നിലും കൂടി കടന്നു പോകുന്ന വര വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല.



ഏതെങ്കിലും മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നു പോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ ?

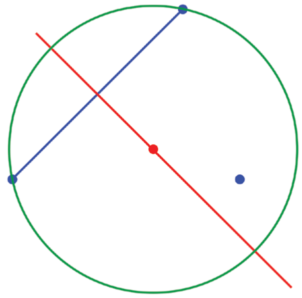
ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെങ്കിൽ കഴിയില്ല. അല്ലെങ്കിലോ ?



വരയ്ക്കാൻ ശ്രമിക്കുന്നതിനു മുമ്പ് അൽപമൊന്നാലോചിക്കാം (ചിന്തയ്ക്കു ശേഷം മാത്രം പ്രവൃത്തി എന്നത് ഗണിതരീതി).

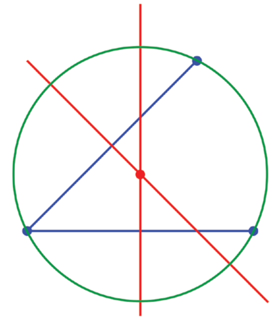
ഇതിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി എടുത്താലും, ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ജോടി ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദുവെടുത്താലും അവയിലൂടെയുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കാം.



മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി Circle through 3 Points ഉപയോഗിച്ച് അവയിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാകുമ്പോൾ എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്?

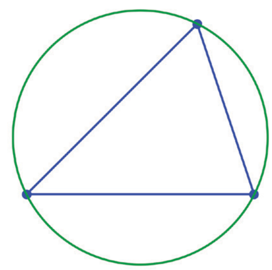
ആദ്യമെടുത്ത ഒരു ജോടി ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വൃത്തം കിട്ടാൻ, കേന്ദ്രം ആദ്യത്തെ സമഭാജിയിലായിരിക്കണം; രണ്ടാമത്തെ ജോടി ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള വൃത്തം കിട്ടാൻ, കേന്ദ്രം, രണ്ടാമത്തെ സമഭാജിയിലായിരിക്കണം.



രണ്ടു സമഭാജിയിലുമുള്ള ബിന്ദു എടുത്താലോ, അതായത്, അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു ?

മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടിയും കടന്നു പോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാമല്ലോ.

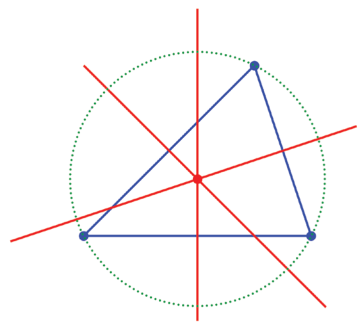
> ഒരേ വരയിൽ അല്ലാത്ത ഏതു മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന ഒരേയൊരു വൃത്തം വരയ്ക്കാം



മിച്ചമുള്ള ഒരു ജോടി ബിന്ദുക്കളും കൂടി യോജിപ്പിച്ചാൽ ഒരു ത്രികോണമാകും; വൃത്തം അതിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിലൂടെയും കടന്നുപോകും:

അപ്പോൾ മുകളിൽപ്പറഞ്ഞ കാര്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

> ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും മൂന്നു മൂലകളിൽകൂടിയും കടന്നു പോകുന്ന ഒരേ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാം



ഈ വൃത്തത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ **പരിവൃത്തം** (**circumcircle**) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി കാണാം. ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെയും, ഇടതു വശത്തിന്റെയും ലംബസമഭാജികൾ വരച്ചാണ് **പരിവൃത്തകേന്ദ്രം** (**circumcentre**) കണ്ടുപിടിച്ചത്. വലതു വശവും പരിവൃത്തത്തിന്റെ ഞാൺ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ ലംബസമഭാജിയും പരിവൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകും.

> ഏതു ത്രികോണത്തിലും മൂന്നു വശങ്ങളുടെയും ലംബസമഭാജികൾ ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു

ചുവടെപ്പറയുന്ന അളവുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് അവ ഓരോന്നിന്റെയും പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക.

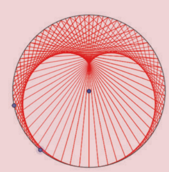
(i) രണ്ട് വശങ്ങൾ 4, 5 സെന്റിമീറ്റർ; അവ ചേരുന്ന കോൺ 60°.

(ii) രണ്ട് വശങ്ങൾ 4, 5 സെന്റിമീറ്റർ; ചേരുന്ന കോൺ 120°.

(iii) രണ്ട് വശങ്ങൾ 4, 5 സെന്റിമീറ്റർ; ചേരുന്ന കോൺ 90°.

(പരിവൃത്തകേന്ദ്രത്തിന്റെ സ്ഥാനം മാറുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക)

ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ BC എന്ന ഞാൺ വരയ്ക്കുക. B എന്ന ബിന്ദുവിൽ Right Click ചെയ്ത് Object Properties ൽ Algebra എന്നതിൽ Speed 3 എന്ന് നൽകുക. ഇതുപോലെ C എന്ന ബിന്ദുവിന് Speed 6 എന്നും നൽകുക. ഞാണിന് Trace On നൽകിയതിനുശേഷം അഗ്രബിന്ദുക്കൾക്ക് Animation നൽകുക.



ബിന്ദുക്കൾക്ക് Speed 2 എന്നും 6 എന്നും നൽകിനോക്കൂ. ചിത്രത്തിന് എന്ത് മാറ്റമാണ് വരുന്നത്? മറ്റ് സംഖ്യകൾ നൽകി നോക്കൂ.

10

ദശാംശരൂപങ്ങൾ

ആദ്യരൂപങ്ങൾ

ചില ഭിന്നസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം ദശാംശരൂപങ്ങൾ ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (**ദശാംശരീതികൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഭിന്നവും ദശാംശവും** എന്ന ഭാഗം). ഉദാഹരണമായി,

$$\frac{3}{10} = 0.3$$

$$\frac{29}{100} = 0.29$$

$$\frac{347}{1000} = 0.347$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാം.

മറിച്ച്, ദശാംശരൂപത്തിലെഴുതിയ ചില സംഖ്യകളെ 10 ന്റെ ഏതെങ്കിലും കൃതി ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാം.

ഉദാഹരണമായി

$$0.7 = \frac{7}{10}$$

$$0.91 = \frac{91}{100}$$

$$0.671 = \frac{671}{1000}$$

ഇവയെ $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ 10 ന്റെ കൃതികൾ ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകളായി പിരിച്ചെഴുതാം:

$$0.91 = \frac{91}{100} = \frac{90}{100} + \frac{1}{100} = \frac{9}{10} + \frac{1}{100}$$

$$0.671 = \frac{671}{1000} = \frac{600}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{1}{1000} = \frac{6}{10} + \frac{7}{100} + \frac{1}{1000}$$

അപ്പോൾ 0.03 എന്നെഴുതുന്നതിന്റെ അർഥമെന്താണ്?

$$0.03 = \frac{0}{10} + \frac{3}{100} = \frac{3}{100}$$

0.0203 ആയാലോ ?

$$0.0203 = \frac{0}{10} + \frac{2}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{3}{10000} = \frac{200}{10000} + \frac{3}{10000} = \frac{203}{10000}$$

ചുവടെ ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതിയിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെയെല്ലാം ഭിന്നസംഖ്യാരൂപത്തിൽ എഴുതുക.

(i) 0.1 (ii) 0.01 (iii) 0.11 (iv) 0.101 (v) 0.0101

മറ്റു ചില ഭിന്നങ്ങൾ

ചില ഭിന്നങ്ങളുടെ ഛേദം 10 ന്റെ കൃതിയല്ലെങ്കിലും, അത്തരത്തിലുള്ള രൂപത്തിൽ മാറ്റിയെഴുതാം.

ഉദാഹരണമായി, 10 = 2 × 5 ആയതിനാൽ

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0.2$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{8}{10} = 0.8$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാം.

2 ഉം 5 ഉം 10 ന്റെ ഘടകങ്ങളായതുകൊണ്ടാണല്ലോ ഇതു സാധിച്ചത്. അപ്പോൾ $\frac{1}{4}$ നെ ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതുന്നതെങ്ങനെ ?

4 എന്ന സംഖ്യ 10 ന്റെ ഘടകമല്ലെങ്കിലും, 100 ന്റെ ഘടകമാണല്ലോ.

$$4 \times 25 = 100$$

ഇതുപയോഗിച്ച്

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0.75$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാം.

കൂടാതെ

$$\frac{1}{25} = \frac{1 \times 4}{25 \times 4} = \frac{4}{100} = 0.04$$
$$\frac{2}{25} = \frac{2 \times 4}{25 \times 4} = \frac{8}{100} = 0.08$$
$$\frac{13}{25} = \frac{13 \times 4}{25 \times 4} = \frac{52}{100} = 0.52$$

എന്നും കണക്കാക്കാം.

ഇനി $\frac{1}{8}$ ആയാലോ?

8 എന്ന സംഖ്യ 10 ന്റെയോ, 100 ന്റെയോ ഘടകമല്ല.

പക്ഷേ $8 = 2 \times 2 \times 2$ ആയതിനാൽ, മൂന്നു തവണ 5 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ, മൂന്നു 10 കളുടെ ഗുണിതമാകില്ലേ?

കണക്കു ഭാഷയിൽ,

$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 = 1000$$

അതായത്

$$8 \times 125 = 1000$$

ഇതുപയോഗിച്ച്

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \times 125}{8 \times 125} = \frac{125}{1000} = 0.125$$
$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 125}{8 \times 125} = \frac{375}{1000} = 0.375$$

എന്നും

$$\frac{1}{125} = \frac{1 \times 8}{125 \times 8} = \frac{8}{1000} = 0.008$$
$$\frac{3}{125} = \frac{3 \times 8}{125 \times 8} = \frac{24}{1000} = 0.024$$
$$\frac{13}{125} = \frac{13 \times 8}{125 \times 8} = \frac{104}{1000} = 0.104$$

എന്നുമെല്ലാം എഴുതാമല്ലോ.

ഇനി $\frac{3}{160}$ ആയാലോ?

ആദ്യം ഛേദത്തിനെ ഘടകങ്ങളാക്കാം.

$$160 = 32 \times 5 = 2^5 \times 5$$

ഇതിനെ ഗുണിച്ച്, 10 ന്റെ ഏതു കൃതിയാക്കാം?

അതിന് ഏതു സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിക്കണം ?

$$160 \times 5^4 = (2^5 \times 5) \times 5^4 = 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$$

അപ്പോൾ

$$\frac{3}{160} = \frac{3 \times 5^4}{160 \times 5^4} = \frac{3 \times 625}{100000} = \frac{1875}{100000} = 0.01875$$

അപ്പോൾ ഏതുതരം ഭിന്നസംഖ്യകളെയാണ് ഇത്തരത്തിൽ ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതാൻ കഴിയുന്നത് ?

(1) ചുവടെയുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകളെ ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതുക.

(i) $\frac{3}{20}$ (ii) $\frac{3}{40}$ (iii) $\frac{13}{40}$ (iv) $\frac{7}{80}$ (v) $\frac{5}{16}$

(2) ചുവടെയുള്ള തുകകളുടെ ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125}$

(ii) $\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4}$

(iii) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$

(3) ഒരു രണ്ടക്ക സംഖ്യയെ മറ്റൊരു രണ്ടക്ക സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചപ്പോൾ 5.875 കിട്ടി. സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ് ?

പുതിയ രൂപങ്ങൾ

ഛേദം 10 ന്റെ കൃതിയല്ലാത്ത ചില ഭിന്നങ്ങളെ, അത്തരം രൂപത്തിലാക്കി ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതുന്നത് കണ്ടല്ലോ.

$\frac{1}{3}$ നെ ഇങ്ങനെ മാറ്റാൻ കഴിയുമോ ?

$\frac{1}{3}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യയ്ക്ക് പല രൂപങ്ങൾ ഉണ്ടല്ലോ ?

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \ldots$$

ഇവയിൽ എല്ലാംതന്നെ ഛേദം 3 ന്റെ ഗുണിതമാണ്.

അപ്പോൾ $\frac{1}{3}$ ന്റെ പല രൂപങ്ങളിൽ ഒന്നിലും 10 ന്റെ കൃതികളൊന്നും ഛേദമായി വരില്ല. കാരണം, 10 ന്റെ കൃതികളെയെല്ലാം 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം ഒന്നാണ്.

$$10 = (3 \times 3) + 1$$

$$100 = (3 \times 33) + 1$$

$$1000 = (3 \times 333) + 1$$

അതിനാൽ $\frac{1}{3}$ നെ ഇതുവരെ കണ്ടതുപോലെയുള്ള ദശാംശരൂപമായി എഴുതാൻ കഴിയില്ല.

എന്നാൽ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തുനില്ക്കുന്ന ചില ഭിന്നസംഖ്യകളെ ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതാം.

അതിന് ആദ്യം മുകളിൽ ഭാഗവും മിച്ചവുമായി എഴുതിയതെല്ലാം ഭിന്നരൂപത്തിൽ എഴുതാം:

$$\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{100}{3} = 33 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1000}{3} = 333 + \frac{1}{3}$$

ഇവ ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാമല്ലോ

$$\frac{1}{3} \times 10 = 3 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \times 100 = 33 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \times 1000 = 333 + \frac{1}{3}$$

ഇതിൽ ആദ്യത്തെതു നോക്കുക. $\frac{1}{3}$ ന്റെ 10 മടങ്ങാണ് $3 + \frac{1}{3}$ എന്നാണല്ലോ ഇതിന്റെ അർഥം. അപ്പോൾ $\frac{1}{3}$ എന്നത്, $3 + \frac{1}{3}$ ന്റെ $\frac{1}{10}$ ഭാഗമാണ് (ഏഴാംക്ലാസിലെ **വിപരീതഭിന്നങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഭാഗവും മടങ്ങും** എന്ന ഭാഗം). അതായത്

$$\frac{1}{3} = \left(3 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{10}$$

തുകയെ ഗുണിക്കാൻ ഓരോന്നിനെയും ഗുണിച്ച് കൂട്ടിയാൽ മതി എന്ന് ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (**കണക്കിലെ ചുരുക്കെഴുത്ത്** എന്ന പാഠത്തിലെ **കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും** പിന്നെ **ഗുണിക്കലും** എന്ന ഭാഗം). അതനുസരിച്ച് $\left(3 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{10}$ നെ എങ്ങനെ എഴുതാം ?

അപ്പോൾ

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{1}{30}$$

ഇതുപോലെ മുകളിലെഴുതിയ $\frac{100}{3}, \frac{1000}{3}$ ഇവ ഉപയോഗിച്ച് $\frac{1}{3}$ നെ എങ്ങനെയെല്ലാം എഴുതാം?

$$\frac{1}{3} = \frac{33}{100} + \frac{1}{300}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{333}{1000} + \frac{1}{3000}$$

ഇതെല്ലാം, $\frac{1}{3}$ എന്ന സംഖ്യയും, $\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}$ എന്നീ സംഖ്യകളും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമായി എഴുതിനോക്കാം:

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{333}{1000} = \frac{1}{3000}$$

$\frac{1}{30}$ നേക്കാൾ ചെറുതാണല്ലോ $\frac{1}{300}$. അതിനേക്കാൾ ചെറുതാണ് $\frac{1}{3000}$.

അപ്പോൾ $\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}$ എന്നീ സംഖ്യകളും $\frac{1}{3}$ ഉം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ക്രമേണ കുറഞ്ഞു വരുന്നു.

ഇത് ഇനിയും തുടരാമല്ലോ:

$$\frac{1}{3} - \frac{3333}{10000} = \frac{1}{30000}$$

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ

$\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സംഖ്യകൾ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു

$\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \ldots$ എന്നിവയുടെയെല്ലാം ദശാംശരൂപം ഉപയോഗിച്ച് ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെയും പറയാം:

0.3, 0.33, 0.333, ... എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സംഖ്യകൾ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്:

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots$$

ഇതിലെ 0.333 ... എന്ന ദശാംശരൂപം, ആദ്യം കണ്ട ദശാംശരൂപങ്ങളിൽനിന്നു വ്യത്യസ്തമാണ് എന്നത് പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കണം.

10 ന്റെ ഏതെങ്കിലും കൃതി ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകളെയാണ് ആദ്യഭാഗത്ത് ദശാംശരൂപത്തിലെഴുതിയത്. ഉദാഹരണമായി, 0.3 എന്നത് $\frac{3}{10}$ എന്ന ഭിന്നത്തിന്റെ ദശാംശരൂപവും, 0.33 എന്നത് $\frac{33}{100}$ എന്ന ഭിന്നത്തിന്റെ ദശാംശരൂപവുമൊക്കെയാണ്.

എന്നാൽ 0.333... സൂചിപ്പിക്കുന്നത് 10 ന്റെ ഏതെങ്കിലും കൃതി ഛേദമായ ഒറ്റ ഭിന്നസംഖ്യയെയല്ല, 10 ന്റെ കൃതികൾ ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ഒരു നിര ക്രമേണ സമീപിക്കുന്ന ഭിന്നസംഖ്യയെയാണ്. ഇപ്പോൾ കണ്ടതുപോലെ ഇങ്ങനെ സമീപിക്കുന്ന ഭിന്നസംഖ്യ $\frac{1}{3}$ ആയതിനാൽ, ഇതിനെ $\frac{1}{3}$ ന്റെ ദശാംശരൂപം എന്നു പറയുന്നു.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം. $\frac{1}{6}$ ന്റെയും പല രൂപങ്ങളിൽ ഒന്നിലും 10 ന്റെ കൃതികളൊന്നും ഛേദമായി വരില്ലല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട്?).

ഇതിന്റെയും ഈ പുതിയ രീതിയിലുള്ള ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കാം. അതിന് നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ 10, 100, 1000, ... എന്നീ സംഖ്യകളെ 6 കൊണ്ടു ഹരിച്ച്, ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$\frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{100}{6} = \frac{50}{3} = 16 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{1000}{6} = \frac{500}{3} = 166 + \frac{2}{3}$$

ഇവ ഉപയോഗിച്ച്, $\frac{1}{6}$ നെ 10 ന്റെ കൃതി ഛേദമായ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും മറ്റൊരു ചെറിയ ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും തുകയായി എഴുതാം:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{2}{30} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{16}{100} + \frac{2}{300} = \frac{16}{100} + \frac{1}{150}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{166}{1000} + \frac{2}{3000} = \frac{166}{1000} + \frac{1}{1500}$$

ഇതിൽനിന്ന് $\frac{1}{6}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്ന, 10 ന്റെ കൃതികൾ ഛേദമായ, ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടുമല്ലോ:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{16}{100} = \frac{1}{150}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{166}{1000} = \frac{1}{1500}$$

അതായത്

$\frac{1}{10}, \frac{16}{100}, \frac{166}{1000}, \dots$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ (അഥവാ, 0.1, 0.16, 0.166, ... എന്നിങ്ങനെ ദശാംശരൂപമുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകൾ) $\frac{1}{6}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കി, ദശാംശരൂപമായി എഴുതാം:

$$\frac{1}{6} = 0.1666\dots$$

ഇങ്ങനെ ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ 10, 100, 1000, ... എന്നീ സംഖ്യകളെ ഹരിക്കാൻ, ഓരോന്നിനും ആദ്യം മുതൽ തുടങ്ങേണ്ടതില്ല. ഒരു ഹരണത്തിന്റെ തുടർച്ചയായി അടുത്തത് ചെയ്യാം.

