ഗണിതം

ഭാഗം - 1

സ്റ്റാൻഡേർഡ്
VIII

കേരളസർക്കാർ
പൊതുവിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

തയ്യാറാക്കിയത്
സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT), കേരളം

2025

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു. സമ്പൂർണ്ണവും വൈവിധ്യ പൂർണ്ണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

ഗണിതം

8

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in
e-mail : scertkerala@gmail.com, Phone : 0471 - 2341883
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2025
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of General Education, Government of Kerala

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

പലതരം അളവുകളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ഭിന്നസംഖ്യകളും ഉപയോഗിക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്ന് മുൻക്ലാസുകളിൽ കണ്ടു. അളവുകളുടെ ക്രിയകൾ കേവല സംഖ്യകളുടെ ക്രിയകളായി മാറ്റുന്നതും അവയെക്കുറിച്ചുള്ള പൊതുതത്വങ്ങൾ ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ എഴുതുന്നതും പരിചയപ്പെട്ടു. ചതുരം, ത്രികോണം, വൃത്തം എന്നിങ്ങനെയുള്ള ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ പല സവിശേഷതകൾ തിരിച്ചറിയുകയും ചെയ്തു.

ഇത്തരം പഠനങ്ങളുടെ തുടർച്ചയാണ് ഈ പാഠപുസ്തകം. അളവുകളെയും അവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളെയും സംബന്ധിക്കുന്ന ചില പ്രശ്നങ്ങൾ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പരിഹരിക്കുന്ന രീതി ഇവിടെ തുടങ്ങുന്നു. ഭൗതികപ്രശ്നങ്ങളെ ഗണിതപ്രശ്നങ്ങളാക്കി, ബീജഗണിതമാർഗങ്ങളിലൂടെ ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക എന്ന രീതി മിക്കവാറും എല്ലാ ശാസ്ത്രങ്ങളിലും ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നുണ്ട്. അതുകൊണ്ടുതന്നെ, ഗണിതപഠനത്തിന്റെ എല്ലാ ഘട്ടങ്ങളിലും ഇതിന് വലിയ പ്രാധാന്യമുണ്ട്.

ഏഴാം ക്ലാസിൽ പല അളവുകളിൽ ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച അനുഭവം, ഇവിടെ ത്രികോണങ്ങളുടെ തുല്യത എന്ന ആശയമായി വികസിക്കുന്നു. തുടർന്നുള്ള പഠനത്തിൽ ഇത് ത്രികോണമിതി എന്ന ഗണിതശാഖയായി വളരുന്നു. അതാകട്ടെ, നേരിട്ടളക്കാൻ കഴിയാത്ത അകലങ്ങളും ഉയരങ്ങളും കണക്കാക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു.

ഗണിതപ്രയോഗങ്ങളുടെ വ്യാപ്തിയും, ഗണിതയുക്തിയുടെ ഭംഗിയും കൂടുതൽ മനസിലാക്കാൻ ഈ പാഠപുസ്തകം സഹായിക്കും എന്നാണ് പ്രതീക്ഷ.

സ്നേഹാശംസകളോടെ,

ഡോ. ജയപ്രകാശ് ആർ.കെ.
ഡയറക്ടർ
എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി., കേരളം

പാഠപുസ്തകരചനാസമിതി

അഡ്വൈസർ

ഡോ. ഇ. കൃഷ്ണൻ,
ഗണിതവിഭാഗം മേധാവി (റിട്ട.),
യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്, തിരുവനന്തപുരം

ചെയർപേഴ്സൺ

ഡോ. ഷിഖി എം.
പ്രൊഫസർ,
കോളേജ് ഓഫ് എഞ്ചിനിയറിംഗ് ട്രിവാൻഡ്രം,
തിരുവനന്തപുരം

വിദഗ്ധർ

ഡോ. പി. രമേശ് കുമാർ
ഗണിതവിഭാഗം മേധാവി (റിട്ട.),
യൂണിവേഴ്സിറ്റി ഓഫ് കേരള,
കാര്യവട്ടം, തിരുവനന്തപുരം

ഡോ. സുകേഷ് എ.
അസോസിയേറ്റ് പ്രൊഫസർ,
ഗവൺമെന്റ് കോളേജ് ഓഫ് എഞ്ചിനിയറിംഗ്,
കണ്ണൂർ

അംഗങ്ങൾ

ആർ. രാമാനുജം
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
എം.എൻ.കെ.എം.
ഗവ: ഹയർസെക്കന്ററി സ്കൂൾ
പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്

വിജയകുമാരൻ ടി. കെ.
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (റിട്ട.),
ജി.എം.ആർ.എച്ച്.എസ്.എസ്.
ഫോർ ഗേൾസ്, പരവനടുക്കം,
കാസറഗോഡ്

സി. ടി. ഫിറോസ് ബാബു
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.ജി.വി.എച്ച്.എസ്.എസ്.
വണ്ടൂർ, മലപ്പുറം

ഉണ്ണികൃഷ്ണൻ എം. വി.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. കടന്നപ്പള്ളി
പി.ഒ കടന്നപ്പള്ളി കണ്ണൂർ

നന്ദകുമാർ സി.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ചോതാവൂർ ഹയർ
സെക്കൻഡറി സ്കൂൾ
ചമ്പാട്, കണ്ണൂർ

ശ്രീജിത്ത് മുറിയമ്പത്ത്
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. മടപ്പള്ളി,
വടകര, കോഴിക്കോട്

പത്മപ്രസാദ് കെ.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
പന്തല്ലൂർ എച്ച്.എസ്.എസ്.,
കടമ്പോട് പോസ്റ്റ്, മലപ്പുറം

ഉബൈദുള്ള കെ.സി.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം
എസ്.ഒ.എച്ച്.എസ്.,
അരീക്കോട്, മലപ്പുറം

ഫിറോസ മൊയ്തു
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
കാലിക്കറ്റ് ഗേൾസ് വി.എച്ച്.എസ്.എസ്.,
കുണ്ടുങ്ങൽ, കല്ലായി, കോഴിക്കോട്

പ്രിയ രാജ്
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
എം. ജി. ഡി. ഹൈസ്കൂൾ
പുതുശ്ശേരി,
പുതുശ്ശേരി സൗത്ത് പി.ഒ,
പത്തനംതിട്ട

ആയിഷകുട്ടി കെ.കെ
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.എച്ച്.എസ്. ബീനാച്ചി,
സുൽത്താൻബത്തേരി, വയനാട്