ഉദാഹരണമായി, $\frac{1}{7}$ ന്റെ ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ആദ്യം 10 നെ 7 കൊണ്ടു ഹരിച്ച് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$$

ഇനി $\frac{100}{7}$ കണക്കാക്കാൻ, ഇതിനെ 10 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മതിയല്ലോ.

$$\frac{100}{7} = 10 + \frac{30}{7} = 10 + 4 + \frac{2}{7} = 14 + \frac{2}{7}$$

ഇത് ഇങ്ങനെ തുടരാം:

$$\frac{1000}{7} = 140 + \frac{20}{7} = 142 + \frac{6}{7}$$

$$\frac{10000}{7} = 1420 + \frac{60}{7} = 1428 + \frac{4}{7}$$

പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം തെറ്റാതിരിക്കാൻ കൃതികൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതാണ് സൗകര്യം:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$$

$$\frac{10^2}{7} = 14 + \frac{2}{7}$$

$$\frac{10^3}{7} = 142 + \frac{6}{7}$$

$$\frac{10^4}{7} = 1420 + \frac{60}{7} = 1428 + \frac{4}{7}$$

$$\frac{10^5}{7} = 14280 + \frac{40}{7} = 14285 + \frac{5}{7}$$

$$\frac{10^6}{7} = 142850 + \frac{50}{7} = 142857 + \frac{1}{7}$$

ഇനി തുടരേണ്ടതുണ്ടോ ? അല്പം ആലോചിക്കാം. അടുത്ത ഹരണം ഇങ്ങനെയാണ്

$$\frac{10^7}{7} = 1428570 + \frac{10}{7}$$

ഇതിൽ $\frac{10}{7}$ ആദ്യം കണ്ടുപിടിച്ചതല്ലേ ? അപ്പോൾ

$$\frac{10^7}{7} = 1428571 + \frac{3}{7}$$

ഇനിയും തുടർന്നാലോ ?

ഭിന്നസംഖ്യകളിലെ ക്രിയകൾ $\frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7}$, അതിനുശേഷം $\frac{20}{7} = 2 + \frac{6}{7}$ എന്നിങ്ങനെ മുമ്പു ചെയ്ത ക്രിയകൾ തന്നെ അതേ ക്രമത്തിൽ ആവർത്തിക്കും; പൂർണ്ണസംഖ്യാഭാഗത്തിൽ 1428571, 14285714, 142857142 എന്നിങ്ങനെ നേരത്തെ കണക്കാക്കിയ അക്കങ്ങൾ തന്നെ ആവർത്തിക്കും.

അപ്പോൾ $\frac{1}{7}$ ന്റെ ദശാംശരൂപം, 142857 എന്ന ആറക്കക്കൂട്ടത്തിന്റെ ആവർത്തനമാണ്. അതായത്

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857...$$

ഇതുപോലെ $\frac{2}{7}$ ന്റെ ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്റെ കണക്കുകൂട്ടലുകൾ നോക്കൂ:

$$\frac{20}{7} = 2 + \frac{6}{7}$$

$$\frac{200}{7} = 20 + \frac{60}{7} = 28 + \frac{4}{7}$$

$$\frac{2000}{7} = 280 + \frac{40}{7} = 285 + \frac{5}{7}$$

$$\frac{20000}{7} = 2850 + \frac{50}{7} = 2857 + \frac{1}{7}$$

അടുത്ത ഹരണത്തിൽ വരുന്നത് $\frac{10}{7}$ അല്ലേ ?

അത് നേരത്തെ കണക്കാക്കിയതാണല്ലോ.

മാത്രവുമല്ല, തുടർന്നുള്ള രണ്ടു ഹരണങ്ങൾ $\frac{1}{7}$ ൽ കണ്ടതുപോലെ $\frac{30}{7}, \frac{20}{7}$ എന്നുതന്നെ കിട്ടും. അതിനുശേഷമോ ?

വീണ്ടും തുടങ്ങിയ $\frac{60}{7}$ തന്നെ കിട്ടും.

അപ്പോൾ $\frac{2}{7}$ ന്റെ ദശാംശരൂപം, ഏത് ആറക്ക ക്രമത്തിന്റെ ആവർത്തനമാണ് ?

$$\frac{2}{7} = 0.285714285714...$$

ഇതുപോലെ $\frac{3}{7}$ ന്റെയും $\frac{4}{7}$ ന്റെയുമെല്ലാം ദശാംശരൂപങ്ങൾ കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

(1) ചുവടെയുള്ള ഭിന്നങ്ങൾ ഓരോന്നിനും അടുത്തടുത്തുവരുന്ന 10 ന്റെ കൃതി ഛേദമായ ഭിന്നങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ച്, ദശാംശരൂപത്തിലെഴുതുക.

(i) $\frac{5}{6}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{1}{11}$

(2) (i) $\frac{1}{10}, \frac{11}{100}, \frac{111}{1000}, \ldots$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകൾ $\frac{1}{9}$ ന്റെ അടുത്തടുത്തു വരുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

(ii) $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ എന്നിവയുടെ ദശാംശരൂപങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(iii) $\frac{2}{3}$ ന്റെ ദശാംശരൂപം എന്താണ് ?

(3) ചുവടെയുള്ള ക്രിയാഫലങ്ങൾ കണക്കാക്കി ദശാംശരൂപത്തിലെഴുതുക.

(i) $0.111... + 0.222...$ (ii) $0.333... + 0.777...$ (iii) $0.333... \times 0.666...$

(4) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ഭിന്നസംഖ്യയുമായുള്ള വ്യത്യാസം $\frac{1}{1000}$ നേക്കാൾ കുറവായ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ ദശാംശരൂപം എഴുതുക.

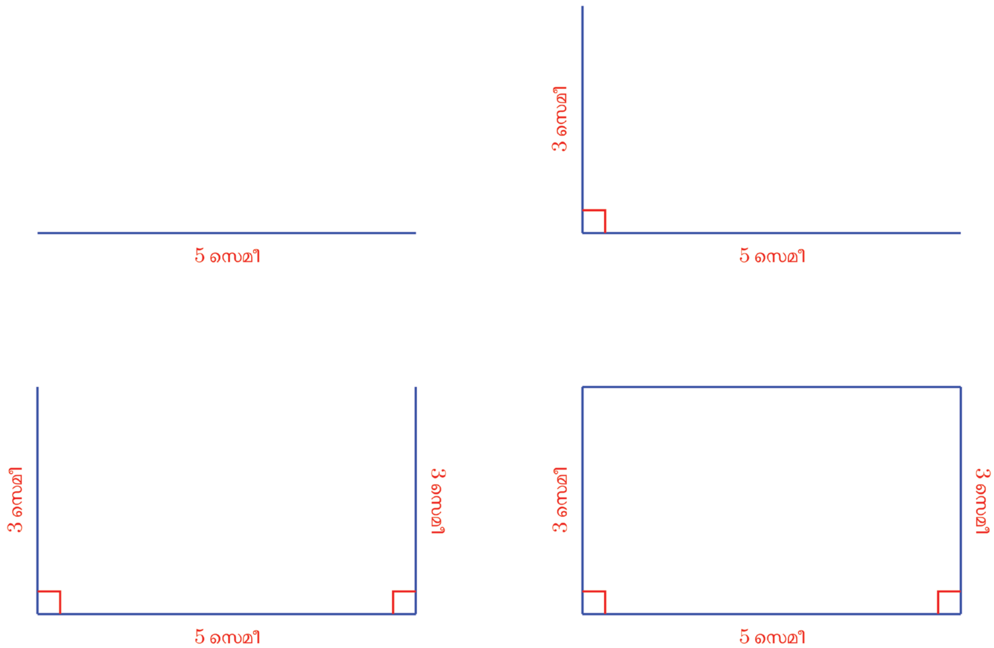
(i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) $\frac{2}{3}$ (iv) $\frac{5}{6}$ (v) $\frac{1}{7}$

11

സാമാന്തരികങ്ങൾ

വശങ്ങളും കോണുകളും

ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കാൻ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം പറഞ്ഞാൽ മതി. ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ചതുരം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ ?



ഇങ്ങനെ 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയുടെ ഇടതും വലതും അറ്റങ്ങളിൽ 3 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരമുള്ള ലംബങ്ങൾ വരച്ച്, മുകളറ്റങ്ങൾ ചേർത്തു വരച്ചാൽ ചതുരമായോ ?

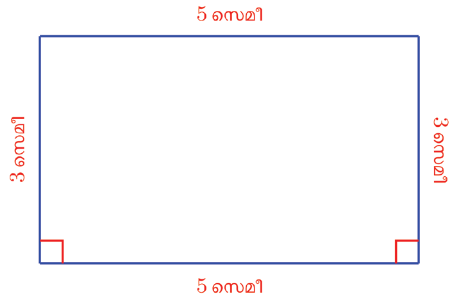
അവസാനം വരച്ച മുകളിലെ വശത്തിന്റെ നീളവും 5 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ ആയിരിക്കുമോ ?

ഇങ്ങനെ സംശയം തീർക്കാം:

(i) ഇടതും വലതും വരകൾ താഴത്തെ വരയുമായി ഒരേ കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്നതിനാൽ അവ സമാന്തരമാണ് (ഏഴാംക്ലാസിലെ **സമാന്തരവരകൾ** എന്ന പാഠം).

(ii) ഇടതും വലതും വശങ്ങൾ സമാന്തരവും അവയ്ക്ക് ഒരേ നീളവും ആയതിനാൽ, വരച്ച ചതുർഭുജം സാമാന്തരികമാണ് (**തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **രണ്ടു വശങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

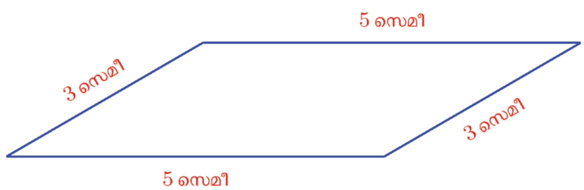
(iii) ചതുർഭുജം സാമാന്തരികമായതിനാൽ, മുകളിലെയും താഴെയും വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ് (**തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **രണ്ടു കോണുകൾ** എന്ന ഭാഗം).

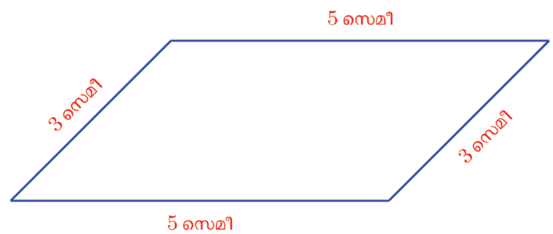


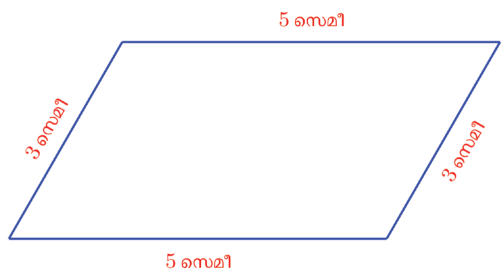
ഇനി വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും 3 സെന്റിമീറ്ററും ആയ സാമാന്തരികം എന്നു പറഞ്ഞാലോ? പലതരമുണ്ട്, അല്ലേ?

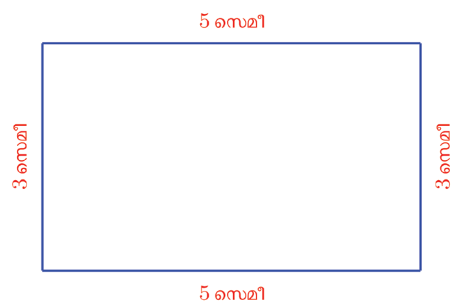
വശങ്ങൾ മാറാതെ

Segment with given length ഉപയോഗിച്ച് നീളം 5 ആയ AB എന്ന ഒരു വര വരയ്ക്കുക. അതേ ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് നീളം 3 ആയ BC എന്ന ഒരു വരയും വരയ്ക്കുക. A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിൽ വരാത്ത വിധം C യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റുക. A കേന്ദ്രമായി ആരം 3 ആയ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. A യിൽക്കൂടി BC യ്ക്ക് സമാന്തരം വരച്ച് ആ വര വൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. DC യോജിപ്പിച്ചശേഷം വരകളും വൃത്തവും മറച്ചു വയ്ക്കാം. Polygon ഉപയോഗിച്ച് സാമാന്തരികം ABCD വരയ്ക്കുക. C യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. വശങ്ങളുടെ നീളം 5 ഉം 3 ഉം ആയ വ്യത്യസ്ത സാമാന്തരികങ്ങൾ കിട്ടുന്നില്ലേ?





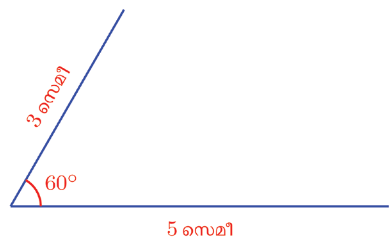




ഇവയിലെല്ലാം എന്താണ് വ്യത്യാസം?

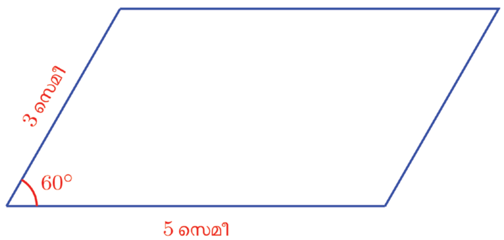
അപ്പോൾ വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും 3 സെന്റിമീറ്ററും എന്നതു കൂടാതെ, വശങ്ങൾക്കിടയിലെ കോൺ 60° എന്നു കൂടി പറഞ്ഞാലോ?

ആദ്യം 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വിലങ്ങനെ ഒരു വരയും, അതിന്റെ ഒരറ്റത്ത് 60° ചരിവിൽ 3 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയും വരയ്ക്കാം:



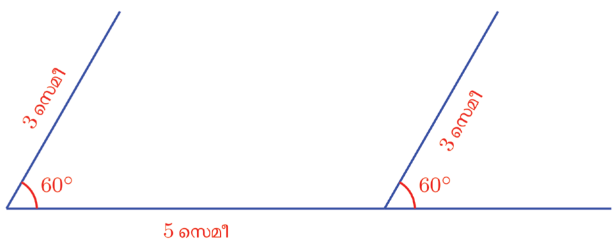
ഇനിയോ ?

ഈ വരയുടെ മുകളറ്റത്തിലൂടെ താഴത്തെ വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായി ഒരു വരയും, താഴത്തെ വരയുടെ മറ്റേ അറ്റത്തിലൂടെ ഇടതു വശത്തെ വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായി ഒരു വരയും വരച്ച് കൂട്ടിമുട്ടിക്കുക. (സ്കേലും മട്ടവും ഉപയോഗിച്ച് സമാന്തരവര വരയ്ക്കുന്ന രീതി, ആറാംക്ലാസിലെ **വരകളും കോണുകളും** എന്ന പാഠത്തിലെ **കൂട്ടിമുട്ടാത്ത വരകൾ** എന്ന ഭാഗത്ത് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ):

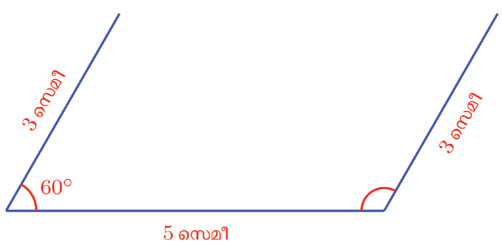


കുറേക്കൂടി എളുപ്പത്തിൽ വരയ്ക്കാൻ എന്തെങ്കിലും വഴിയുണ്ടോ ? (ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കാൻ ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതാണ് എളുപ്പവഴി).

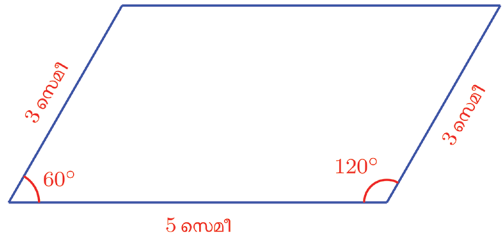
താഴത്തെ വര അല്പം വലത്തോട്ട് നീട്ടി, വലതറ്റത്തും 60° ചരിവിൽ, 3 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വര വരച്ചാലും മതിയല്ലോ:



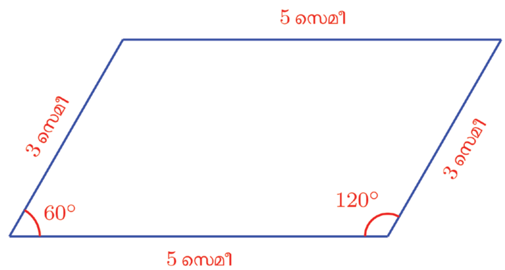
താഴത്തെ വര നീട്ടാതെ, മറുഭാഗത്തെ കോൺ വരച്ചാലും മതി:



അത് എത്ര ഡിഗ്രി ആയി വരയ്ക്കണം ?

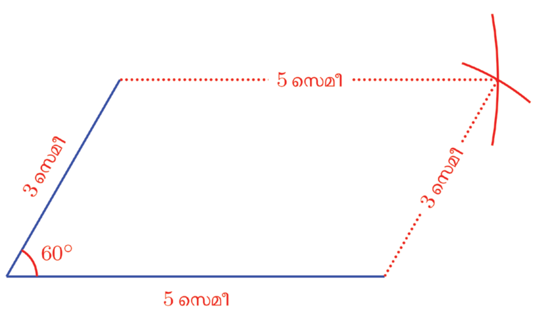


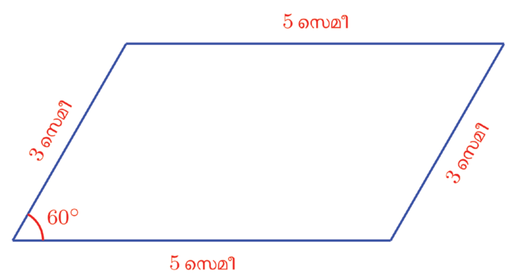
മുകളിലെ വശത്തിന്റെ നീളവും 5 സെന്റിമീറ്ററാണെന്ന്, ചതുരത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ ഉപയോഗിച്ച അതേ വാദങ്ങൾ കൊണ്ട് തെളിയിക്കാമല്ലോ.