രാജേഷ് എം.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം
കല്ലടി എച്ച്.എസ്.എസ്
കുമരംപുത്തൂർ, മണ്ണാർക്കാട്,
പാലക്കാട്

ഉല്ലാസ് യു.ജി., (ആർട്ടിസ്റ്റ്)
എച്ച്.എസ്.ടി. ഫിസിക്കൽ സയൻസ്, സി.ബി.എച്ച്.എസ്.എസ്. വള്ളിക്കുന്ന്, മലപ്പുറം

അക്കാദമിക് കോഡിനേറ്റർ

ഡോ. അനിൽകുമാർ എ.കെ.
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT)
വിദ്യാഭവൻ, പൂജപ്പുര, തിരുവനന്തപുരം 695 012

ഉള്ളടക്കം

1	വർഗങ്ങൾ	7
2	തുല്യത്രികോണങ്ങൾ	15
3	വർഗസമവാക്യങ്ങൾ	37
4	ബഹുഭുജങ്ങൾ	61
5	സമവാക്യപരിഹാരം	79
6	പുതിയ സംഖ്യകൾ	93
7	സമഭാജികൾ	101

ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി
ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു

കണക്കു ചെയ്തുനോക്കാം

ഗവേഷണം

ഐ.സി.റ്റി. സാധ്യത

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ആമുഖം

ഭാരതത്തിലെ ജനങ്ങളായ നാം ഭാരതത്തെ ഒരു [1]**[പരമാധികാര സ്ഥിതിസമത്വ മതേതര ജനാധിപത്യ റിപ്പബ്ലിക്കായി]** സംവിധാനം ചെയ്യുവാനും അതിലെ പൗരന്മാർക്കെല്ലാം:

സാമൂഹ്യവും സാമ്പത്തികവും രാഷ്ട്രീയവും ആയ **നീതിയും;**

ചിന്തയ്ക്കും ആശയപ്രകടനത്തിനും വിശ്വാസത്തിനും മതനിഷ്ഠയ്ക്കും ആരാധനയ്ക്കും ഉള്ള **സ്വാതന്ത്ര്യവും;**

പദവിയിലും അവസരത്തിലും **സമത്വവും;** സംപ്രാപ്തമാക്കുവാനും;

അവർക്കെല്ലാമിടയിൽ

വ്യക്തിയുടെ അന്തസ്സും [2][രാഷ്ട്രത്തിന്റെ ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും] ഉറപ്പുവരുത്തിക്കൊണ്ട് **സാഹോദര്യം** പുലർത്തുവാനും;

സഗൗരവം തീരുമാനിച്ചിരിക്കയാൽ;

നമ്മുടെ ഭരണഘടനാനിർമ്മാണസഭയിൽ ഈ 1949 നവംബർ ഇരുപത്താറാം ദിവസം **ഇതിനാൽ ഈ ഭരണഘടനയെ സ്വീകരിക്കുകയും നിയമമാക്കുകയും നമുക്കു തന്നെ പ്രദാനം ചെയ്യുകയും ചെയ്യുന്നു.**

---

1. 1976 - ലെ ഭരണഘടന (നാല്പത്തിരണ്ടാം ഭേദഗതി) ആക്റ്റ് 2-ാം വകുപ്പു പ്രകാരം "പരമാധികാര ജനാധിപത്യ റിപ്പബ്ലിക്" എന്നതിന് പകരം ചേർത്തത് (3.1.1977 മുതൽ പ്രാബല്യം).
2. മേല്പറഞ്ഞ ആക്റ്റ് 2-ാം വകുപ്പു പ്രകാരം "രാഷ്ട്രത്തിന്റെ ഐക്യം" എന്നതിനു പകരം ചേർത്തത് (3.1.1977 മുതൽ പ്രാബല്യം).

1

വർഗങ്ങൾ

പൂർണ്ണവർഗങ്ങൾ

ഈ സംഖ്യാക്രമം നോക്കൂ:

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

എന്താണ് ഈ സംഖ്യകളുടെ സവിശേഷത ?

ഇത്തരം സംഖ്യകൾ അഞ്ചാം ക്ലാസിൽ പരിചയപ്പെട്ടത് ഓർമ്മയുണ്ടോ ? (**ഗുണനരീതികൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമചതുരസംഖ്യകൾ** എന്ന ഭാഗം).

$1 = 1 \times 1$ $\quad$ $4 = 2 \times 2$ $\quad$ $9 = 3 \times 3$ $\quad$ $16 = 4 \times 4$

ഇവയെ മറ്റൊരുരീതിയിൽ എഴുതാമെന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ (**ആവർത്തനഗുണനം** എന്ന പാഠം).

$$1 = 1^2$$
$$4 = 2^2$$
$$9 = 3^2$$
$$16 = 4^2$$
$$25 = 5^2$$

....

ഇവയെ 1 ന്റെ വർഗം, 2 ന്റെ വർഗം, 3 ന്റെ വർഗം, എന്നിങ്ങനെയാണ് പറയുന്നതെന്നും കണ്ടു (ഏഴാം ക്ലാസിലെ **സമചതുരങ്ങളും മട്ടത്രികോണങ്ങളും** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമചതുര പ്പരപ്പ്** എന്ന ഭാഗം). ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയെ അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്നതിനെയും വർഗം എന്നുതന്നെയാണ് പറയുന്നത്. ഉദാഹരണമായി,

$$\frac{1}{2} \text{ ന്റെ വർഗം} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

1, 2, 3, ... എന്നീ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളായ 1, 4, 9, ... എന്നീ സംഖ്യകളെ **പൂർണ്ണ വർഗങ്ങൾ (Perfect squares)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

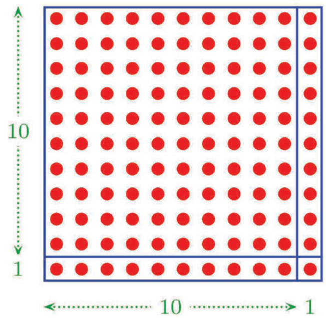
അപ്പോൾ തുടക്കത്തിൽ പറഞ്ഞ സംഖ്യകൾ ആദ്യത്തെ നാലു പൂർണ്ണവർഗങ്ങളാണ്.

10 ന്റെ വർഗം കണക്കാക്കാൻ വിഷമമില്ല:

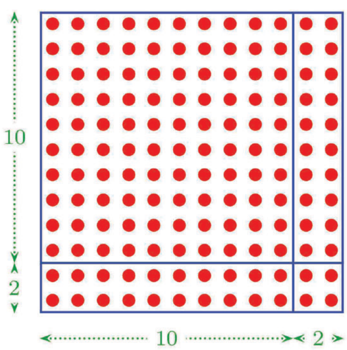
$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

തുടർന്നുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളോ ?