വിലങ്ങനെ 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിലൊരു വരയും, അതിന്റെ ഒരറ്റത്ത് 60° ചരിവിൽ 3 സെന്റിമീറ്റർ വരയും വരച്ച ശേഷം, മറ്റൊരു രീതിയിൽ തുടർന്നാലോ ?

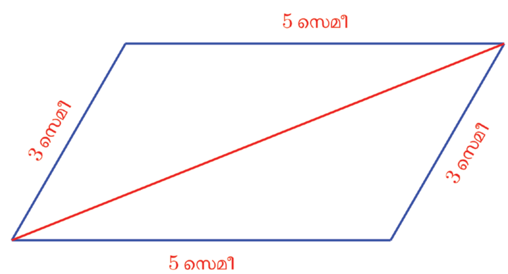
വിലങ്ങനെയുള്ള വരയുടെ മറ്റേ അറ്റത്തുനിന്ന് 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലത്തിലും ചരിഞ്ഞ വരയുടെ മുകളറ്റത്തുനിന്ന് 5 സെന്റിമീറ്റർ അകലത്തിലും ഉള്ള ബിന്ദുവല്ലേ സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലാം മൂല ?



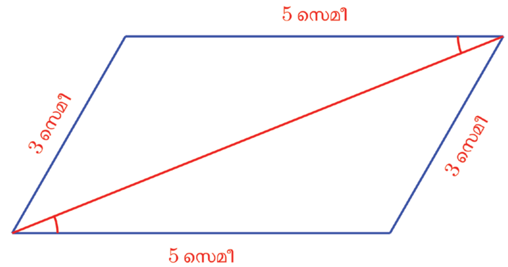


അപ്പോൾ ഒരു സംശയം ഉണ്ടാകാം: എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരം തന്നെയാണോ ?

അത് പരിശോധിക്കാൻ, ഇങ്ങനെ വരച്ച ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരു വികർണ്ണം വരച്ച്, അതിനെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളാക്കാം:



ഈ ത്രികോണങ്ങളിൽ രണ്ടു ജോടി വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്; മൂന്നാം വശം രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ വരയാണ്. അപ്പോൾ തുല്യമായ വശങ്ങൾക്കെതിരെയുള്ള കോണുകളും തുല്യമാകണമല്ലോ. അതായത്, ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോണുകൾ തുല്യമാണ്:



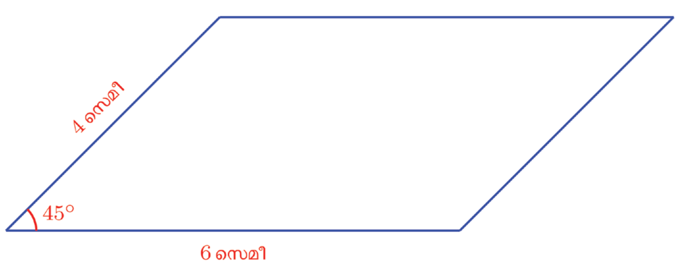
ഈ കോണുകൾ മുകളിലത്തെയും താഴത്തെയും വശങ്ങളിൽ വികർണ്ണം മുട്ടുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന രണ്ടു ചെറിയ കോണുകളാണല്ലോ. ഇവ തുല്യമായതിനാൽ, ഈ വശങ്ങൾ സമാന്തരമാണ്. അവയ്ക്ക് ഒരേ നീളവും കൂടി ആയതിനാൽ ചതുർഭുജം സാമാന്തരികമാണ്.

വശങ്ങളുടെ നീളം മറ്റു സംഖ്യകളായാലും, ഇതേ വാദങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്, ചതുർഭുജം സാമാന്തരികമാണെന്നു തെളിയിക്കാമല്ലോ.

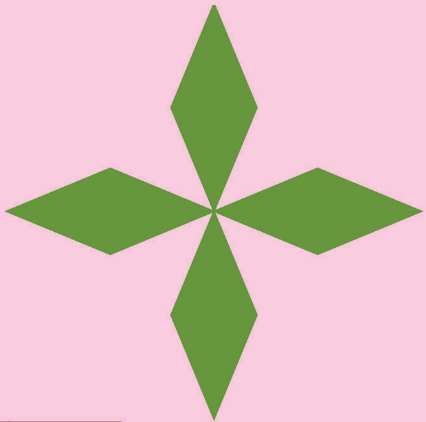
അപ്പോൾ ഏതു സാമാന്തരികത്തിന്റെയും എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമാണ് എന്നത് ഇങ്ങനെ തിരിച്ചും പറയാം:

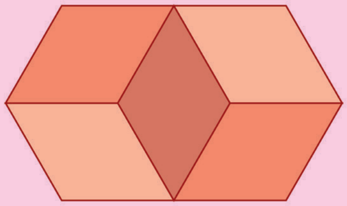
ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ രണ്ടു ജോടി എതിർവശങ്ങളും തുല്യമാണെങ്കിൽ, അതൊരു സാമാന്തരികമാണ്

അങ്ങനെ, ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളും അവയുടെ ഇടയിലെ കോണും പറഞ്ഞാൽ, ആ സാമാന്തരികം പലതരത്തിൽ വരയ്ക്കാം. ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ, ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സാമാന്തരികം വരച്ചുനോക്കൂ:



(1) തുല്യമായ സമഭുജസാമാന്തരികങ്ങൾ മൂന്നും, നാലും, അഞ്ചും ചേർന്ന ചിത്രങ്ങളാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഓരോന്നും വരച്ച് നിറം കൊടുക്കുക.





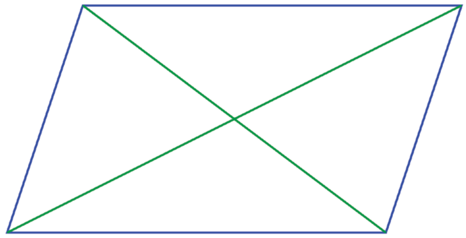
(2) തുല്യമായ മൂന്ന് സാമാന്തരികങ്ങളും ഒരു സമഭുജ ത്രികോണവും ചേർന്ന ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കുക:

(3) തുല്യമായ നാലു സാമാന്തരികങ്ങളും നാലു മട്ടത്രികോണങ്ങളും ചേർന്ന ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കുക.

ഈ ചിത്രങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ച് നിറം കൊടുക്കൂ. എളുപ്പത്തിൽ വരയ്ക്കാൻ ഗ്രിഡ് ഉപയോഗിക്കാം.

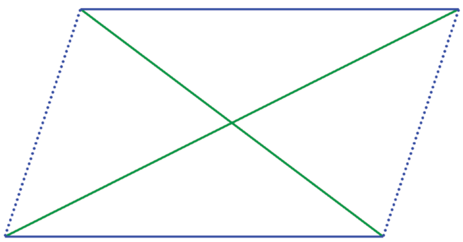
വികർണ്ണങ്ങൾ

ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബസമഭാജികളാണെന്നും, മറിച്ച് വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബസമഭാജികളായ ഒരു ചതുർഭുജം സമഭുജസാമാന്തരികമാണെന്നും കണ്ടല്ലോ (**സമഭാജികൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമഭുജസാമാന്തരികങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

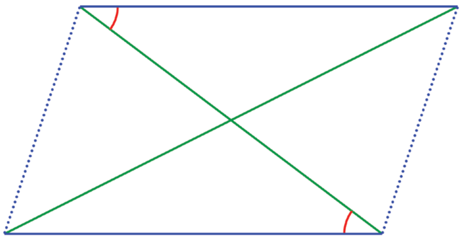


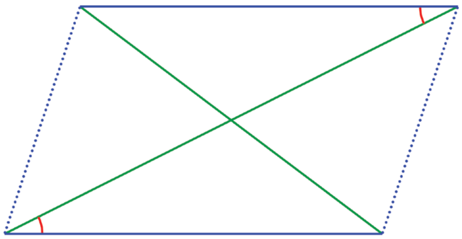
വശങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ നീളമല്ലാത്ത ഒരു സാമാന്തരികത്തിൽ വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമല്ല:

പക്ഷേ അവയും പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു എന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല. അതിന് വികർണ്ണങ്ങൾ സാമാന്തരികത്തെ മുറിച്ചുണ്ടാക്കുന്ന നാല് ത്രികോണങ്ങളിൽ മുകളിലത്തെയും താഴത്തെയും ത്രികോണങ്ങൾ മാത്രം നോക്കുക:



രണ്ടു ത്രികോണത്തിന്റെയും നീല വശങ്ങൾ, സാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങളായതിനാൽ, തുല്യമാണ്. ഈ വശങ്ങൾ സമാന്തരമായതിനാൽ, അവയിൽ പച്ച വരകൾ മുട്ടുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന ചെറിയ കോണുകളും തുല്യമാണ്; അതായത്, ചുവടെയുള്ള ഓരോ ചിത്രത്തിലും അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോണുകൾ തുല്യമാണ്.



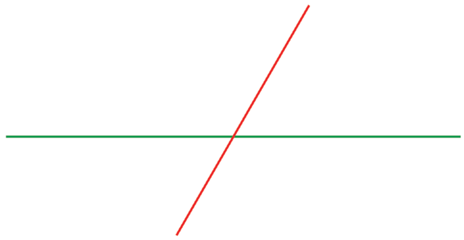


അങ്ങനെ ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ ഒരു വശവും അതിലെ രണ്ടു കോണുകളും തുല്യമായതിനാൽ അവയുടെ തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

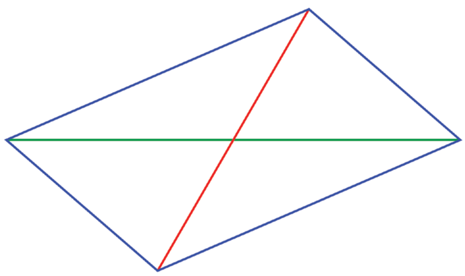
അപ്പോൾ മുകളിലെ ചിത്രങ്ങളിൽനിന്ന് സാമാന്തരികത്തിന്റെ ഓരോ വികർണ്ണത്തെയും മറ്റേ വികർണ്ണം മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ തുല്യമാണെന്നു കാണാം; അതായത് അവ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു.

മറിച്ച്, വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യുന്ന ഒരു ചതുർഭുജം സാമാന്തരികമാണോ?

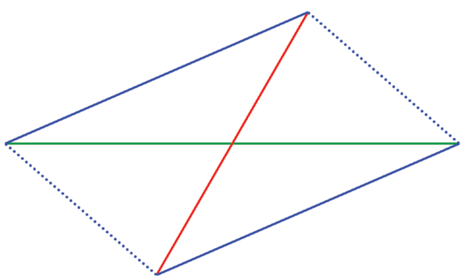
ഇതു പരിശോധിക്കാൻ അത്തരമൊരു ചതുർഭുജം വരച്ചുനോക്കാം. ആദ്യം ഒരു വരയും, അതിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ മറ്റൊരു വരയും വരയ്ക്കാം.



ഇനി ഈ വരയുടെ ഇരുവശത്തും ഒരേ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തി, ഒരു ചതുർഭുജം വരയ്ക്കാം:



ഇങ്ങനെയുണ്ടാകുന്ന നാലു ത്രികോണങ്ങളിൽ, ഇടത് മുകളിലെയും വലത് താഴെയും ഉള്ള ത്രികോണങ്ങൾ മാത്രം ഒത്തുനോക്കാം;

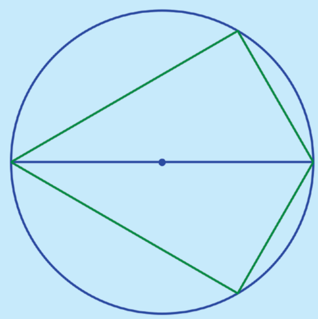


വരച്ചതനുസരിച്ച്, ത്രികോണങ്ങളിലെ പച്ച വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്. ചുവന്ന വശങ്ങൾക്കും. ഇവ തമ്മിൽ മുറിച്ചു കടക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന എതിർകോണുകളായതിനാൽ, ഈ വശങ്ങളുടെ ഇടയ്ക്കുള്ള കോണുകളും തുല്യമാണ്(ആറാംക്ലാസിലെ **വരകളും കോണുകളും** എന്ന പാഠത്തിലെ **മുറിച്ചുകടക്കുന്ന വരകൾ** എന്ന ഭാഗം).

Segment ഉപയോഗിച്ച് AB എന്ന ഒരു വര വരച്ച് Midpoint or Centre ഉപയോഗിച്ച് അതിന്റെ മധ്യബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. C കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിൽ D എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വര വരയ്ക്കുക. ഈ വര വൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. വരയും വൃത്തവും മറച്ചു വച്ചതിനുശേഷം DE വരയ്ക്കുക. ചതുർഭുജം ADBE വരയ്ക്കുക. ഇതൊരു സാമാന്തരികമാണോ? വശങ്ങളുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കൂ. മൂലകളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. AB, CD എന്നീ വികർണ്ണങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമാകുമ്പോൾ ചതുർഭുജത്തിന് എന്ത് സംഭവിക്കും? വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമാകുമ്പോഴോ?

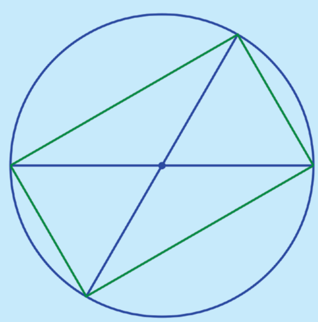
ചതുരം വൃത്തത്തിലും

ഒരു വൃത്തവും അതിന്റെ ഒരു വ്യാസവും വരയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിന്റെ ഇരുപകുതിയിലും ഓരോ ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി, വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിക്കുക.



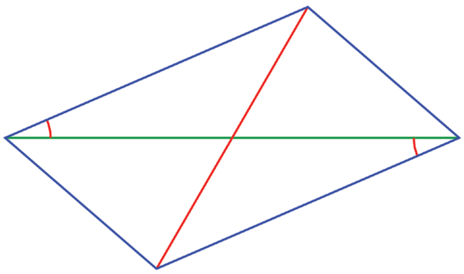
ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ചതുർഭുജം ചതുരമാകണമെന്നില്ല. എന്നാൽ വ്യാസത്തിനിരുവശത്തുമുള്ള രണ്ട് കോണുകളും മട്ടകോണുകളാണ് (എന്തുകൊണ്ട്?). മറ്റേ രണ്ടുകോണുകളോ?

ചിത്രത്തിലെ മട്ടമൂലകൾ മറ്റൊരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റത്തായാലോ?



നാല് മൂലകളും മട്ടമൂലകളായി. അതായത് ചതുർഭുജം ചതുരമായി.

അപ്പോൾ ഈ ത്രികോണങ്ങളിലെ മൂന്നാമത്തെ (നീല) വശങ്ങളും, ഒരേ നീളമുള്ള വശങ്ങൾക്കെതിരെയുള്ള മറ്റു രണ്ടു കോണുകളും തുല്യമാണ്.



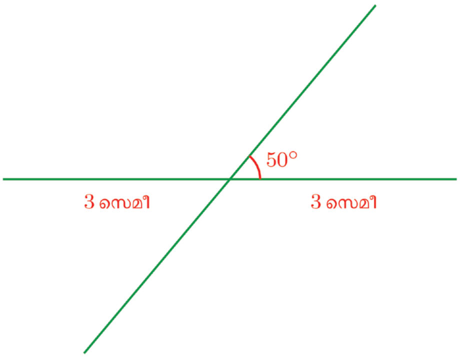
അതായത്, നമ്മുടെ ചതുർഭുജത്തിലെ മുകളിലും താഴെയും ഉള്ള വശങ്ങൾ തുല്യമാണ്; അവ പച്ച വരയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളും തുല്യമാണ്.

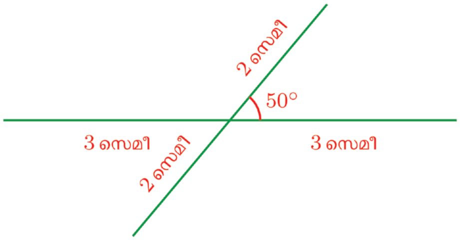
അതിനാൽ നീല വരകൾ സമാന്തരവുമാണ്. രണ്ടു വശങ്ങൾ തുല്യവും സമാന്തരവും ആയതിനാൽ, ചതുർഭുജം സാമാന്തരികമാണ്.

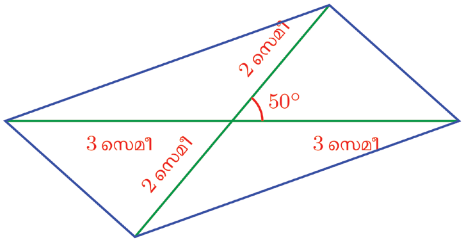
ഏതു സാമാന്തരികത്തിലും വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു; മറിച്ച്, വികർണ്ണങ്ങൾ സമഭാഗം ചെയ്യുന്ന ഏതു ചതുർഭുജവും സാമാന്തരികമാണ്

സമഭുജസാമാന്തരികമാണെങ്കിൽ, വികർണ്ണങ്ങൾക്കിടയിലെ കോൺ മട്ടവും കൂടിയാണ്; വശങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമല്ലാത്ത സാമാന്തരികങ്ങളിൽ, ഈ കോൺ പല അളവുകളിൽ ആയിരിക്കും:

അപ്പോൾ വികർണ്ണങ്ങളുടെ നീളവും അവയുടെ ഇടയിലെ കോണും പറഞ്ഞാൽ, അതനുസരിച്ചുള്ള സാമാന്തരികം വരയ്ക്കാം. ഉദാഹരണമായി, വികർണ്ണങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററും 4 സെന്റിമീറ്ററും, അവയുടെ ഇടയിലെ കോൺ 50° യും ആയ സാമാന്തരികം ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കാം:

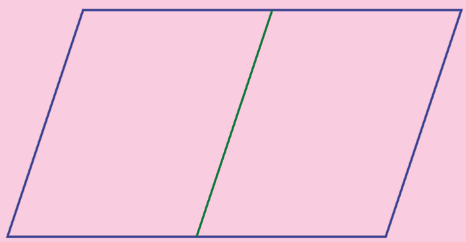


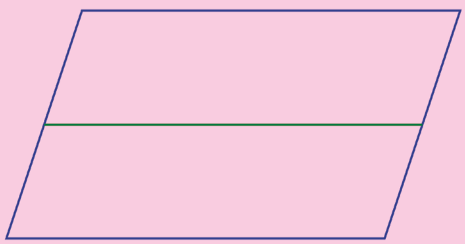




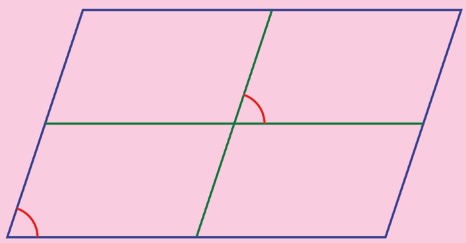
(1) വികർണ്ണങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററും 6 സെന്റിമീറ്ററും, അവയുടെ ഇടയിലെ കോൺ 60° യും ആയ സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുക.