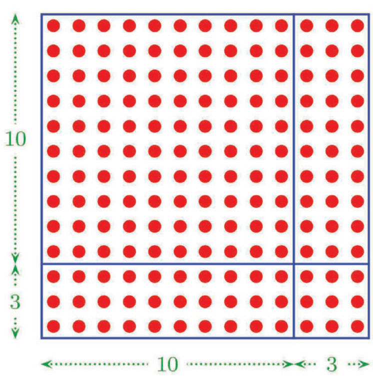
അഞ്ചാം ക്ലാസിൽ രണ്ടക്കസംഖ്യകൾ ഗുണിച്ചത് എങ്ങനെയാണ് ? (**ഗുണനരീതികൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ചതുരഗുണനം** എന്ന ഭാഗം).



	10	1	
10	100	10	110
1	10	1	11
			121



	10	2	
10	100	20	120
2	20	4	24
			144



	10	3	
10	100	30	130
3	30	9	39
			169

ഇവയിലെല്ലാം കളങ്ങളിലെ സംഖ്യകൾ വിലങ്ങനെയും കുത്തനെയും കൂട്ടുന്നതിനു പകരം, കോണോടുകോൺ ആയാലോ ?

	10	1
10	100	10
1	10	1

	10	2
10	100	20
2	20	4

	10	3
10	100	30
3	30	9

ഈ കൂട്ടലുകൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$11 \times 11 = 100 + (10 + 10) + 1$$

$$12 \times 12 = 100 + (20 + 20) + 4$$

$$13 \times 13 = 100 + (30 + 30) + 9$$

ഇത് ഇങ്ങനെയും എഴുതാമല്ലോ;

$$11^2 = 10^2 + (10 \times 2) + 1^2$$

$$12^2 = 10^2 + (20 \times 2) + 2^2$$

$$13^2 = 10^2 + (30 \times 2) + 3^2$$

ഇനി ഇതുപോലെ 14 ന്റെയും 15 ന്റെയും വർഗം (കളങ്ങൾ വരയ്ക്കാതെ തന്നെ) കണക്കാക്കി ക്കൂടേ ?

$$\begin{aligned} 14^2 &= 10^2 + (40 \times 2) + 4^2 \\ &= 100 + 80 + 16 \\ &= 196 \\ 15^2 &= 10^2 + (50 \times 2) + 5^2 \\ &= 100 + 100 + 25 \\ &= 225 \end{aligned}$$

16, 17, 18, 19 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളും ഇതുപോലെ കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

തുടർന്ന് 20 ന്റെ വർഗം കണക്കാക്കാൻ വിഷമമില്ല:

$$\begin{aligned} 20^2 &= 20 \times 20 \\ &= (2 \times 10) \times (2 \times 10) \\ &= 2 \times 2 \times 10 \times 10 \\ &= 400 \end{aligned}$$

21, 22, 23 എന്നിവയുടെ വർഗങ്ങൾ, നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, ആദ്യം കളം വരച്ച് ചെയ്തു നോക്കാം:

	20	1
20	400	20
1	20	1

	20	2
20	400	40
2	40	4

	20	3
20	400	60
3	60	9

കൂട്ടലുകൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$21 \times 21 = 400 + (20 + 20) + 1 = 441$$

$$22 \times 22 = 400 + (40 + 40) + 4 = 484$$

$$23 \times 23 = 400 + (60 + 60) + 9 = 529$$

ഇത് ഇങ്ങനെയും എഴുതാമല്ലോ;

$$21^2 = 20^2 + (20 \times 2) + 1^2$$

$$22^2 = 20^2 + (40 \times 2) + 2^2$$

$$23^2 = 20^2 + (60 \times 2) + 3^2$$

ഇതിൽ 20, 40, 60 എന്നീ സംഖ്യകൾ കിട്ടിയത് എങ്ങനെയാണ് ?

$$21^2 = 20^2 + (20 \times 1 \times 2) + 1^2$$

$$22^2 = 20^2 + (20 \times 2 \times 2) + 2^2$$

$$23^2 = 20^2 + (20 \times 3 \times 2) + 3^2$$

ഇനി ഈ രീതിയിൽ 24 ന്റെ വർഗവും കണക്കാക്കാമല്ലോ;

$$24^2 = 20^2 + (20 \times 4 \times 2) + 4^2$$

$$= 400 + 160 + 16$$

$$= 576$$

ഇതുപോലെ 36 ന്റെ വർഗം കണക്കാക്കാമോ ?

	30	6
30	900	180
6	180	36

$$36^2 = 30^2 + (30 \times 6 \times 2) + 6^2$$

$$= 900 + 360 + 36$$

$$= 1296$$

ഏതു രണ്ടക്ക സംഖ്യയുടെയും വർഗം, കളം വരയ്ക്കാതെ തന്നെ, ഇതുപോലെ കണക്കാക്കാമല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി, 79^2 നോക്കാം:

$$79^2 = 70^2 + (70 \times 9 \times 2) + 9^2$$
$$= 4900 + 1260 + 81$$
$$= 6241$$

ചുവടെപ്പറയുന്ന വർഗങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

(i) 64^2 (ii) 35^2 (iii) 47^2 (iv) 53^2 (v) 88^2

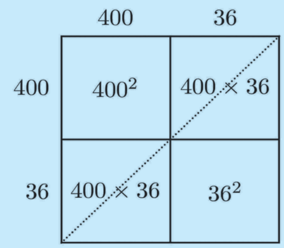
മൂന്നക്കസംഖ്യകൾ

436^2 കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

ആദ്യം 36^2 കണക്കാക്കുക:

$$36^2 = 30^2 + (30 \times 6 \times 2) + 6^2$$
$$= 900 + 360 + 36$$
$$= 1296$$

ഇനി 436^2 കളം വരച്ചു കണക്കാക്കാമല്ലോ



അപ്പോൾ

$$436^2 = 400^2 + (400 \times 36 \times 2) + 36^2$$
$$= 160000 + 28800 + 1296$$
$$= 190096$$

ദശാംശവർഗങ്ങൾ

ഈ കണക്കുനോക്കൂ:

വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 3.7 മീറ്ററായ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

ഇവിടെ കണക്കാക്കേണ്ടത്, 3.7×3.7 ആണല്ലോ.

ഇത്തരം ഗുണനങ്ങൾ ഏഴാം ക്ലാസിൽ ചെയ്തത് ഓർമ്മയില്ലേ ? (**ദശാംശരീതികൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ദശാംശഗുണനം** എന്ന ഭാഗം).

$$3.7^2 = \frac{37}{10} \times \frac{37}{10} = \frac{37^2}{100}$$

ഇനി നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ 37^2 കണക്കാക്കാം:

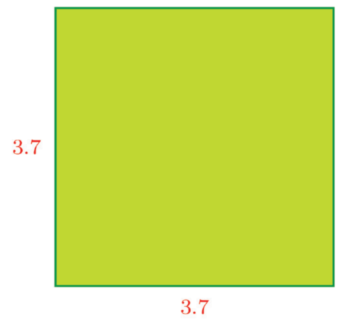
$$37^2 = 30^2 + (30 \times 7 \times 2) + 7^2$$
$$= 900 + 420 + 49$$
$$= 1369$$

അപ്പോൾ

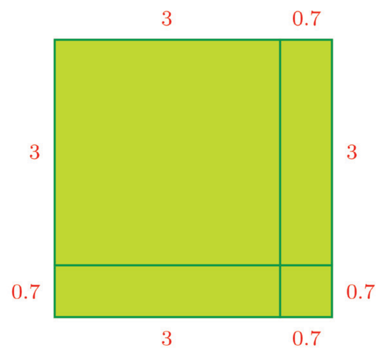
$$3.7^2 = \frac{37^2}{100} = \frac{1369}{100} = 13.69$$

സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 13.69 ചതുരശ്രമീറ്റർ.

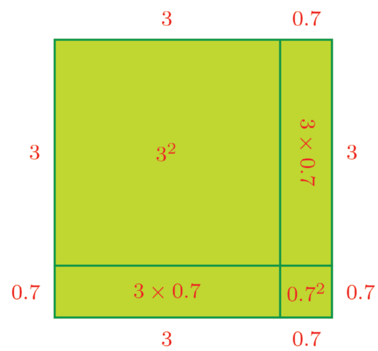
ഭിന്നരൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റാതെ തന്നെ ഇതു ചെയ്യാം. അതിന് ആദ്യം ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാം:



വശങ്ങളെയെല്ലാം 3 മീറ്ററും, 0.7 മീറ്ററും ആയി മുറിച്ചാലോ ?



സമചതുരത്തിന്റെ നാലു ഭാഗത്തിന്റേയും പരപ്പളവ് വെവ്വേറെ കണക്കാക്കാം:



ഇവയെല്ലാം കൂട്ടിയാൽ മൊത്തം പരപ്പളവ് കിട്ടുമല്ലോ:

$$3.7^2 = 9 + (3 \times 0.7 \times 2) + (0.7 \times 0.7)$$

$$= 9 + 4.2 + 0.49$$

$$= 13.69$$ ചതുരശ്രമീറ്റർ.

അപ്പോൾ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗം കളം വരച്ചു കണക്കാക്കിയതുപോലെ ഈ വർഗവും കണക്കാക്കാം:

	3	0.7
3	9	3×0.7
0.7	3×0.7	0.7×0.7

$$
\begin{aligned}
3.7^2 &= 3^2 + (3 \times 0.7 \times 2) + (0.7)^2 \\
&= 9 + 4.2 + 0.49 \\
&= 13.69
\end{aligned}
$$

ചിത്രം വരയ്ക്കാതെ, കളങ്ങൾ മാത്രം വരച്ച് 5.8^2 കണക്കാക്കാമല്ലോ:

	5	0.8
5	25	5×0.8
0.8	5×0.8	0.8×0.8

$$
\begin{aligned}
5.8^2 &= 5^2 + (5 \times 0.8 \times 2) + (0.8)^2 \\
&= 25 + 8 + 0.64 \\
&= 33.64
\end{aligned}
$$

ഇനി കളങ്ങൾ വരയ്ക്കാതെ ഇതുപോലെയുള്ള വർഗങ്ങൾ കണക്കാക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, 13.9^2 കണക്കാക്കാം.

ആദ്യം നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ 13^2 ഇങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാം:

$$
\begin{aligned}
13^3 &= 10^2 + (10 \times 3 \times 2) + 3^2 \\
&= 100 + 60 + 9 \\
&= 169
\end{aligned}
$$

ഇനി ഇപ്പോൾ ചെയ്തതുപോലെ 13.9^2 കണ്ടുപിടിക്കാം:

$$
\begin{aligned}
13.9^2 &= 13^2 + (13 \times 0.9 \times 2) + (0.9)^2 \\
&= 169 + 23.4 + 0.81 \\
&= 193.21
\end{aligned}
$$

(1) ചുവടെപ്പറയുന്ന സംഖ്യകളുടെ വർഗം കണക്കാക്കുക.

(i) 2.3 (ii) 8.7 (iii) 10.1 (iv) 12.5 (v) 15.7

(1) ഈ കണക്കുകൾ നോക്കുക:

1.5^2	2.5^2	3.5^2
$= 1^2 + (1 \times 0.5 \times 2) + (0.5)^2$	$= 2^2 + (2 \times 0.5 \times 2) + (0.5)^2$	$= 3^2 + (3 \times 0.5 \times 2) + (0.5)^2$
$= 1 + 1 + 0.25$	$= 4 + 2 + 0.25$	$= 9 + 3 + 0.25$
$= 2.25$	$= 6.25$	$= 12.25$

4.5^2 കണക്കാക്കാമോ ?

ദശാംശഭാഗം 0.5 ആയ കൂടുതൽ സംഖ്യകൾ എടുത്ത് അവയുടെ വർഗങ്ങൾ കണക്കാക്കിനോക്കൂ. ദശാംശഭാഗം 0.5 ആയ സംഖ്യകളുടെ വർഗം കണക്കാക്കാൻ എന്തെങ്കിലും എളുപ്പവഴി കണ്ടെത്താമോ ?

(2) ഈ കണക്കുകൾ നോക്കുക:

$$1.25^2 = 1^2 + (1 \times 0.25 \times 2) + (0.25)^2 = 1 + 0.5 + 0.0625 = 1.5625$$

$$2.25^2 = 2^2 + (2 \times 0.25 \times 2) + (0.25)^2 = 4 + 1 + 0.0625 = 5.0625$$

$$3.25^2 = 3^2 + (3 \times 0.25 \times 2) + (0.25)^2 = 9 + 1.5 + 0.0625 = 10.5625$$

$$4.25^2 = 4^2 + (4 \times 0.25 \times 2) + (0.25)^2 = 16 + 2 + 0.0625 = 18.0625$$

ഇതുപോലെ, ദശാംശഭാഗം 0.25 ആയ മറ്റു ചില സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ കണക്കാക്കുക. ഇത്തരം സംഖ്യകളുടെ വർഗം കണ്ടുപിടിക്കാൻ പൊതുവായ എന്തെങ്കിലും മാർഗമുണ്ടോ ?