(2) ഒരു സാമാന്തരികത്തിലെ എതിർവശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു വരയ്ക്കുന്ന വര മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക:





(3) ചിത്രത്തിൽ ഒരു സാമാന്തരികവും, അതിന്റെ എതിർവശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച വരകളുമാണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

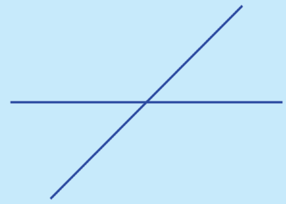


(i) ഈ വരകൾ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു എന്നു തെളിയിക്കുക.

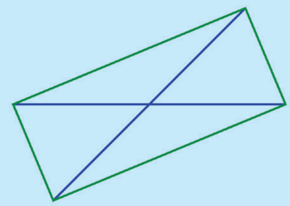
(ii) ഈ വരകളുടെ ഇടയിലെ ഒരു കോൺ, സാമാന്തരികത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

വികർണ്ണവിശേഷം

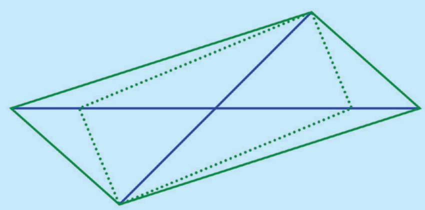
ഒരേ നീളമുള്ള രണ്ടു വരകൾ പരസ്പരം സമഭാജികളായി, എന്നാൽ ലംബമല്ലാതെ വരയ്ക്കുക.



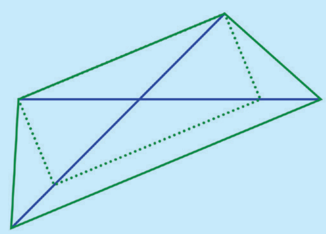
ഇവയുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ എന്തു തരം ചതുർഭുജമാണ് കിട്ടുന്നത്?



ഇനി ഒരു വരയുടെ നീളം ഇരുവശത്തും ഒരുപോലെ നീട്ടി, അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചാലോ?



ഇനി ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ ഒരു വര ഇരുവശത്തേക്കും ഒരുപോലെ നീട്ടുന്നതിനു പകരം വിലങ്ങനെയുള്ള വര വലത്തേക്കും ചരിഞ്ഞ വര താഴത്തേക്കും ഒരേപോലെ നീട്ടി അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചാലോ?



(4) വികർണ്ണങ്ങളുടെ നീളം 6.5 സെന്റിമീറ്ററും 4.5 സെന്റിമീറ്ററും, അവയുടെ ഇടയിലെ കോൺ 70° യും ആയ സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുക.

(5) ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെങ്കിൽ, അതൊരു ചതുരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(6) വികർണ്ണങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററും, അവയുടെ ഇടയിലെ കോൺ 60° യും ആയ ചതുരം വരയ്ക്കുക.

പരപ്പളവ്

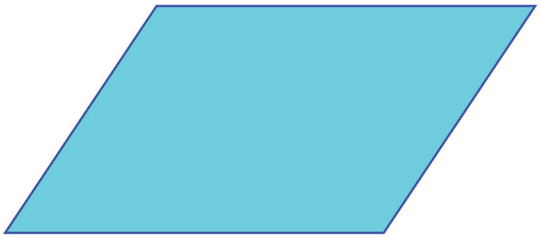
ഒരു ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വശങ്ങളുടെ നീളത്തിന്റെ ഗുണനഫലമാണ്.

സാമാന്തരികമായാലോ ?

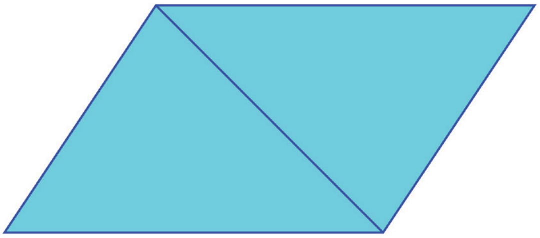
വശങ്ങളുടെ നീളം ഒന്നുതന്നെയായ പല സാമാന്തരികങ്ങൾ വരയ്ക്കാമെന്ന് പാഠത്തിന്റെ ആദ്യ ഭാഗത്ത് കണ്ടല്ലോ; ഇവയെല്ലാം ഒരേ പരപ്പളവ് ആകണമെന്നുമില്ല.

സാമാന്തരികത്തിന്റെ ഏത് അളവുകളാണ് പരപ്പളവ് നിശ്ചയിക്കുന്നത് ?

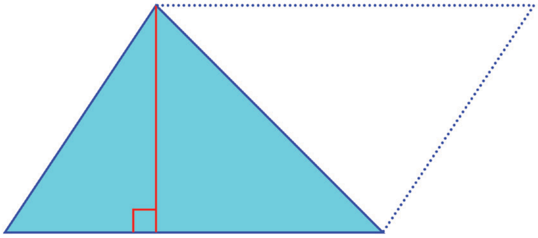
ഈ സാമാന്തരികം നോക്കുക:



പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ, ആദ്യം ഒരു വികർണ്ണം വരച്ച് ഇതിനെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളാക്കി മുറിക്കാം:



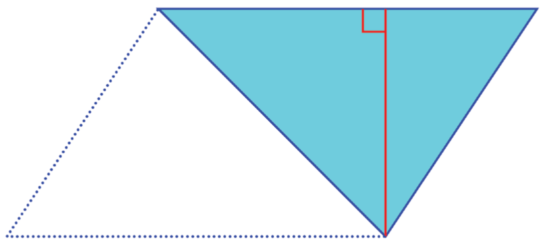
ഇടതു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ എന്തൊക്കെ അളവുകൾ വേണം ?



ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെയും, അതിൽനിന്ന് മുകൾ മൂലയിലേക്കുള്ള ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ പരപ്പളവ്.

ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം, സാമാന്തരികത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം തന്നെ. ത്രികോണത്തിന്റെ മുകൾമൂലയിലേക്കുള്ള ഉയരമോ ?

അത് സാമാന്തരികത്തിന്റെ താഴത്തെയും മുകളിലെയും സമാന്തര വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലമല്ലേ ? ഇനി വലതു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവോ ?

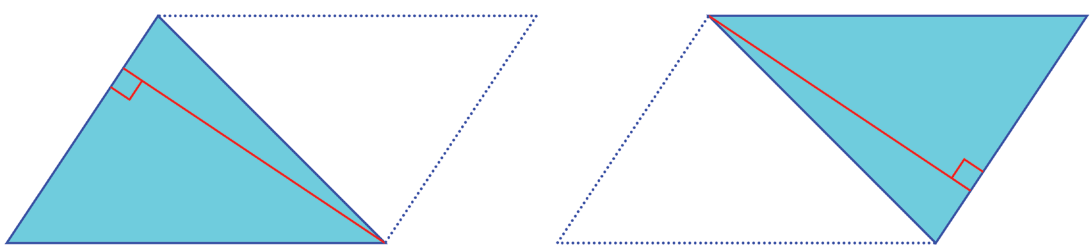


സാമാന്തരികത്തിന്റെ മുകൾവശത്തിന്റെയും, താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതി.

അപ്പോൾ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ പരപ്പളവാണ്. സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണല്ലോ. അതായത്, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ്. അതെത്രയാണ് ?

സാമാന്തരികത്തിന്റെ താഴത്തെ (അല്ലെങ്കിൽ മുകളിലെ) വശത്തിന്റെയും, താഴത്തെയും മുകളിലത്തെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം.

ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കാണാൻ, താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങൾക്കു പകരം, ഇടതും വലതും വശങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാലോ ?



ഓരോ ത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് എങ്ങനെ പറയാം ?

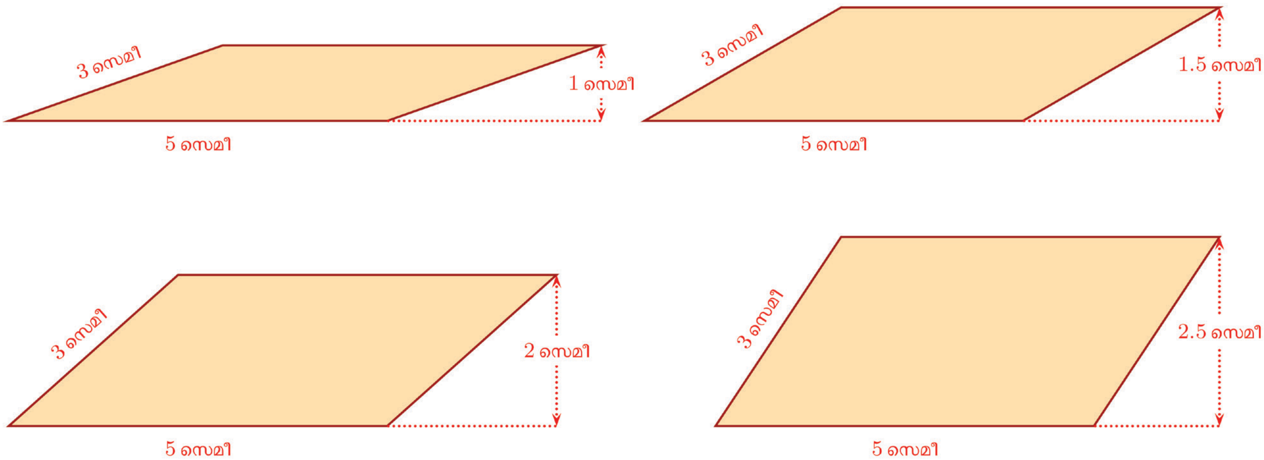
സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവോ ?

ഇടത് (അല്ലെങ്കിൽ വലത്) വശത്തിന്റെ നീളവും, ഇടതു-വലത് വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം, അല്ലേ ?

അപ്പോൾ പൊതുവെ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം ?

സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ഏതെങ്കിലും വശത്തിന്റെയും, എതിർവശത്തെയ്ക്കുള്ള അകലത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



നാലു സാമാന്തരികങ്ങളുടെയും വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും തന്നെയാണ്. ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

പരപ്പളവ് ഇനിയും കൂട്ടാമോ ? എത്രവരെയാകാം ?

ഇതേ അളവുകളിൽ, ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവ് കിട്ടുന്ന സാമാന്തരികത്തിന് എന്തെങ്കിലും സവിശേഷതയുണ്ടോ ?

ഇനി ഒരു ചോദ്യം: വശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററും, 4 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 18 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്ററും ആയി ഒരു സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

ആദ്യം 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വിലങ്ങനെ ഒരു വര വരച്ചാൽ, അത് സാമാന്തരികത്തിന്റെ താഴത്തെ വശമായി എടുക്കാം:

സാമാന്തരികത്തിന്റെ താഴത്തെ രണ്ടു മൂലകൾ ഈ വരയുടെ അറ്റങ്ങളാണല്ലോ.

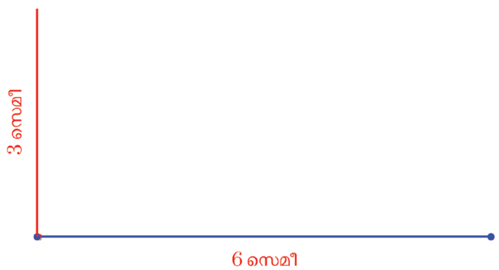
മുകളിലെ മൂലകളോ ?

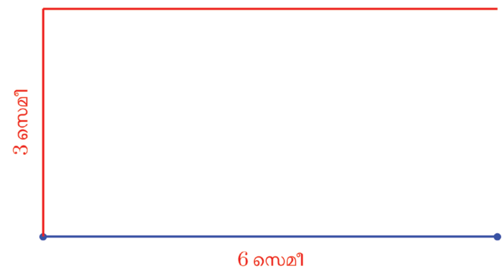
മുകൾവശത്തെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം ?

വശങ്ങൾ മാറാതെ എന്ന ജിയോജിബ്ര പ്രവർത്തനത്തിൽ ചെയ്തതു പോലെ വശങ്ങൾ 5 ഉം 3 ഉം ആയ സാമാന്തരികം ABCD വരയ്ക്കുക. Area ഉപയോഗിച്ച് ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക. C യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. പരപ്പളവ് മാറുന്നുണ്ടോ? പരപ്പളവ് ഏറ്റവും കൂടുന്നത് എപ്പോഴാണ് ? ഏറ്റവും കുറയുന്നതോ?

പരപ്പളവ് 18 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ആകണം; അപ്പോൾ മുകൾവശം, താഴത്തെ വശത്തിൽ നിന്ന് എത്ര അകലെയായിരിക്കണം ?

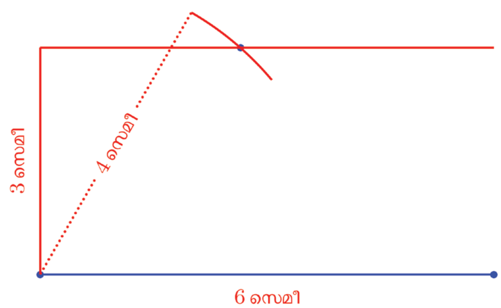
അതായത്, വരയുടെ ഒരറ്റത്തുനിന്ന് 3 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരത്തിൽ ലംബം വരച്ച്, അതിന്റെ മുകളറ്റത്തു കൂടി ആദ്യത്തെ വരയ്ക്ക് സമാന്തരവര വരച്ചാൽ, അതിന്റെ ഒരു ഭാഗമാണ് മുകൾവശം:



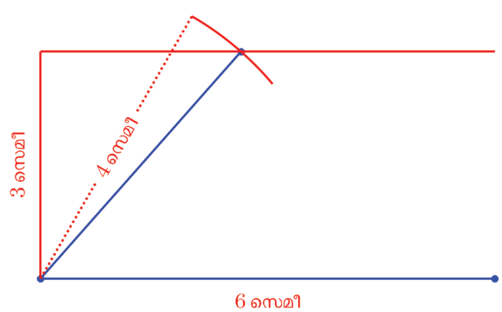


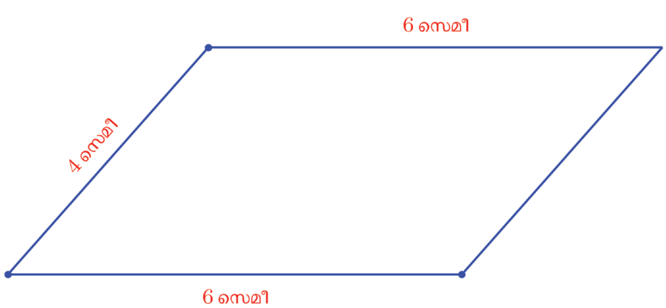
ഈ വരയിൽ എവിടെയോ ആണ് മുകളിലെ ഇടതുമൂല. ഇടതുവശത്തിന്റെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്റർ ആകണമല്ലോ. അപ്പോൾ താഴത്തെ ഇടതുമൂലയിൽ നിന്ന് 4 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയാണ് മുകളിലെ ഇടതു മൂല; അത് മുകളിലെ വരയിലും ആയിരിക്കണം.

അത് എങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്തും ?



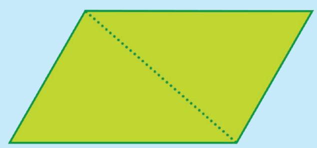
ഇനി സാമാന്തരികം മുഴുവനാക്കാമല്ലോ.



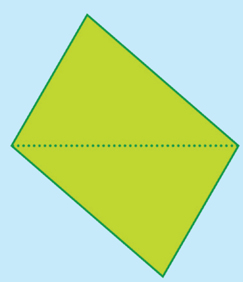


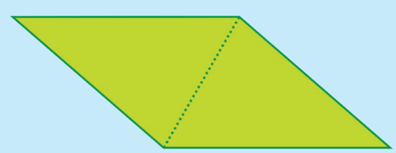
പരപ്പളവ് മാറാതെ

ചുവടെ കൊടുത്ത സാമാന്തരികം നോക്കൂ.



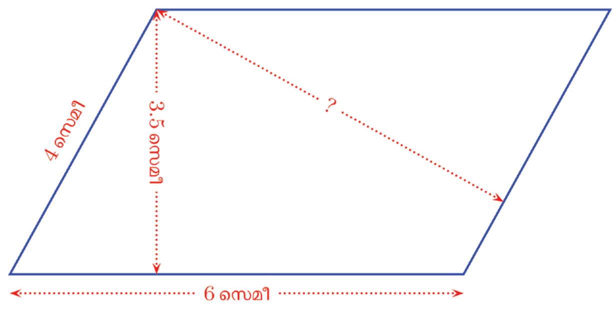
വികർണ്ണത്തിലൂടെ മുറിച്ചു മാറ്റി സമാന്തര വശങ്ങൾ ചേർത്ത് വച്ച് പുതിയ സാമാന്തരികങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം.





ഈ സാമാന്തരികങ്ങളുടെ വശങ്ങളും വികർണ്ണവും ആദ്യത്തേതിന്റെ ഒരു വികർണ്ണവും വശങ്ങളുമായി എങ്ങനെ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു? മറ്റേ വികർണ്ണത്തിലൂടെ മുറിച്ച് മാറ്റി വച്ചാലോ?

മറ്റൊരു കണക്ക്. ഈ സാമാന്തരികം നോക്കൂ:



ഇതിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എന്താണ്?