2

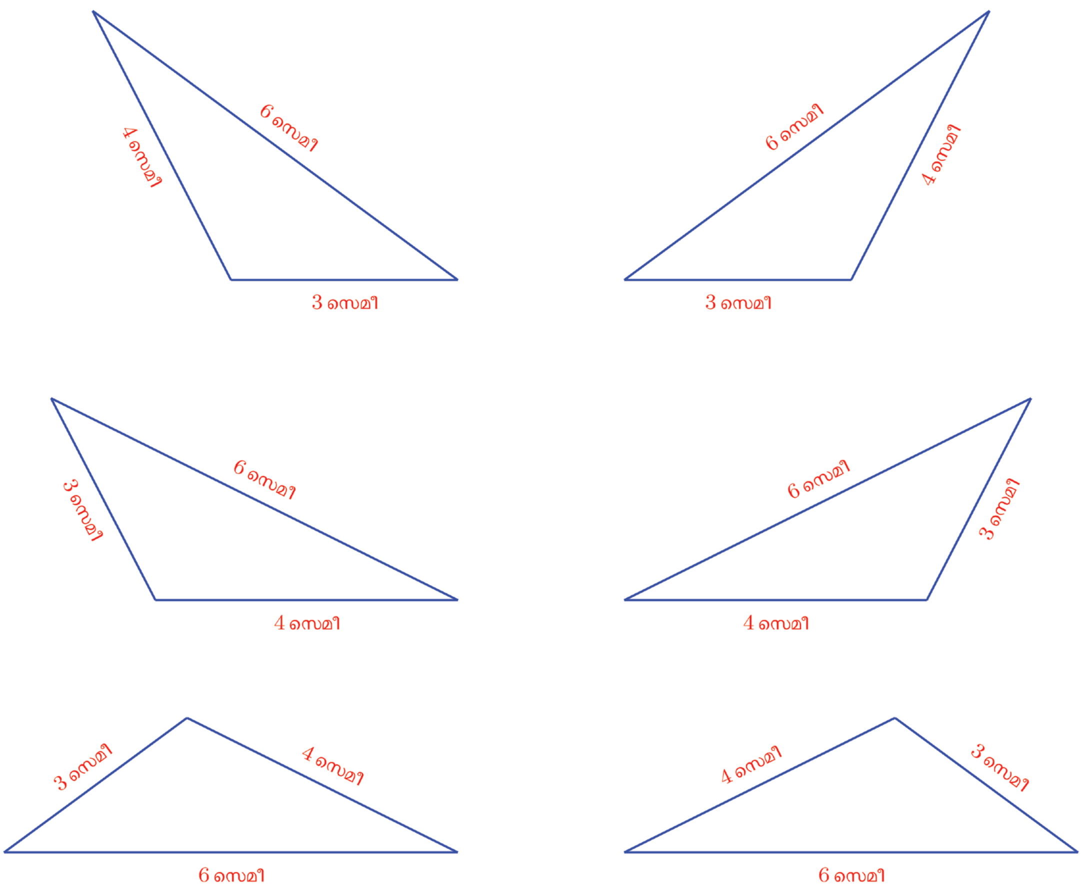
തുല്യത്രികോണങ്ങൾ

വശങ്ങളും കോണുകളും

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം പറഞ്ഞാൽ അതു വരയ്ക്കാനറിയാമല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്ററും, 4 സെന്റിമീറ്ററും, 6 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ത്രികോണം എങ്ങനെ വരയ്ക്കും ?

ഇത് പല തരത്തിൽ വരയ്ക്കാമെന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ട് (**ത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വരയും കണക്കും** എന്ന ഭാഗം).



തിരിച്ചും മറിച്ചും വച്ചു എന്നല്ലാതെ ഈ ആറു ചിത്രങ്ങളിലെ ത്രികോണങ്ങൾ തമ്മിൽ വ്യത്യാസമൊന്നും ഇല്ലെന്നും കണ്ടു.

ഇക്കാര്യം ഉറപ്പിക്കാൻ, ഇതിലെ ഒരു ത്രികോണം കട്ടിക്കടലാസിൽ വരച്ചു വെട്ടിയെടുത്ത്, ഓരോന്നിന്റെയും മുകളിൽ പലതരത്തിൽ ചേർത്തുവച്ചു നോക്കൂ.

അങ്ങനെ ചേർത്തുവയ്ക്കുമ്പോൾ, ഒരേ നീളമുള്ള വശങ്ങൾ മാത്രമല്ല, അവയ്ക്കിടയിലെ കോണുകളും ചേർന്നിരിക്കുന്നില്ലേ ?

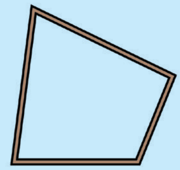
ഇതുപോലെ വേറെ മൂന്നു നീളങ്ങളെടുത്ത് പലതരത്തിൽ ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചു നോക്കൂ. അവയിലും കോണുകൾ ഒന്നുതന്നെയല്ലേ ?

അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തു പറയാം ?

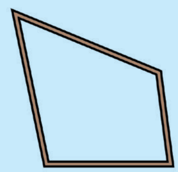
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്ക് തുല്യമാണെങ്കിൽ, അവയുടെ കോണുകളും തുല്യമാണ്

മാറുന്ന ചതുർഭുജങ്ങൾ

നാലു ഈർക്കിൽ കഷണങ്ങൾ ചേർത്തു വച്ച് ഒരു ചതുർഭുജം ഉണ്ടാക്കുക:

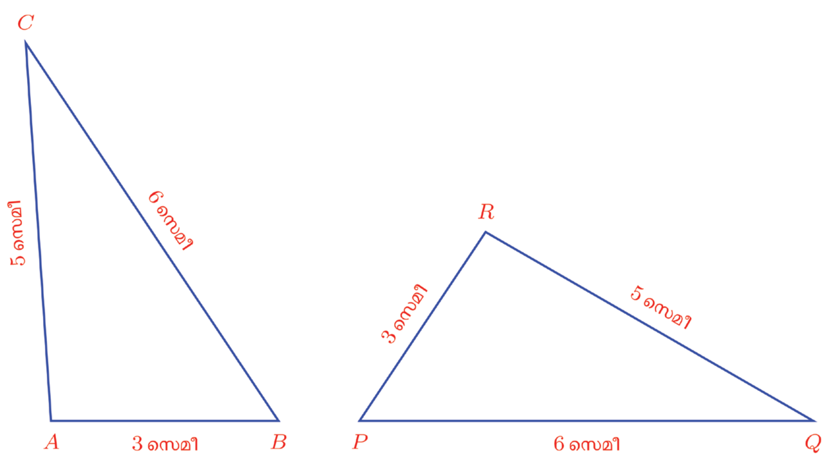


ഇനി മുകളിലെ മൂലയിലെ വശങ്ങൾ അല്പം അമർത്തി ഈ ചതുർഭുജം ഇങ്ങനെയാക്കാമല്ലോ:



ഈ രണ്ടു ചതുർഭുജങ്ങളുടെയും വശങ്ങളുടെ നീളം ഒന്നു തന്നെയാണ്; പക്ഷേ കോണുകൾ വ്യത്യസ്തമല്ലേ ?

ഈ ത്രികോണങ്ങൾ നോക്കൂ:



ത്രികോണം ABC വരച്ച് അതിന് പുറത്തായി ഒരു ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. Move around Point tool ഉപയോഗിച്ച് D യിലും ത്രികോണത്തിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് ത്രികോണത്തെ D യ്ക്കു ചുറ്റുമായി കറക്കി നോക്കൂ. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കോ കോണുകൾക്കോ മാറ്റം സംഭവിക്കുന്നുണ്ടോ ?

ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ തുല്യമായതിനാൽ കോണുകളും തുല്യമാണ്.

അതായത്, *ABC* എന്ന ത്രികോണത്തിലെ ഓരോ കോണും *PQR* എന്ന ത്രികോണത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു കോണിന് തുല്യമാണ്.

ഏതേതു കോണുകളാണ് തുല്യം എന്നെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും ?

ത്രികോണങ്ങളിലെ ഏറ്റവും വലിയ കോണുകൾ, ഏറ്റവും ചെറിയ കോണുകൾ, ഇടത്തരം കോണുകൾ എന്നിങ്ങനെയുള്ള ജോടികളാണല്ലോ തുല്യമാകുന്നത്.

ഓരോ ത്രികോണത്തിലെയും കോണുകളുടെ വലുപ്പക്രമം എങ്ങനെ അറിയും ?

കോണുകളുടെ വലുപ്പക്രമം, അവയുടെ എതിർവശങ്ങളുടെ വലുപ്പക്രമമാണെന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (**ത്രികോണം** എന്ന പാഠത്തിലെ **വരയും കണക്കും** എന്ന ഭാഗം).

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലും

- 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വശമാണ് ഏറ്റവും വലുത്
- 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വശം ഇടത്തരം
- 3 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വശം ഏറ്റവും ചെറുത്

അപ്പോൾ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലും

- ഏറ്റവും വലിയ കോൺ 6 സെന്റിമീറ്റർ വശത്തിനെതിരെ
- ഇടത്തരം കോൺ 5 സെന്റിമീറ്റർ വശത്തിനെതിരെ
- ഏറ്റവും ചെറിയ കോൺ 3 സെന്റിമീറ്റർ വശത്തിനെതിരെ

ഇനി ത്രികോണം ABC യിലെ ഏതൊക്കെ കോണുകൾ ത്രികോണം PQR ലെ ഏതൊക്കെ കോണുകളോടാണ് തുല്യം എന്നു പറയാമല്ലോ:

6 സെന്റിമീറ്റർ വശത്തിനെതിരെയുള്ള കോണുകൾ
$\angle A = \angle R$ (ഏറ്റവും വലിയ കോണുകൾ)

5 സെന്റിമീറ്റർ വശത്തിനെതിരെയുള്ള കോണുകൾ
$\angle B = \angle P$ (ഇടത്തരം കോണുകൾ)

3 സെന്റിമീറ്റർ വശത്തിനെതിരെയുള്ള കോണുകൾ
$\angle C = \angle Q$ (ഏറ്റവും ചെറിയ കോണുകൾ)

അപ്പോൾ നേരത്തെ പറഞ്ഞ കാര്യം അല്പം കൂടി വിശദമായി ഇങ്ങനെ പറയാം:

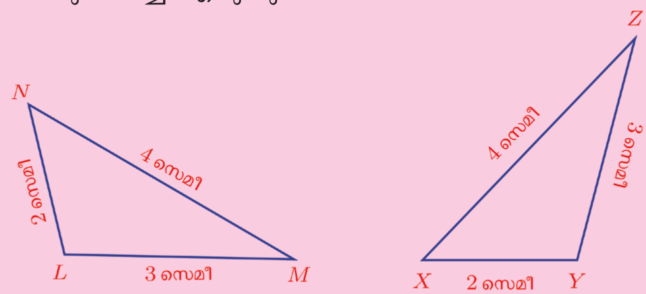
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്ക് തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഈ ത്രികോണങ്ങളിലെ തുല്യമായ വശങ്ങൾക്ക് എതിരെയുള്ള കോണുകൾ തുല്യമാണ്

ത്രികോണ ദാർഢ്യം

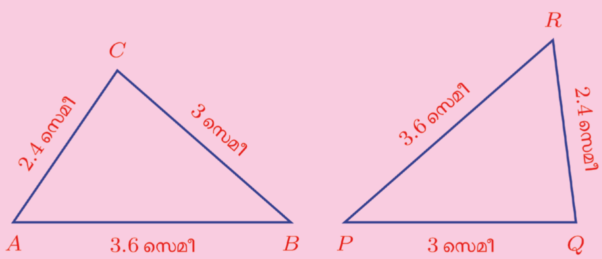
ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം മാറ്റാതെ കോണുകൾ മാറ്റാം; അതുകൊണ്ടുതന്നെ ചതുർഭുജാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ചട്ടത്തിൽ ബലം പ്രയോഗിച്ചാൽ അത് ചരിഞ്ഞുപോകാൻ സാധ്യതയുണ്ട്. എന്നാൽ ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ചട്ടത്തിൽ ഇതു സംഭവിക്കുകയില്ല; കാരണം ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം മാറ്റാതെ കോണുകൾ മാറ്റാൻ കഴിയില്ല.
ഇതുകൊണ്ടാണ് ത്രികോണാകൃതിയിൽ കമ്പികൾ ചേർത്തുവച്ച് പാലങ്ങളും ടവറുകളും നിർമ്മിക്കുന്നത്.