താഴത്തെ വശം 6 സെന്റിമീറ്ററും, മുകളിലെ വശത്തെക്കുള്ള അകലം 3.5 സെന്റിമീറ്ററും ആയതിനാൽ, സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $6 \times 3.5 = 21$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

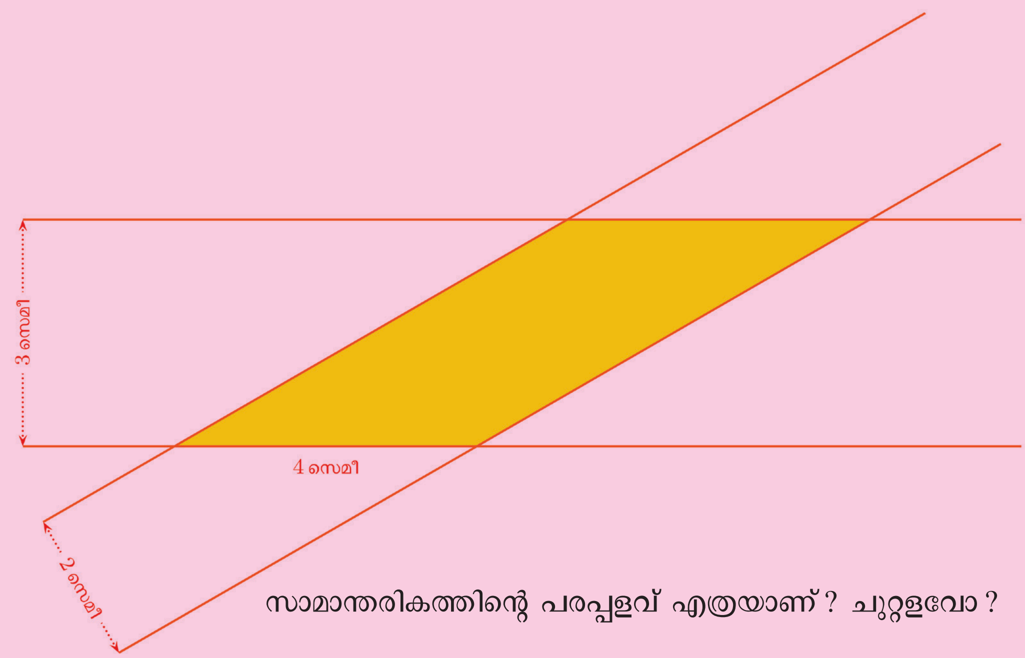
ഇടതു വശം 4 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, വലതുവശത്തെക്കുള്ള അകലത്തിനെ 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാലും പരപ്പളവായ 21 കിട്ടണം;

അപ്പോൾ, വലതുവശത്തെക്കുള്ള അകലം $21 \div 4 = 5.25$ സെന്റിമീറ്റർ.

(1) വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും, 6 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 25 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമായ സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുക.

(2) പരപ്പളവ് 25 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും, ചുറ്റളവ് 24 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുക.

(3) രണ്ടു ജോടി സമാന്തരവരകൾ മുറിച്ചു കടക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന സാമാന്തരികമാണ് ചിത്രത്തിൽ.



സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്? ചുറ്റളവോ?

(4) ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങൾ 12 സെന്റിമീറ്ററും 10 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്. ചെറിയ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 6 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്.

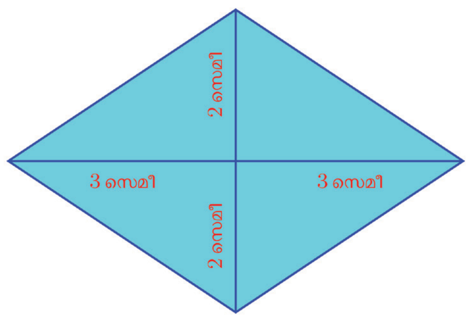
(i) സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(ii) 12 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയാണ്?

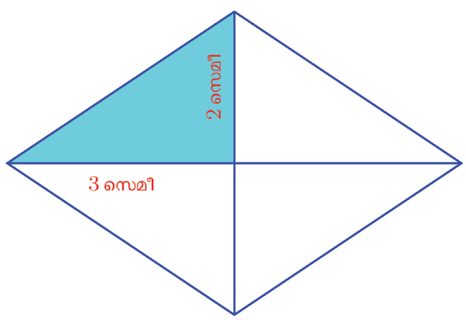
സമഭുജസാമാന്തരികങ്ങൾ

ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികം വരയ്ക്കാൻ അതിന്റെ വികർണ്ണങ്ങളുടെ നീളം അറിഞ്ഞാൽ മതിയല്ലോ (**സമഭാജികൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമഭുജസാമാന്തരികങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം). അങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

ഉദാഹരണമായി, വികർണ്ണങ്ങൾ 6 സെന്റിമീറ്ററും 4 സെന്റിമീറ്ററും ആയ സമഭുജസാമാന്തരികം നോക്കാം:



ഇത് തുല്യമായ നാലു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ ചേർന്നതാണല്ലോ. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?



$$\frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

നാലു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ പരപ്പളവല്ലേ? അപ്പോൾ സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$4 \times 3 = 12$$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

ഇതുപോലെ ഏതു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാമല്ലോ.

(i) സമഭുജസാമാന്തരികം നാലു തുല്യ മട്ടത്രികോണങ്ങൾ ചേർന്നതാണ്.

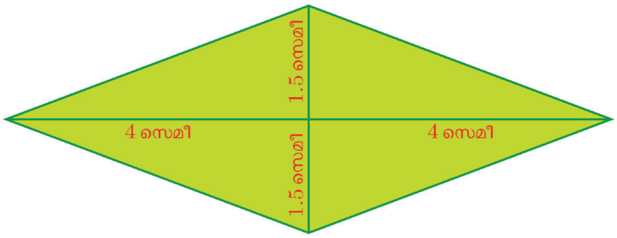
(ii) ഓരോ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെയും ലംബവശങ്ങൾ, വികർണ്ണങ്ങളുടെ പകുതിയാണ്.

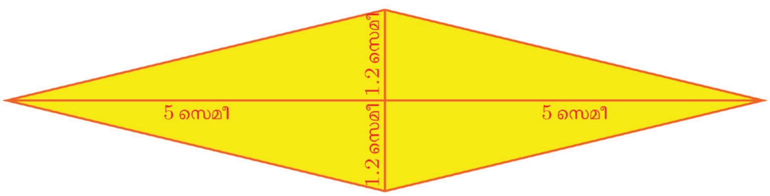
(iii) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വികർണ്ണങ്ങളുടെ പകുതികളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതി; അതായത്, വികർണ്ണങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ എട്ടിലൊന്ന്.

(iv) നാലു ത്രികോണങ്ങളുടെയും കൂടി മൊത്തം പരപ്പളവ്, വികർണ്ണങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതി

ഏതു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെയും പരപ്പളവ്, വികർണ്ണങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്

അപ്പോൾ 12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമഭുജസാമാന്തരികം, വികർണ്ണങ്ങൾ മറ്റു നീളങ്ങളായും വരയ്ക്കാമല്ലോ.





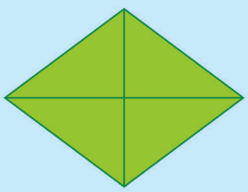
വികർണ്ണങ്ങൾ രണ്ടും ഒരേ നീളമായ സമഭുജസാമാന്തരികമാണല്ലോ സമചതുരം. അപ്പോൾ വികർണ്ണങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമെന്നത്, സമചതുരത്തിൽ വികർണ്ണത്തിന്റെ വർഗമാകും.

അപ്പോൾ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ പറയാം?

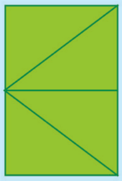
ഏതു സമചതുരത്തിന്റെയും പരപ്പളവ്, വികർണ്ണത്തിന്റെ വർഗത്തിന്റെ പകുതിയാണ്

സമഭുജസാമാന്തരികവും ചതുരവും

ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികം വരച്ച് അതിന്റെ രണ്ട് വികർണ്ണങ്ങളും വരയ്ക്കുക.



ഇനി വികർണ്ണങ്ങളിലൂടെ മുറിച്ച് നാലു ത്രികോണങ്ങളാക്കുക. ഇവയെ ഒരു ചതുരമായി മാറ്റിയടുക്കാം.



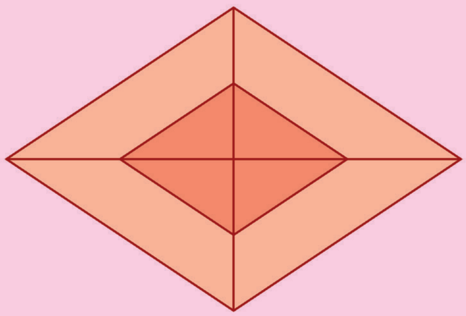
ഈ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് തന്നെയാണല്ലോ. ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളും, സമഭുജ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങളും തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?

അപ്പോൾ സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവും വികർണ്ണങ്ങളുടെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ്?

(1) $4\frac{1}{2}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

(2) 9 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരമല്ലാത്ത സമഭുജസാമാന്തരികം വരയ്ക്കുക.

(3) ചിത്രത്തിൽ, ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച്, ചെറിയൊരു ചതുർഭുജം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



(i) ഈ ചതുർഭുജവും സമഭുജസാമാന്തരികമാണോ ? എന്തുകൊണ്ട് ?

(ii) ചെറിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 3 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണ്. വലിയ സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

(4) ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 10 സെന്റിമീറ്ററും ഒരു വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം 16 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്.

(i) രണ്ടാമത്തെ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ് ?

(ii) സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

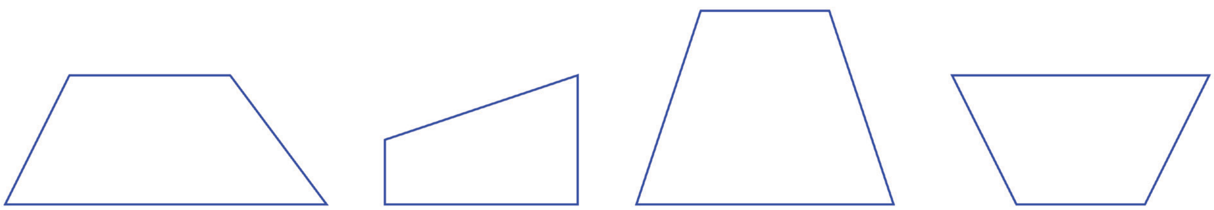
(iii) എതിർവശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയാണ് ?

12

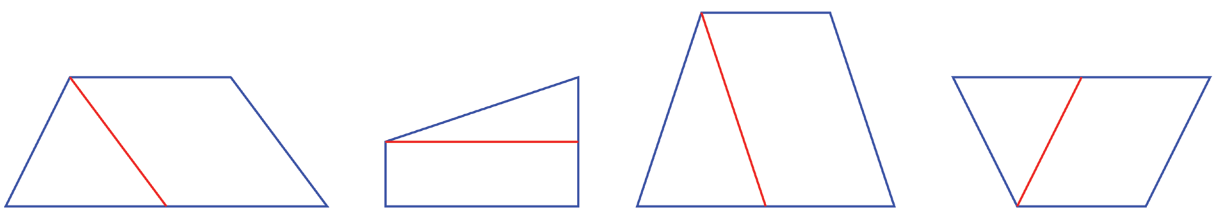
ലംബകങ്ങൾ

വശങ്ങളും കോണുകളും

രണ്ടു ജോടി എതിർവശങ്ങളും സമാന്തരമായ ചതുർഭുജങ്ങളാണല്ലോ സാമാന്തരികങ്ങൾ. ഒരു ജോടി എതിർവശങ്ങൾ മാത്രം സമാന്തരമായ ഒരു ചതുർഭുജത്തിന് ലംബകം (Trapezium) എന്നാണ് പേര്:

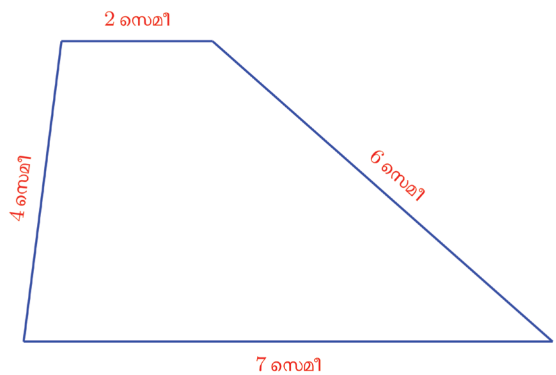


സമാന്തരമല്ലാത്ത വശങ്ങളിൽ ഒന്നിന് സമാന്തരമായി ഒരു വര ഉള്ളിൽ വരച്ച്, ഏത് ലംബകത്തിനെയും ഒരു സാമാന്തരികവും ഒരു ത്രികോണവുമായി ഭാഗിക്കാം:



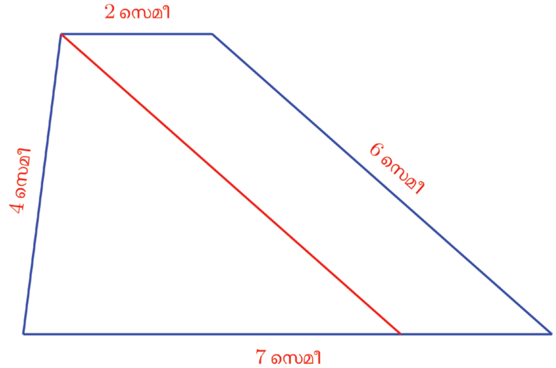
മറിച്ച്, ഒരു സാമാന്തരികവും അതിനു പറ്റിയ ഒരു ത്രികോണവും ചേർത്തുവച്ച് ലംബകം ഉണ്ടാക്കുകയും ആവാം.

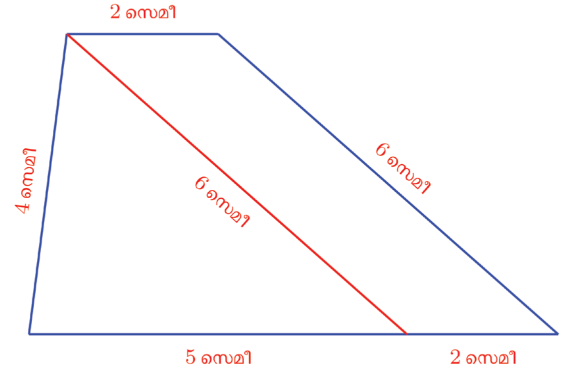
ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങളുടെ നീളം ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെയുള്ള ലംബകം എങ്ങനെ വരയ്ക്കാം ?



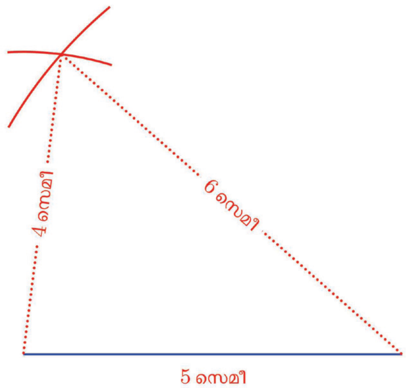
വലത്തെ വശത്തിനു സമാന്തര വര വരച്ച്, ഇതിനെ ത്രികോണവും സാമാന്തരികവും ആയി മുറിച്ചാലോ ?

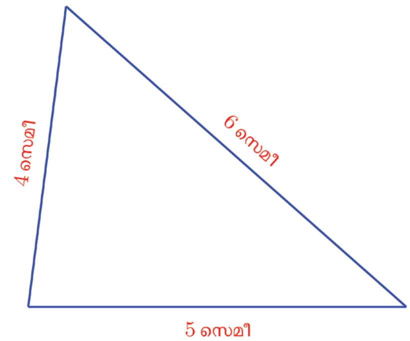
ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ് ?



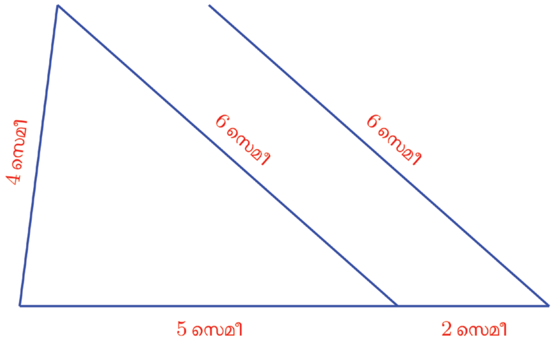


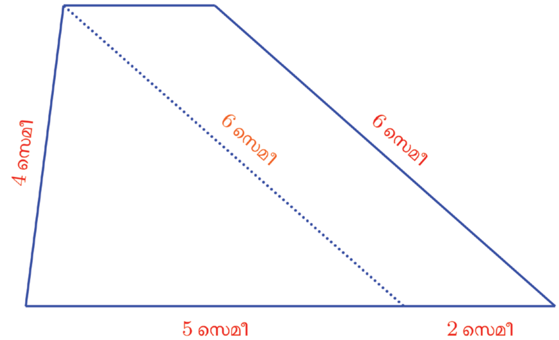
അപ്പോൾ ഈ ലംബകം വരയ്ക്കാൻ, ആദ്യം ഇതിലെ ത്രികോണം വരയ്ക്കാം.





ഇനി താഴത്തെ വശം 2 സെന്റിമീറ്റർ നീട്ടി, അതിന്റെ അറ്റത്തിലൂടെ വലതു വശത്തിനു സമാന്തരമായി ഒരു വര വരച്ച്, അതിൽ 6 സെന്റിമീറ്റർ അടയാളപ്പെടുത്തുക; അതിന്റെ മുകളറ്റവും, ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളറ്റവും യോജിപ്പിച്ചാൽ ലംബകമായി.

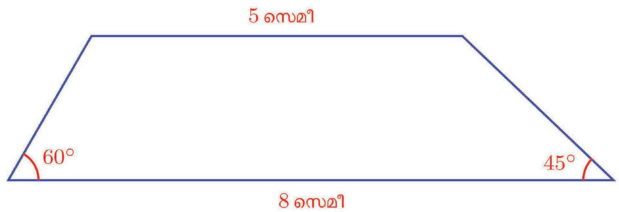




ചതുർഭുജത്തിന്റെ മുകൾവശം താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരവും, അതിന്റെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററും ആയിരിക്കുമോ ? എന്തുകൊണ്ട് ?

ഇനി നാലു വശങ്ങളുടെ നീളത്തിനു പകരം, സമാന്തരമായ വശങ്ങളുടെ നീളവും, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ അവയിൽ ഒന്നുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളും നിശ്ചയിച്ച് ലംബകം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ ?

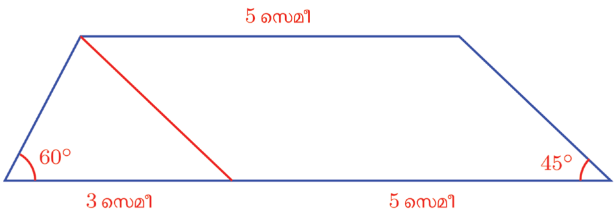
ഉദാഹരണമായി ഈ ലംബകം നോക്കുക:



വശങ്ങളും കോണുകളും തന്നിട്ടുള്ള ഈ ചിത്രം ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ചു നോക്കൂ.

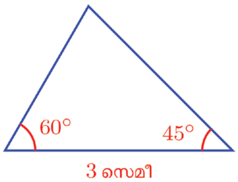
Angle with Given Size, Line, Intersect, Parallel line, Polygon തുടങ്ങിയ ടൂളുകൾ ഉപയോഗിക്കാം.

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ത്രികോണവും സാമാന്തരികവുമായി ഭാഗിക്കാം:

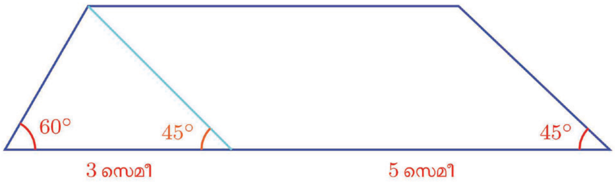


ത്രികോണത്തിലെ ഒരു വശവും അതിലെ ഒരു കോണും അറിയാം; വരയ്ക്കാൻ ആ വശത്തിലെ മറ്റേ കോൺ കൂടി അറിയണമല്ലോ. അതെത്രയാണ് ?

അപ്പോൾ ത്രികോണം ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കാം:

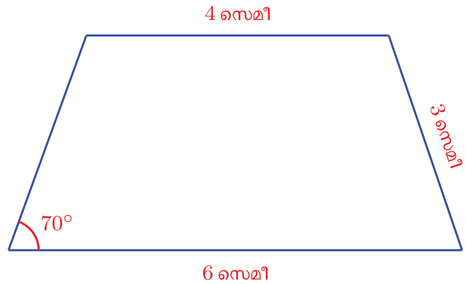


ഇനി താഴത്തെ വര 5 സെന്റിമീറ്റർ വലത്തേയ്ക്ക് നീട്ടി, അറ്റത്ത് 45° ചരിവിൽ ഒരു വരയും, ത്രികോണത്തിന്റെ മുകൾ മൂലയിലൂടെ താഴത്തെ വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായ വരയും വരച്ചു മുട്ടിച്ചാൽ ലംബകമായി.

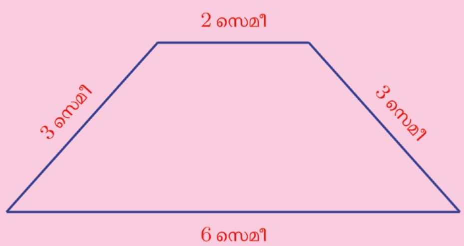


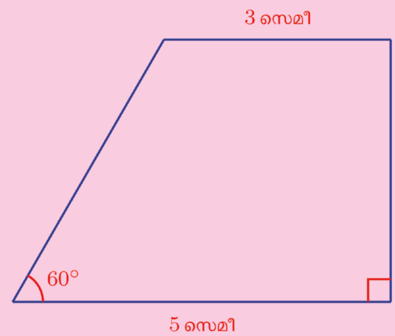
മുകൾവശത്തിന്റെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെയാകാൻ കാരണമെന്താണ്?

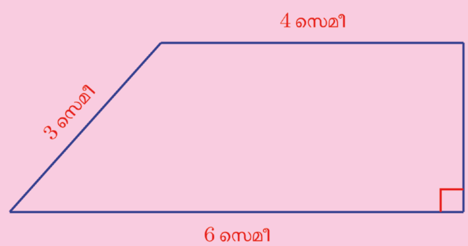
ഇനി ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ലംബകം വരയ്ക്കാമോ?



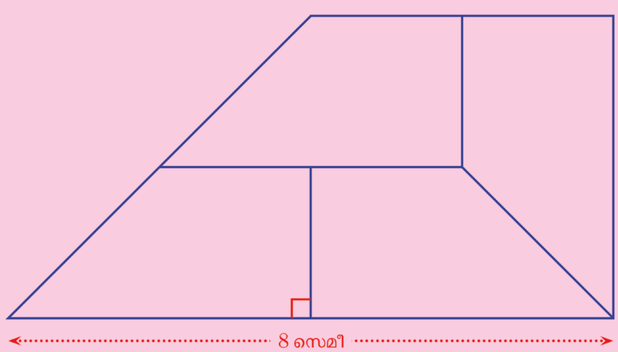
(1) ചുവടെ കാണുന്ന ലംബകങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.







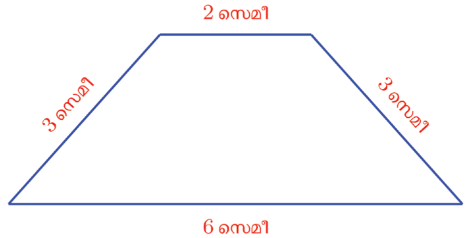
(2) തുല്യമായ നാലു ലംബകങ്ങൾ ചേർത്തുവച്ച ചിത്രമാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കുക.

സമപാർശ്വലംബകങ്ങൾ

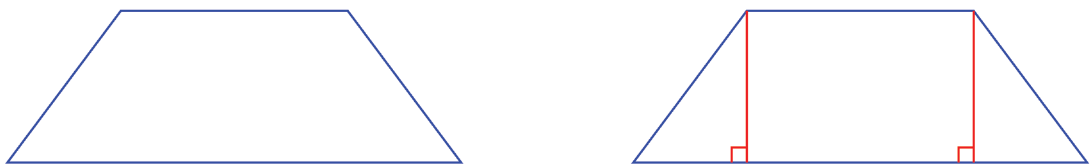
നേരത്തെ വരച്ച ഒരു ലംബകം നോക്കൂ:



എന്താണ് ഇതിന്റെ സവിശേഷത ?

സമാന്തരമല്ലാത്ത വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമായ ലംബകങ്ങളെ **സമപാർശ്വലംബകം** (Isosceles trapezium) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഏതു ലംബകത്തെയും ഒരു ത്രികോണവും ഒരു സാമാന്തരികവുമായി ഭാഗിക്കാമെന്നു കണ്ടല്ലോ. സമപാർശ്വലംബകത്തെ മറ്റൊരു രീതിയിൽ ഭാഗിക്കാം:



ഒരു ചതുരവും രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും. ഈ ത്രികോണങ്ങളെകുറിച്ച് എന്തു പറയാം ?

- രണ്ടും മട്ടത്രികോണങ്ങളാണ്
- കർണ്ണങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ് (എന്തുകൊണ്ട് ?)
- കുത്തനെയുള്ള വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ് (എന്തുകൊണ്ട് ?)

അപ്പോൾ പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്, (വിലങ്ങനെയുള്ള) മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാകണമല്ലോ.

മൂന്നു വശങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമായതിനാൽ, ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളും തുല്യമാണ്.

ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ കോണുകൾ നോക്കുക:

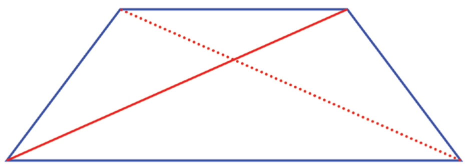
നേരത്തെ കണ്ട ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളായതിനാൽ ഇവ തുല്യമാണ്.

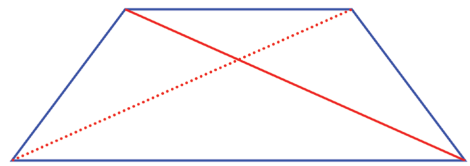
അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലെ കോണുകളും തുല്യമാണല്ലോ (അതെങ്ങനെ ?).

പൊതുവെ ഒരു ലംബകത്തിന്റെ സമാന്തര വശങ്ങളെ പാദങ്ങൾ എന്നു പറയാറുണ്ട്. അപ്പോൾ ഈ കോണുകളെ ലംബകത്തിന്റെ പാദകോണുകൾ എന്നു പറയാം.

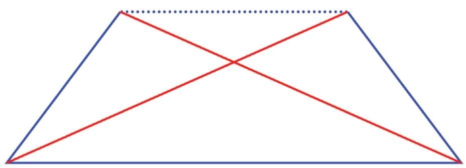
ഏതു സമപാർശ്വലംബകത്തിന്റെയും പാദകോണുകൾ തുല്യമാണ്

മറ്റൊരു കാര്യം നോക്കാം. ഈ സമപാർശ്വലംബകത്തിന്റെ ഓരോ വികർണ്ണവും, അതിനെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുമല്ലോ.

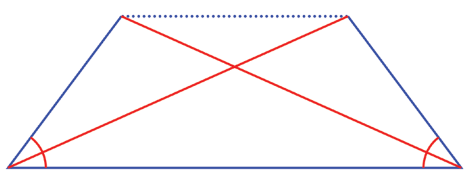




ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ത്രികോണങ്ങളിലെ ഇടതും വലതുമുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ ഒത്തുനോക്കാം:



രണ്ടിന്റെയും താഴത്തെ വശം, ലംബകത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം തന്നെയാണ്. മറ്റു രണ്ട് (നീല) വശങ്ങൾ, ലംബകത്തിന്റെ സമാന്തരമല്ലാത്ത വശങ്ങളായതിനാൽ തുല്യമാണ്. താഴത്തെ വശത്തിനും ഈ വശത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോണുകൾ, സമപാർശ്വ ലംബകത്തിന്റെ പാദകോണുകളായതിനാൽ തുല്യമാണ്.



രണ്ടു വശങ്ങളും അവയുടെ ഇടയിലെ കോണും തുല്യമായതിനാൽ, ത്രികോണങ്ങളുടെ മൂന്നാമത്തെ (ചുവന്ന) വശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

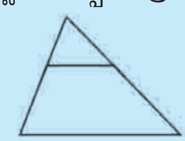
ഈ വശങ്ങൾ ലംബകത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങളാണല്ലോ. അപ്പോൾ പൊതുവെ എന്തു പറയാം ?

ഏത് സമപാർശ്വലംബകത്തിലും വികർണ്ണങ്ങൾ തുല്യമാണ്

ലംബകവും ത്രികോണവും

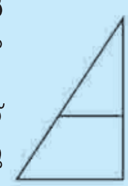
ഒരു ലംബകം വരയ്ക്കുക.

ഇതിന്റെ സമാന്തരമല്ലാത്ത എതിർവശങ്ങൾ നീട്ടിയാൽ കൂട്ടിമുട്ടുമല്ലൊ. അപ്പോൾ ത്രികോണമായി.



ഇനി ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാം.

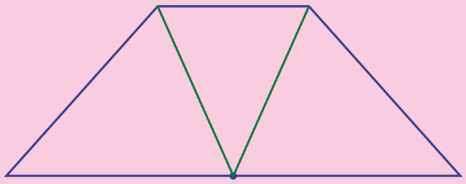
ഇതിലെ ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ ഒരു വര വരയ്ക്കൂ. മുകളിലത്തെ രണ്ടു വരകൾ മായ്ച്ചുകളയുക. ഒരു ലംബകം കിട്ടിയില്ലേ?



സമപാർശ്വലംബകത്തിൽ നിന്ന് തുടങ്ങിയാൽ കിട്ടുന്നത് ഏതു തരം ത്രികോണമാണ്?

മറിച്ച്, സമപാർശ്വത്രികോണത്തെ ഇങ്ങനെ മുറിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ലംബകത്തിന്റെ സവിശേഷത എന്താണ്?

(1) ചിത്രത്തിൽ ഒരു സമപാർശ്വലംബകത്തിന്റെ ഒരു പാദത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും, മറ്റെ പാദത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളും തമ്മിൽ യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

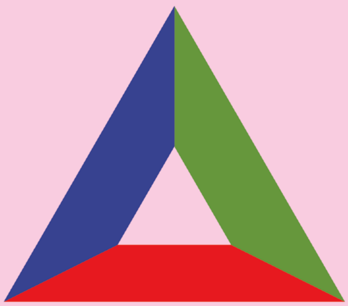


ഈ വരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) ഒരു സമപാർശ്വലംബകത്തിന്റെ പാദങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, രണ്ടു പാദങ്ങൾക്കും ലംബമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

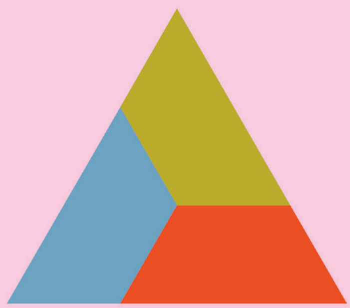
(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

(i) തുല്യമായ മൂന്നു സമപാർശ്വലംബകങ്ങൾ

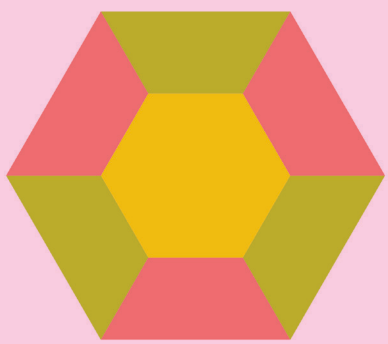


ഈ ചിത്രങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ച് നിറം കൊടുക്കൂ. നിശ്ചിത അളവുകളിൽ ഒരു സമ പാർശ്വലംബകം വരച്ചതിനു ശേഷം Reflect about Line ഉപയോഗിച്ച് ലംബകത്തിലും ലംബകത്തിന്റെ ഒരു വശത്തും ക്ലിക്കുചെയ്താൽ അതിനോടു ചേർന്നു നിൽക്കുന്ന ഒരു ലംബകം എളുപ്പത്തിൽ വരയ്ക്കാം.

(ii) തുല്യമായ മറ്റു മൂന്നു സമപാർശ്വലംബകങ്ങൾ

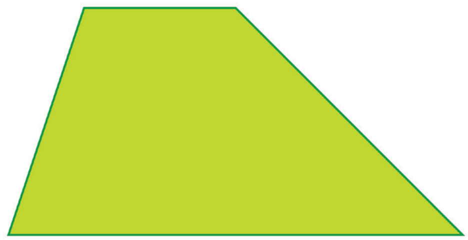


(iii) തുല്യമായ ആറ് സമപാർശ്വലംബകങ്ങൾ

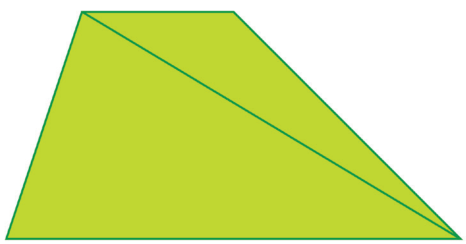


പരപ്പളവ്

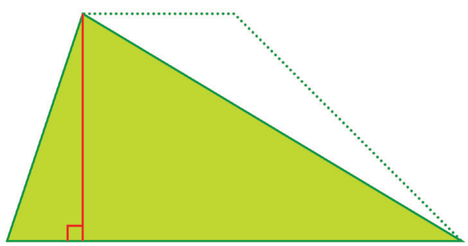
ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ ഏതൊക്കെ അളവുകൾ വേണം ?



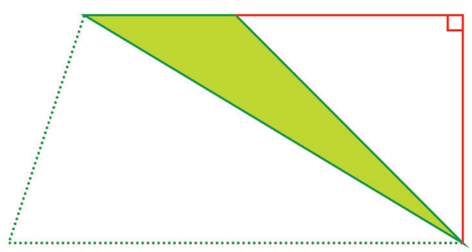
സാമാന്തരികത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ ചെയ്തതുപോലെ, ഇതിനെയും ഒരു വികർണ്ണം വരച്ച്, രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കാം:



വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ എന്തൊക്കെ അളവുകൾ വേണം ?

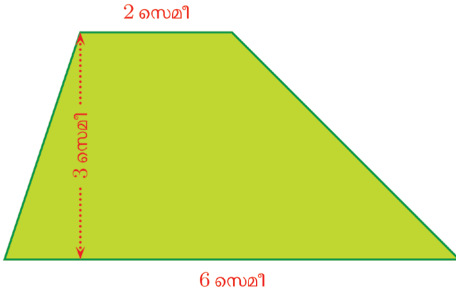


അതിന്റെ പരപ്പളവ് താഴത്തെ വശത്തിന്റെ നീളവും, അതിൽനിന്ന് മുകൾ മൂലയിലേക്കുള്ള അകലവും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതി; അതായത്, ലംബകത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെയും താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതി.



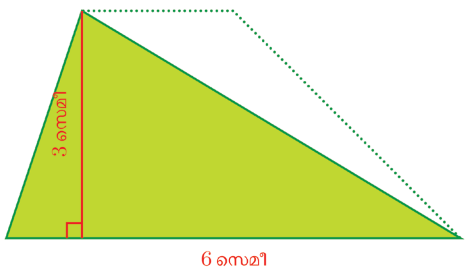
ഇനി ചെറിയ ത്രികോണം എടുത്താലോ ?

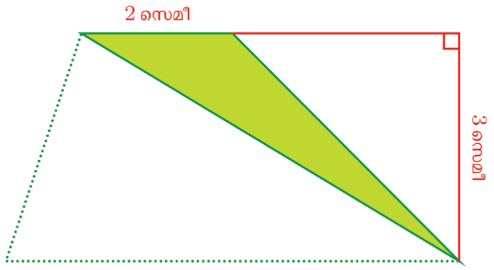
മുകളിലത്തെ വശത്തിന്റെയും, താഴത്തെ മൂലയിൽനിന്ന് ഈ വശം നീട്ടിയതിലേക്കുള്ള ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ് പരപ്പളവ്. അതായത്, ലംബകത്തിന്റെ മുകൾവശത്തിന്റെയും, താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതി.



അപ്പോൾ ഈ ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ, താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങളുടെ നീളവും, അവ തമ്മിലുള്ള അകലവും അറിഞ്ഞാൽ പോരെ ?

വികർണ്ണം വരച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ എത്രയാണ് ?





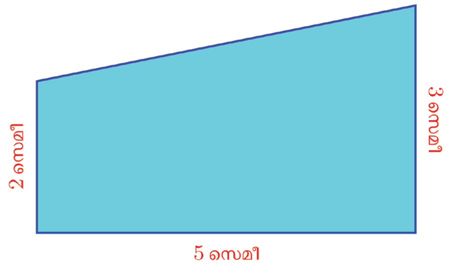
- ഇടതു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ
- വലതു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ
- ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $9 + 3 = 12$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കുകൂട്ടുന്നത്, ഇങ്ങനെയും എഴുതാമല്ലോ:

$$\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 3\right) + \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 3\right) = \frac{1}{2} \times (6 + 2) \times 3$$
$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 3$$
$$= 12 \text{ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ}$$

അതായത്, ലംബകത്തിന്റെ സമാന്തര വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളായ 6 ഉം 2 ഉം കൂട്ടി, സമാന്തര വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലമായ 3 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച്, പകുതി കണക്കാക്കി.