(1) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ജോടി ചിത്രങ്ങളിലും, ഒന്നാം ത്രികോണത്തിലെ കോണുകൾക്കു തുല്യമായ കോണുകൾ രണ്ടാം ത്രികോണത്തിൽ നിന്ന് കണ്ടുപിടിച്ച് എഴുതുക.

(i)



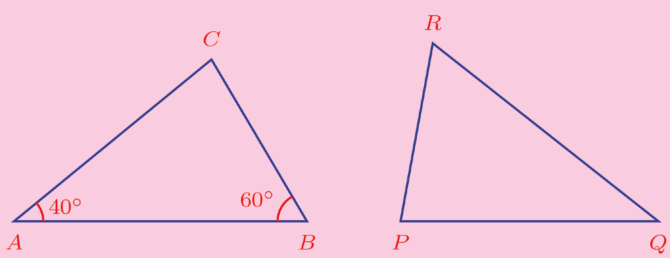
(ii)



(2) ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ

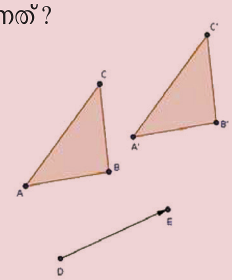
$AB = QR \qquad BC = RP \qquad CA = PQ$

എന്നിങ്ങനെയാണ്:

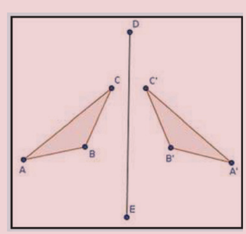


ABC എന്ന ത്രികോണത്തിലെ $\angle C$ യും PQR എന്ന ത്രികോണത്തിലെ എല്ലാ കോണുകളും കണക്കാക്കുക.

ത്രികോണം ABC വരയ്ക്കുക. D, E എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Translate by Vector tool എടുത്ത് ΔABC, D, E എന്നിവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. പുതിയ ഒരു ΔA'B'C' കിട്ടുന്നില്ലേ ? ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ് ? ΔABC യുടെ വശങ്ങളും കോണുകളും മാറ്റി നോക്കൂ. ΔA'B'C' മാറുന്നുണ്ടോ ? E യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. E എന്ന ബിന്ദു D യിൽ എത്തുമ്പോൾ എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത് ?



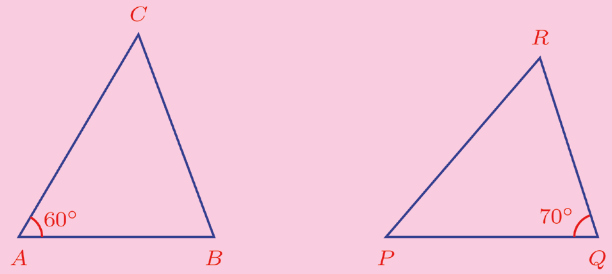
ABC എന്ന ത്രികോണവും DE എന്ന വരയും വരയ്ക്കുക. Reflect about Line എടുത്ത് ത്രികോണത്തിലും വരയിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ΔA'B'C' ലഭിക്കും. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ് ? ΔABC യുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം, DE എന്ന വരയുടെ സ്ഥാനം, ചരിവ് തുടങ്ങിയവ മാറ്റി നോക്കൂ.



(3) ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ

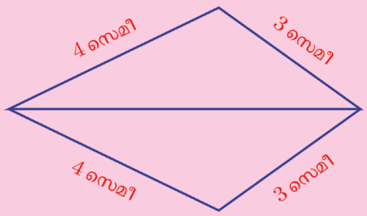
$AB = QR, \quad BC = PQ, \quad CA = RP$

എന്നിങ്ങനെയാണ്:



രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലെയും മറ്റു രണ്ടു കോണുകൾ കണ്ടുപിടിച്ച് എഴുതുക.

(4) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ വികർണ്ണം, അതിനെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു.

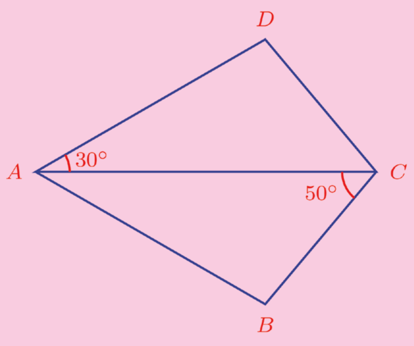


ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണോ ? എന്തുകൊണ്ട് ?

(5) ചിത്രത്തിലെ *ABCD* എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ:

$$AB = AD, \quad CB = CD$$

എന്നിങ്ങനെയാണ്.



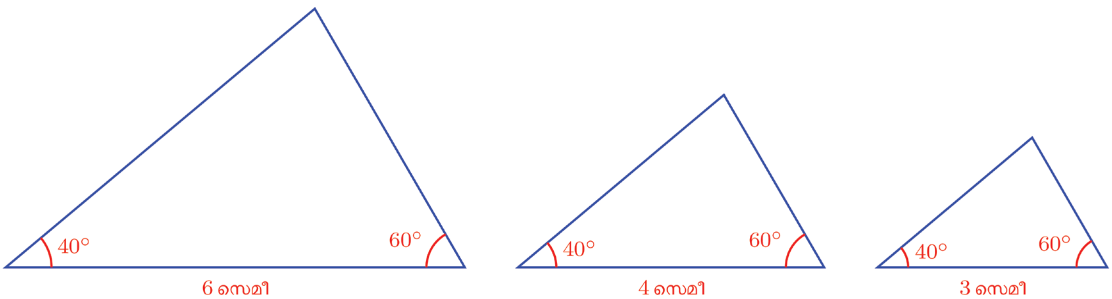
ചതുർഭുജത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം കണക്കാക്കുക.

രണ്ടു കോണുകൾ

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്ക് തുല്യമാണെങ്കിൽ, കോണുകളും തുല്യമാണെന്നു കണ്ടല്ലോ.

മറിച്ച്, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾക്ക് തുല്യമാണെങ്കിൽ, വശങ്ങളും തുല്യമാണെന്നു പറയാമോ ?

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങൾ ഏഴാം ക്ലാസിൽ വരച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ (**ത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **കോൺകണക്ക്** എന്ന ഭാഗം).

എല്ലാ ത്രികോണത്തിലും മൂന്നാം കോൺ 80° തന്നെ.

വശങ്ങളോ?