അപ്പോൾ ഈ ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണെന്നു പറയാമോ ?



Polygon ഉപയോഗിച്ച് വ്യത്യസ്ത ലംബകങ്ങൾ വരയ്ക്കുക (Grid ഉപയോഗിച്ച് എളുപ്പത്തിൽ വരയ്ക്കാം). പരപ്പളവ്, ഓരോന്നിന്റെയും സമാന്തരവശങ്ങളുടെ നീളം, അവ തമ്മിലുള്ള അകലം എന്നിവ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ എങ്ങനെ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്ന് നോക്കുക.

ഇതിൽ സമാന്തര വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും, അവ തമ്മിലുള്ള അകലം 5 സെന്റിമീറ്ററും.

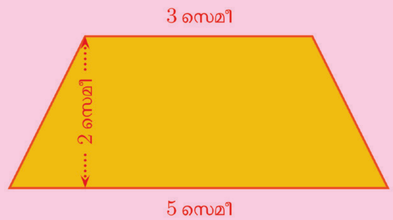
അപ്പോൾ പരപ്പളവ്

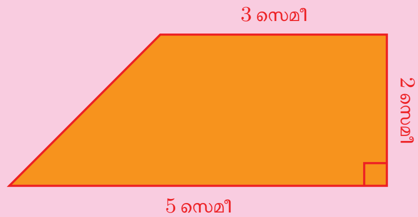
$$\frac{1}{2} \times (2+3) \times 5 = 12.5 \text{ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ}$$

പൊതുവെ എന്തു പറയാം ?

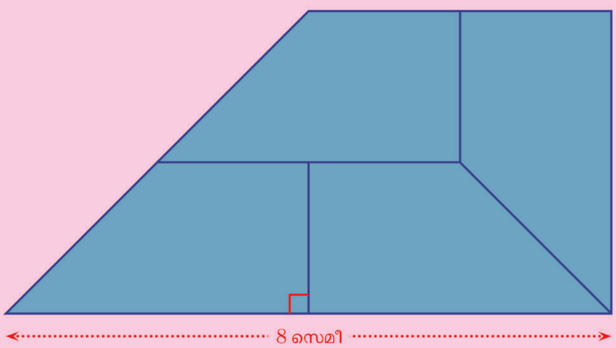
ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, സമാന്തര വശങ്ങളുടെ തുകയുടെയും, അവ തമ്മിലുള്ള അകലത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്

(1) ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന ലംബകങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

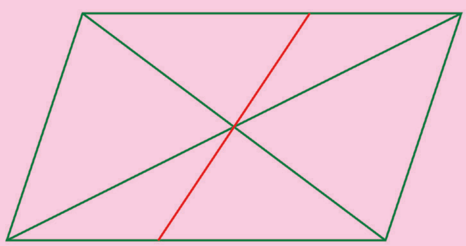


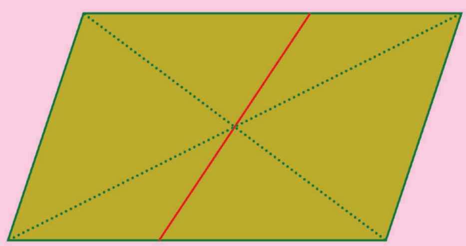


(2) തുല്യമായ നാലു ലംബകങ്ങൾ ചേർത്തുണ്ടാക്കിയ വലിയ ലംബകമാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. വലിയ ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



(3) ചിത്രത്തിൽ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ ഒരു വര വരച്ചിരിക്കുന്നു:





ഈ വര സാമാന്തരികത്തെ ഒരേ പരപ്പളവുള്ള രണ്ടു ലംബകങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു എന്നു തെളിയിക്കുക.

13

സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക്

പട്ടികപ്പെടുത്തൽ

സ്കൂളിലെ 8 എ ക്ലാസ്സിൽ 40 കുട്ടികളുണ്ട്. ഹെൽത്ത് ക്ലബ്ബിന്റെ ആഭിമുഖ്യത്തിൽ ഓരോരുത്തരുടെയും രക്തഗ്രൂപ്പ് നിശ്ചയിച്ചത് ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

O+	B+	O+	AB+	AB–	B–
O+	AB–	AB+	AB+	B–	AB+
A+	O+	O+	O+	O+	A+
O–	A+	A+	O+	O+	O+
B+	B+	A+	A+	B+	O+
AB+	A+	B+	B+	0+	A+
B–	O+	O+	B+		

i) O– രക്തഗ്രൂപ്പിലുള്ള എത്ര കുട്ടികളുണ്ട് ?

ii) B– രക്തഗ്രൂപ്പിലുള്ള എത്ര കുട്ടികളുണ്ട് ?

iii) O+ രക്തഗ്രൂപ്പിലുള്ള എത്ര കുട്ടികളുണ്ട് ?

iv) ഏത് രക്തഗ്രൂപ്പിലുള്ളവരാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ ?

v) ഏത് രക്തഗ്രൂപ്പിലുള്ളവരാണ് ഏറ്റവും കുറവ് ?

ഒന്നാമത്തെ ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ O– രക്തഗ്രൂപ്പ് മാത്രം എണ്ണിയാൽ മതി. രണ്ടാമത്തേതിന് B– ഉം മൂന്നാമത്തേതിന് O+ ഉം എണ്ണിയാൽ മതി.

നാലാമത്തേതിനോ?

എല്ലാം വെവ്വേറെ എണ്ണേണ്ടി വരും അല്ലേ ?

ഇവിടെ ഓരോ ഇനത്തിലും എത്ര പേരുണ്ടെന്ന് ആദ്യമേ കണക്കാക്കിവെയ്ക്കുന്നതാണ് സൗകര്യം.

ഗ്രൂപ്പ്	എണ്ണം
A+	8
B+	7
AB+	5
O+	14
B–	3
AB–	2
O–	1

ഈ പട്ടിക നോക്കി അവസാനത്തെ രണ്ടു ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക.

മറ്റൊരു കണക്ക്.

ഒരു ക്ലാസ്സിലെ കുട്ടികൾക്ക് പരീക്ഷയ്ക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

8	7	6	3	8	8	7	7	6
7	9	7	6	8	7	2	6	7
10	6	7	3	9	5	4	5	4
4	4	5	8	10	8	8	9	7
7	6	8	8	7	4	5	9	8

i) കൂടുതൽ കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച സ്കോർ ഏതാണ്?

ii) 8 ഉം 8 ൽ കൂടുതലും സ്കോർ ലഭിച്ച എത്ര കുട്ടികളുണ്ട്?

iii) എത്ര കുട്ടികൾക്ക് 8 ൽ കുറവ് സ്കോർ കിട്ടി ?

iv) 10 സ്കോർ കിട്ടിയ എത്ര കുട്ടികളുണ്ട്?

നേരത്തേ ഉണ്ടാക്കിയതു പോലെ ഒരു പട്ടിക ഇവിടേയും ഉണ്ടാക്കാം.

ഓരോ സ്കോറും എത്ര തവണ ആവർത്തിച്ചിട്ടുണ്ട് എന്നാണല്ലോ കാണേണ്ടത്.

ഇവിടെ ഏറ്റവും ചെറിയ സ്കോർ 2 ഉം വലിയ സ്കോർ 10 ഉം ആണ്.

2 മുതൽ 10 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ ഒരു നിരയിൽ എഴുതി ഓരോന്നും എത്ര തവണ ആവർത്തിച്ചിട്ടുണ്ടെന്ന് നോക്കൂ. അഞ്ചാം ക്ലാസ്സിൽ പരിചയപ്പെട്ട അടയാളരീതി തന്നെ ഉപയോഗിക്കാം.

സ്കോർ	അടയാളം	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
2	|	1
3	||	2
4	卌	5
5	||||	4
6	卌 |	6
7	卌 卌 |	11
8	卌 卌	10
9	||||	4
10	||	2
ആകെ		45

ഇനി പട്ടിക നോക്കി നേരത്തെ ചോദിച്ച എണ്ണങ്ങളെല്ലാം കണ്ടുപിടിക്കാൻ എളുപ്പമല്ലേ ?

പട്ടികയിൽ, 2 ഒരു തവണ, 3 രണ്ട് തവണ, 7 പതിനൊന്ന് തവണ എന്നിങ്ങനെ ഓരോ സ്കോറും എത്ര തവണ എന്നാണല്ലോ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇത്തരം പട്ടികകളിൽ ഓരോന്നും എത്ര തവണ ആവർത്തിക്കുന്നു എന്നതിനെ പൊതുവെ ആവൃത്തി (frequency) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇത്തരത്തിലുള്ള പട്ടികയെ ആവൃത്തിപ്പട്ടിക (frequency table) എന്നും പറയുന്നു.

1) ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ 50 കുടുംബങ്ങളിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

8	6	9	4	4	2	6	5	4	3
7	3	3	2	3	7	6	3	2	5
5	13	9	9	7	4	4	5	4	3
3	7	2	3	3	10	8	6	6	4
2	4	5	4	3	8	7	5	6	3

ആവൃത്തിപ്പട്ടിക തയ്യാറാക്കി ചുവടെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) രണ്ട് അംഗങ്ങൾ മാത്രമുള്ള എത്ര കുടുംബങ്ങൾ ഉണ്ട് ?

ii) നാലോ അതിൽ കുറവോ അംഗങ്ങളുള്ള എത്ര കുടുംബങ്ങൾ ഉണ്ട് ?

iii) പത്തോ അതിൽ കൂടുതലോ അംഗങ്ങളുള്ള എത്ര കുടുംബങ്ങൾ ഉണ്ട് ?

iv) എത്ര അംഗങ്ങളുള്ള കുടുംബങ്ങളാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ ?

2) 8 B ക്ലാസ്സിൽ 44 കുട്ടികളുണ്ട്. ഓരോ കുട്ടിയും എത്ര കിലോമീറ്റർ അകലെ നിന്നാണ് വരുന്നതെന്ന് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

6	2	7	12	1	9	2	6
5	7	3	4	1	5	4	4
5	8	6	5	2	5	9	5
11	12	1	9	2	14	4	7
9	6	6	7	3	2	6	3
4	7	9	3				

ആവൃത്തിപ്പട്ടിക തയ്യാറാക്കി ചുവടെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരമെഴുതുക.

i) കൃത്യം ഒരു കിലോമീറ്റർ അകലത്തിൽ നിന്നും വരുന്ന എത്ര കുട്ടികളുണ്ട് ?

ii) 5 കിലോമീറ്ററിൽ കൂടുതൽ ദൂരത്ത് നിന്ന് വരുന്ന എത്ര കുട്ടികളുണ്ട് ?

iii) 5 കിലോമീറ്ററിനും 10 കിലോമീറ്ററിനും ഇടയിൽ നിന്ന് വരുന്ന എത്ര കുട്ടികളുണ്ട്?

iv) 10 കിലോമീറ്ററിൽ കൂടുതൽ അകലെ നിന്ന് വരുന്ന എത്ര കുട്ടികളുണ്ട് ?

3) ഒരു ക്ലാസ് പരീക്ഷയിൽ 35 കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച സ്കോർ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

15	10	18	11	19	16	15	17	14	18	13	15
17	16	15	14	15	17	14	15	13	16	11	11
16	20	13	12	10	16	17	13	12	14	12	

ആവൃത്തിപ്പട്ടിക തയ്യാറാക്കി ചുവടെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) 20 സ്കോർ ലഭിച്ച എത്ര കുട്ടികൾ ഉണ്ട് ?

ii) 10 നും 15 നും ഇടയിൽ സ്കോർ ലഭിച്ച എത്ര കുട്ടികൾ ഉണ്ട് ?

iii) 10 ൽ കുറവ് സ്കോർ ലഭിച്ച എത്ര കുട്ടികൾ ഉണ്ട് ?

iv) ഏറ്റവും കൂടുതൽ കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച സ്കോർ എന്താണ് ?

മറ്റൊരു രൂപം

ഒരു ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാരൻ 50 ഏകദിനമത്സരങ്ങളിൽ നേടിയ റൺ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

50	0	49	60	100	68	27	48	15	65	101	45	2
52	25	18	29	53	72	90	32	81	28	104	35	49
2	60	87	71	38	102	35	71	68	20	10	30	55
47	21	35	12	20	11	27	43	38	40	48		

i) അയാൾ എത്ര സെഞ്ച്വറികൾ നേടി ?

ii) എത്ര അർധസെഞ്ച്വറികൾ നേടി ?

iii) 50-ൽ കുറഞ്ഞ റൺസ് നേടിയ എത്ര കളികളുണ്ട് ?

ഇവിടെ കളിക്കാരൻ നേടിയ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ റൺ പൂജ്യവും ഏറ്റവും കൂടിയത് 104 ഉം ആണല്ലോ.

ഇതുവരെ ചെയ്തതുപോലെയുള്ള പട്ടിക തയ്യാറാക്കാൻ (0 മുതൽ 104 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ ആദ്യനിരയിൽ എഴുതേണ്ടി വരും. എന്നാൽ എല്ലാ സംഖ്യകളും ഇവിടെ ആവശ്യമില്ല. ഇങ്ങനെയുള്ള പട്ടികയിൽ നിന്ന് കളിക്കാരന്റെ പ്രകടനത്തെ കുറിച്ച് പൊതുധാരണ ഉണ്ടാക്കാനും കഴിയില്ല.

മറ്റൊരു രീതിയിൽ പട്ടിക തയ്യാറാക്കാം.

റൺസ് ഓരോന്നായി ഒരു നിരയിൽ എഴുതുന്നതിനു പകരം, സെഞ്ച്വറി (100ഉം, 100ൽ കൂടുതലും), അർധസെഞ്ച്വറി (50 - 99) അർധസെഞ്ച്വറിയിൽ കുറവ് (50-ൽ കുറവ്) എന്നിവ ഓരോ വിഭാഗമായി എടുത്ത് പട്ടിക ഉണ്ടാക്കാം.

വിഭാഗം	അടയാളം	കളികളുടെ എണ്ണം
0 - 49	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	31
50 - 99	𝍸 𝍸 𝍸	15
100 ഉം അതിന് മുകളിലും	||||	4
ആകെ		50

ഈ പട്ടിക നോക്കി നേരത്തെ ചോദിച്ച ചോദ്യങ്ങൾക്ക് എളുപ്പത്തിൽ ഉത്തരം പറയാമല്ലോ? കളിക്കാരന്റെ പ്രകടനം അല്പംകൂടി വിശകലനം ചെയ്യണമെങ്കിലോ ?

- 10 ൽ കുറവ് റൺസ് നേടിയ എത്ര മത്സരങ്ങളുണ്ട് ?
- 90 നും 100 നും ഇടയിൽ റൺസ് നേടിയ എത്ര മത്സരങ്ങളുണ്ട് ?
- 40 നും 50 നും ഇടയിൽ റൺസ് നേടിയ എത്ര മത്സരങ്ങളുണ്ട് ?

എന്നിങ്ങനെ കണക്കാക്കേണ്ടിവരുമ്പോൾ സൗകര്യപ്രദമായ വിധത്തിൽ വിഭാഗങ്ങളാക്കി പട്ടിക തയ്യാറാക്കണം.

0 മുതൽ 9 വരെ, 10 മുതൽ 19 വരെ, 20 മുതൽ 29 വരെ എന്നിങ്ങനെ വിഭാഗങ്ങളാക്കി ഓരോന്നിലും എത്ര വീതം വരുന്നു എന്ന് കണക്കാക്കാം.

പട്ടികകൾ

വിവരങ്ങളുടെ ശേഖരണത്തിൽ നിന്നു ശരിയായ നിഗമനങ്ങൾ രൂപീകരിക്കാൻ, അവയെ ചിട്ടപ്പെടുത്തേണ്ടതുണ്ട്. ഇങ്ങനെ ചിട്ടപ്പെടുത്താനുള്ള ഒരു മാർഗമാണ് അവയെ വർഗീകരിച്ച് പട്ടികയാക്കുക എന്നത്. സ്ഥിതിവിവരക്കണക്കിൽ സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന ഒന്നാണ് ആവൃത്തിപ്പട്ടിക.

ഇങ്ങനെ പട്ടികപ്പെടുത്തുമ്പോൾ, ചില വിവരങ്ങൾ നഷ്ടപ്പെടുന്നുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, വരുമാനത്തെക്കുറിച്ച് ശേഖരിച്ച മൊത്തം വിവരങ്ങളെ വിഭാഗങ്ങളാക്കി, ഓരോ വിഭാഗത്തിലുള്ളവരുടേയും എണ്ണം മാത്രം അവതരിപ്പിക്കുമ്പോൾ ഇതിലെ ഓരോരുത്തരുടേയും യഥാർത്ഥ വരുമാനം എന്താണെന്നുള്ളത് കാണാൻ കഴിയില്ല.

പക്ഷേ, ഇത്തരമൊരു പട്ടികയിൽനിന്ന്, വ്യത്യസ്ത വരുമാനങ്ങളുള്ളവരുടെ വിതരണത്തെക്കുറിച്ച് പൊതുവായ ധാരണകൾ കിട്ടുന്നു. ഇതാകട്ടെ, ചിട്ടപ്പെടുത്താത്ത മൊത്തം വിവരശേഖരത്തിൽ നിന്നു കിട്ടുന്നുമില്ല.

സ്കോർ	അടയാളം	കളികളുടെ എണ്ണം
0 - 9	|||	3
10 - 19	𝍸	5
20 - 29	𝍸 |||	8
30 - 39	𝍸 ||	7
40 - 49	𝍸 |||	8
50 - 59	||||	4
60 - 69	𝍸	5
70 - 79	|||	3
80 - 89	||	2
90 - 99	|	1
100 - 109	||||	4
ആകെ		50

നേരത്തെ കൊടുത്ത ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഇനി എളുപ്പം ഉത്തരം പറയാമല്ലോ.

മറ്റൊരു സന്ദർഭം നോക്കാം.

സ്കൂളിലെ ആരോഗ്യക്ലബിലെ അംഗങ്ങളുടെ ഭാരം (കിലോഗ്രാമിൽ) ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

38	$37\frac{1}{2}$	$40\frac{1}{2}$	59	48	48	$37\frac{1}{2}$
58	50	$54\frac{1}{2}$	39	40	$40\frac{1}{2}$	49
32	43	45	53	37	44	51
$50\frac{1}{2}$	$32\frac{1}{2}$	46	55	36	$44\frac{1}{2}$	47
$42\frac{1}{2}$	33					

ആവൃത്തിപ്പട്ടിക ഉണ്ടാക്കണം.

30 – 34, 35 – 39, 40 – 44, 45 – 49 എന്നിങ്ങനെ വിഭാഗങ്ങളെടുത്താൽ ശരിയാകുമോ ?

ഉദാഹരണമായി $44\frac{1}{2}$ ഭാരം ഏത് വിഭാഗത്തിലാണ് എടുക്കുക ?

വിഭജനരീതി

വിവരങ്ങൾക്ക് ഒതുക്കം കിട്ടാനും, അതുവഴി അവയെക്കുറിച്ചുള്ള പൊതുവായ ധാരണകൾ എളുപ്പമാക്കാനും വേണ്ടിയാണല്ലോ അവയെ വിഭജിച്ച് പട്ടികയാക്കുന്നത്. ഇങ്ങനെ ചെയ്യുമ്പോൾ, ചില വിവരങ്ങൾ നഷ്ടപ്പെടുമെന്നും കണ്ടു. വളരെച്ചെറിയ വിസ്താരമുള്ള കുറേ വിഭാഗങ്ങളാക്കിയാൽ ഇത്തരം നഷ്ടം കുറയ്ക്കാം; പക്ഷേ പട്ടികയ്ക്ക് ഒതുക്കമുണ്ടാകില്ല. മറിച്ച്, വലിയ വിസ്താരമുള്ള കുറച്ചു വിഭാഗങ്ങൾ മാത്രമാക്കിയാൽ, വിവരങ്ങളുടെ അവതരണം ചുരുങ്ങികിട്ടും; പക്ഷേ, ധാരണകളൊന്നും തന്നെ രൂപീകരിക്കാൻ കഴിയാത്തവിധം, വിവരങ്ങൾ നഷ്ടമാകും.

ഉദാഹരണമായി. വരുമാനവിവരങ്ങൾ പട്ടികയാക്കുമ്പോൾ, 1 രൂപ ഇടവിട്ടുള്ള വിഭാഗങ്ങളാക്കിയാലോ? ശേഖരിച്ച വിവരങ്ങളെല്ലാം പട്ടികയിലുണ്ടാകും; പക്ഷേ ചുരുക്കൽ ഒട്ടുംതന്നെ നടന്നിട്ടില്ല. മറിച്ച്, ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വരുമാനം മുതൽ ഏറ്റവും കൂടിയ വരുമാനം വരെയുള്ള ഒറ്റ വിഭാഗമാക്കിയാലോ? പട്ടിക ഏറ്റവും ചുരുങ്ങും; പൊതുവായ നിഗമനങ്ങളൊന്നും സാധ്യമാവുകയുമില്ല.

വിഭാഗങ്ങളെ 30 – 35, 35 – 40, 40 – 45 എന്നിങ്ങനെ എടുക്കാം. അപ്പോൾ $44\frac{1}{2}$ എന്ന അളവ് 40 – 45 എന്ന വിഭാഗത്തിൽ വരുമല്ലോ. 40 എന്ന അളവ്, 35 – 40 അല്ലെങ്കിൽ 40 – 45 എന്നിവയിൽ ഏത് വിഭാഗത്തിൽ ഉൾപ്പെടുത്തണം ? സാധാരണയായി 40 – 45 എന്ന വിഭാഗത്തിലാണ് 40 നെ ഉൾപ്പെടുത്തുന്നത്. ഇതുപോലെ 45 എന്ന അളവ് 45 – 50 എന്ന വിഭാഗത്തിലാണ് ഉൾപ്പെടുത്തുന്നതും.

ഇനി ആവൃത്തിപ്പട്ടിക ഉണ്ടാക്കാമല്ലോ.

വിഭാഗം	അടയാളം	ആവൃത്തി
30 - 35		
35 - 40		
40 - 45		
45 - 50		
50 - 55		
55 - 60		

1) 40 പട്ടണങ്ങളിൽ ഒരു ദിവസത്തെ ഉയർന്ന താപനില (ഡിഗ്രി സെൽഷ്യസിൽ) തന്നിരിക്കുന്നു. ആവൃത്തിപ്പട്ടിക ഉണ്ടാക്കുക.

41	23	32	40	25	30	38	47	40	39
26	31	37	32	36	41	30	25	27	30
29	40	38	36	43	37	28	27	32	36
38	36	33	32	28	27	23	26	28	31

2) ശാരീരികക്ഷമതാ പരിശോധനയിൽ പങ്കെടുത്ത 45 ആളുകളുടെ ഉയരം സെന്റി മീറ്ററിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. ആവൃത്തിപ്പട്ടിക ഉണ്ടാക്കുക.

160	145	168	156	168.4	170	163	177	143	175	169	154
163	176	160.3	164	150	168	166	148	154	159	164.5	
165	155	148.2	158	174	169	168	165	170	141	172.7	
179	167	171	159	167	171	165	171	167	162	171	

ഉയരം	അടയാളം	എണ്ണം
140 - 145		
145 - 150		
....		
....		
....		
....		

പുതിയൊരു ചിത്രം

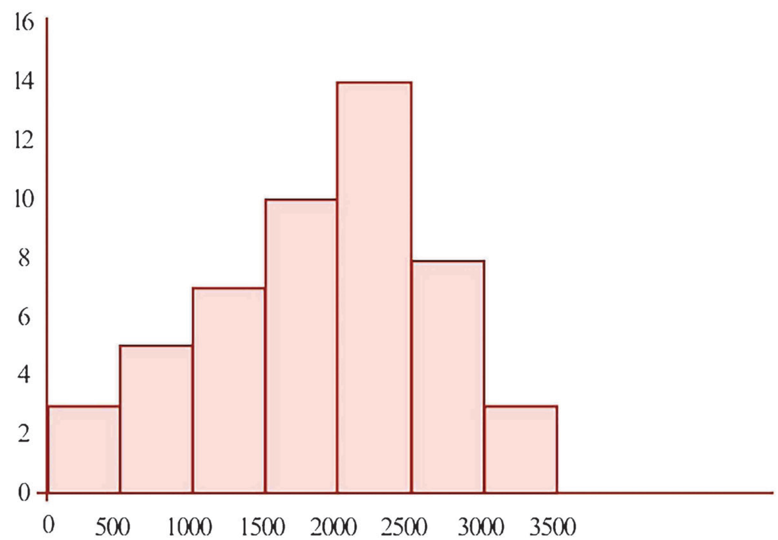
സംഖ്യാപരമായ വിവരങ്ങളെ ചതുരചിത്രങ്ങളായും വൃത്തചിത്രങ്ങളായും അവതരിപ്പിക്കാൻ അറിയാമല്ലോ.

ഇനി ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിലെ വിവരങ്ങളെ ചിത്രമാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

50 കുടുംബങ്ങൾ ഒരു ദിവസം ഉപയോഗിക്കുന്ന വെള്ളത്തിന്റെ അളവാണ് ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിൽ:

വെള്ളത്തിന്റെ അളവ് (ലിറ്ററിൽ)	കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം
0 - 500	3
500 - 1000	5
1000 - 1500	7
1500 - 2000	10
2000 - 2500	14
2500 - 3000	8
3000 - 3500	3
ആകെ	**50**

പട്ടികയിലെ വിവരങ്ങളെ ചിത്രീകരിച്ചത് നോക്കൂ.



വിഭാഗങ്ങളെ വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിലും ആവൃത്തിയെ കുത്തനെയുള്ള വരയിലുമാണ് അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നത്. ചതുരത്തിന്റെ വീതി ഓരോ വിഭാഗത്തിന്റെ വലിപ്പത്തെയും ഉയരം ആവൃത്തിയെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇത്തരത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന ചിത്രമാണ് ആവൃത്തി ചതുരം (histogram).

1) ഒരു ദീർഘദൂര ഓട്ടമത്സരത്തിൽ ഓടിയെത്താൻ 30 കുട്ടികൾ എടുത്ത സമയം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ആവൃത്തി ചതുരം വരയ്ക്കുക.

സമയം (മിനിട്ടിൽ)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
10 - 13	3
13 - 16	5
16 - 19	12
19 - 22	8
22 - 25	2

2) ഒരു പ്രദേശത്തെ 60 കുടുംബങ്ങളുടെ ദിവസവരുമാനത്തിന്റെ പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

ദിവസ വരുമാനം (രൂപയിൽ)	കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം
800 - 850	3
850 - 900	7
900 - 950	15
950 - 1000	20
1000 - 1050	9
1050 - 1100	6

ആവൃത്തി ചതുരം വരയ്ക്കുക.

3) ജൂൺ, ജൂലൈ മാസങ്ങളിൽ ലഭിച്ച മഴയുടെ വിവരങ്ങളാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഈ വിവരങ്ങളുടെ ആവൃത്തി ചതുരം വരയ്ക്കുക.

മഴ (മി.മീ.)	ദിവസങ്ങൾ
10 - 20	4
20 - 30	6
30 - 40	9
40 - 50	15
50 - 60	10
60 - 70	8
70 - 80	5
80 - 90	3
90 - 100	1

4) 25 സ്ത്രീകളും 23 പുരുഷന്മാരും ഓട്ടമത്സരം പൂർത്തിയാക്കാനെടുത്ത സമയം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. സ്ത്രീകളെയും പുരുഷന്മാരെയും സംബന്ധിക്കുന്ന ആവൃത്തി ചതുരങ്ങൾ വെവ്വേറെ വരയ്ക്കുക.

സമയം സെക്കന്റിൽ	എണ്ണം	
	സ്ത്രീകൾ	പുരുഷന്മാർ
30 - 40	2	3
40 - 50	6	7
50 - 60	8	5
60 - 70	5	5
70 - 80	4	3

5) ഒരു ക്ലാസിലെ 45 കുട്ടികളുടെ ഭാരം കിലോഗ്രാമിൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

41	31	48	34	75	39	45	41	55
52	40	57	43	61	47	64	56	47
41	59	46	67	45	64	48	52	58
53	64	59	43	50	62	54	68	59
69	57	57	53	52	56	61	55	69

ആവൃത്തിപ്പട്ടിക തയ്യാറാക്കി ആവൃത്തി ചതുരം വരയ്ക്കുക.

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ഭാഗം IV ക

മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ

51 ക. മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ - താഴെപ്പറയുന്നവ ഭാരതത്തിലെ ഓരോ പൗരന്റെയും കർത്തവ്യം ആയിരിക്കുന്നതാണ് :

(ക) ഭരണഘടനയെ അനുസരിക്കുകയും അതിന്റെ ആദർശങ്ങളെയും സ്ഥാപനങ്ങളെയും ദേശീയപതാകയെയും ദേശീയഗാനത്തെയും ആദരിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഖ) സ്വാതന്ത്ര്യത്തിനുവേണ്ടിയുള്ള നമ്മുടെ ദേശീയസമരത്തിന് പ്രചോദനം നൽകിയ മഹനീയാദർശങ്ങളെ പരിപോഷിപ്പിക്കുകയും പിൻതുടരുകയും ചെയ്യുക;

(ഗ) ഭാരതത്തിന്റെ പരമാധികാരവും ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും നിലനിർത്തുകയും സംരക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഘ) രാജ്യത്തെ കാത്തുസൂക്ഷിക്കുകയും ദേശീയസേവനം അനുഷ്ഠിക്കുവാൻ ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ അനുഷ്ഠിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ങ) മതപരവും ഭാഷാപരവും പ്രാദേശികവും വിഭാഗീയവുമായ വൈവിധ്യങ്ങൾക്കതീതമായി ഭാരതത്തിലെ എല്ലാ ജനങ്ങൾക്കുമിടയിൽ, സൗഹാർദവും പൊതുവായ സാഹോദര്യമനോഭാവവും പുലർത്തുക, സ്ത്രീകളുടെ അന്തസ്സിന് കുറവു വരുത്തുന്ന ആചാരങ്ങൾ പരിത്യജിക്കുക;

(ച) നമ്മുടെ സമ്മിശ്രസംസ്കാരത്തിന്റെ സമ്പന്നമായ പാരമ്പര്യത്തെ വിലമതിക്കുകയും നിലനിറുത്തുകയും ചെയ്യുക;

(ഛ) വനങ്ങളും തടാകങ്ങളും നദികളും വന്യജീവികളും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രകൃത്യാ ഉള്ള പരിസ്ഥിതി സംരക്ഷിക്കുകയും അഭിവൃദ്ധിപ്പെടുത്തുകയും, ജീവികളോട് കാരുണ്യം കാണിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ജ) ശാസ്ത്രീയമായ കാഴ്ചപ്പാടും മാനവികതയും, അന്വേഷണത്തിനും പരിഷ്കരണത്തിനും ഉള്ള മനോഭാവവും വികസിപ്പിക്കുക;

(ഝ) പൊതുസ്വത്ത് പരിരക്ഷിക്കുകയും ശപഥം ചെയ്ത് അക്രമം ഉപേക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഞ) രാഷ്ട്രം യത്നത്തിന്റെയും ലക്ഷ്യപ്രാപ്തിയുടെയും ഉന്നതതലങ്ങളിലേക്ക് നിരന്തരം ഉയരത്തക്കവണ്ണം വ്യക്തിപരവും കൂട്ടായതുമായ പ്രവർത്തനത്തിന്റെ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും ഉൽക്കൃഷ്ടതയ്ക്കുവേണ്ടി അധ്വാനിക്കുക;

(ട) ആറിനും പതിനാലിനും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ള തന്റെ കുട്ടിക്കോ തന്റെ സംരക്ഷണയിലുള്ള കുട്ടികൾക്കോ, അതതു സംഗതി പോലെ, മാതാപിതാക്കളോ രക്ഷാകർത്താവോ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനുള്ള അവസരങ്ങൾ ഏർപ്പെടുത്തുക.

കുട്ടികളുടെ അവകാശങ്ങൾ

പ്രിയമുള്ള കുട്ടികളേ,

നിങ്ങൾക്കുള്ള അവകാശങ്ങളെന്തെല്ലാമെന്ന് അറിയേണ്ടതില്ലേ? അവകാശങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള അറിവ് നിങ്ങളുടെ പങ്കാളിത്തം, സംരക്ഷണം, സാമൂഹികനീതി എന്നിവ ഉറപ്പാക്കാൻ പ്രേരണയും പ്രചോദനവും നൽകും. നിങ്ങളുടെ അവകാശങ്ങൾ സംരക്ഷിക്കാൻ ഇപ്പോൾ ഒരു കമ്മീഷൻ പ്രവർത്തിക്കുന്നുണ്ട്. കേരള സംസ്ഥാന ബാലാവകാശസംരക്ഷണ കമ്മീഷൻ എന്നാണ് അതിന്റെ പേര്. എന്തെല്ലാമാണ് നിങ്ങൾക്കുള്ള അവകാശങ്ങൾ എന്നു നോക്കാം.

- സംസാരത്തിനും ആശയപ്രകടനത്തിനുമുള്ള സ്വാതന്ത്ര്യം
- ജീവന്റെയും വ്യക്തിസ്വാതന്ത്ര്യത്തിന്റെയും സംരക്ഷണം
- അതിജീവനത്തിനും പൂർണ്ണവികാസത്തിനുമുള്ള അവകാശം
- ജാതി-മത-വർഗ-വർണ്ണ ചിന്തകൾക്കതീതമായി ബഹുമാനിക്കപ്പെടാനും അംഗീകരിക്കപ്പെടാനുമുള്ള അവകാശം
- മാനസികവും ശാരീരികവും ലൈംഗികവുമായ പീഡനങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള സംരക്ഷണത്തിനും പരിചരണത്തിനുമുള്ള അവകാശം
- പങ്കാളിത്തത്തിനുള്ള അവകാശം
- ബാലവേലയിൽനിന്നും ആപൽക്കരമായ ജോലികളിൽനിന്നുമുള്ള മോചനം
- ശൈശവവിവാഹത്തിൽനിന്നുള്ള സംരക്ഷണം
- സ്വന്തം സംസ്കാരം അറിയുന്നതിനും അതനുസരിച്ച് ജീവിക്കുന്നതിനുമുള്ള സ്വാതന്ത്ര്യം
- അവഗണനകളിൽനിന്നുള്ള സംരക്ഷണം
- സൗജന്യവും നിർബന്ധിതവുമായ വിദ്യാഭ്യാസ അവകാശം
- കളിക്കാനും പഠിക്കാനുമുള്ള അവകാശം
- സ്നേഹവും സുരക്ഷയും നൽകുന്ന കുടുംബവും സമൂഹവും ലഭ്യമാകാനുള്ള അവകാശം

നിങ്ങളുടെ ചില ഉത്തരവാദിത്വങ്ങൾ

- സ്കൂൾ, പൊതുസംവിധാനങ്ങൾ എന്നിവ നശിപ്പിക്കാതെ സംരക്ഷിക്കുക.
- സ്കൂളിലും പഠനപ്രവർത്തനങ്ങളിലും കൃത്യനിഷ്ഠ പാലിക്കുക.
- സ്കൂൾ അധികാരികളെയും അധ്യാപകരെയും മാതാപിതാക്കളെയും സഹപാഠികളെയും ബഹുമാനിക്കുകയും അംഗീകരിക്കുകയും ചെയ്യുക.
- ജാതി-മത-വർഗ-വർണ്ണ ചിന്തകൾക്കതീതമായി മറ്റുള്ളവരെ ബഹുമാനിക്കാനും അംഗീകരിക്കാനും സന്നദ്ധരാവുക.

ബന്ധപ്പെടേണ്ട വിലാസം:

കേരള സംസ്ഥാന ബാലാവകാശസംരക്ഷണ കമ്മീഷൻ

ശ്രീ ഗണേഷ്, റ്റി.സി. 14/2036, വാൻറോസ് ജംങ്ഷൻ,
കേരള യൂണിവേഴ്സിറ്റി പി.ഒ, തിരുവനന്തപുരം – 34
ഫോൺ 0471 – 2326603
ഇ- മെയിൽ childrights.cpcr@kerala.gov.in, rte.cpcr@kerala.gov.in
വെബ്സൈറ്റ് : www.kescpcr.kerala.gov.in

ചൈൽഡ് ഹെൽപ്പ് ലൈൻ - 1098, ക്രൈം സ്റ്റോപ്പർ - 1090, നിർഭയ – 1800 425 1400
കേരള പൊലീസ് ഹെൽപ്പ് ലൈൻ - 0471 – 3243000/44000/45000

online ***R.T.E Monitoring : www.nireekshana.org.in***