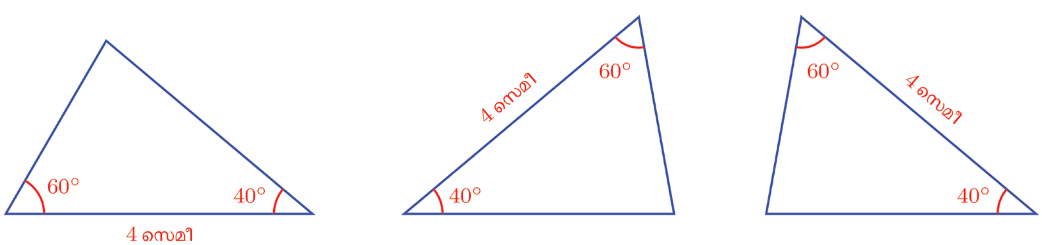
ഇതിൽനിന്ന് എന്തു മനസ്സിലാക്കാം ?

> ഒരു ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾക്ക് തുല്യമായാലും, ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ തുല്യമാകണമെന്നില്ല.

min = 0, max = 5 ആയി സ്ലൈഡർ a നിർമ്മിക്കുക. വശങ്ങളുടെ നീളം 4, 5, 6 ആയ ഒരു ത്രികോണവും 4a, 5a, 6a ആയ മറ്റൊരു ത്രികോണവും നിർമ്മിക്കുക. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും കോണുകൾ നോക്കൂ (Angle tool എടുത്ത് ത്രികോണത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ കോൺ അളവുകൾ കാണാം). a എന്ന സംഖ്യ മാറ്റി നോക്കൂ. എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? a = 1 ആകുമ്പോഴോ ?

ഇപ്പോൾ കണ്ട ത്രികോണങ്ങളെല്ലാം, വ്യത്യസ്ത നീളമുള്ള വരകളുടെ അറ്റങ്ങളിൽ ഒരേ കോണുകൾ വരച്ചതാണല്ലോ.

ഇതിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ത്രികോണം തന്നെ പല രീതിയിൽ വരയ്ക്കാം:



ഇവിടെയെല്ലാം ത്രികോണങ്ങളുടെ ഒരു വശവും അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തെ കോണുകളും തുല്യമാണ്.

കോണുകളുടെയും വശങ്ങളുടെയും സ്ഥാനം മാറ്റി, ഇതേ മൂന്ന് അളവുകളുള്ള ത്രികോണം തന്നെ മറ്റു ചില രീതിയിലും വരയ്ക്കാം.

പക്ഷേ ഇവയെല്ലാം ഒരേ ത്രികോണത്തെ തിരിച്ചും മറിച്ചും വച്ചതാണെന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടതാണല്ലോ.

അതായത്, ഇവയിലൊന്നും മൂന്നാമത്തെ കോണോ, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളോ മാറുന്നില്ല.

അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തു പറയാം ?

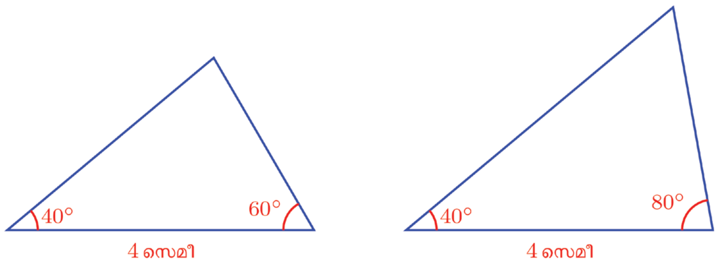
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശവും അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള കോണുകളും, മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിനും അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള കോണുകൾക്കും തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ മൂന്നാമത്തെ കോണുകൾ തുല്യമാണ്; തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളും തുല്യമാണ്

ഏതു ത്രികോണത്തിലും കോണുകളുടെ തുക 180° ആയതിനാൽ, രണ്ടു കോണുകൾ അറിയാമെങ്കിൽ മൂന്നാമത്തെ കോണും കണക്കാക്കാം.

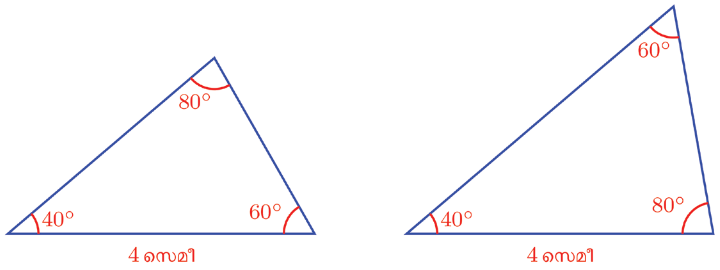
അപ്പോൾ ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു കോണുകൾ മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു കോണുകൾക്ക് തുല്യമാണെങ്കിൽ, മൂന്നാമത്തെ കോണുകളും തുല്യമാണ്.

രണ്ടു കോണുകളും ഏതെങ്കിലും ഒരു വശവും കൂടി തുല്യമായാൽ, ത്രികോണങ്ങളിലെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളും തുല്യം എന്നു പറയാമോ ?

ഇതുപോലെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചുനോക്കൂ:



മൂന്നാമത്തെ കോണുകൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?

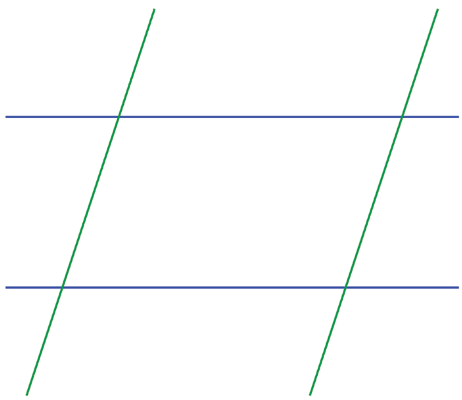


രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണ്; താഴത്തെ വശവും തുല്യമാണ്. പക്ഷേ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമല്ലെന്ന് കണ്ടാൽത്തന്നെ അറിയാമല്ലോ.

> ഒരു ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നു കോണുകളും ഏതെങ്കിലും ഒരു വശവും, മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നു കോണുകൾക്കും ഒരു വശത്തിനും തുല്യമായാലും, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ തുല്യമാകണമെന്നില്ല.

മുകളിൽ കണ്ട തത്വത്തിന്റെ ഒരു പ്രയോഗം നോക്കാം:

രണ്ടു ജോടി സമാന്തരവരകൾ മുറിച്ചുകടക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന രൂപമാണല്ലോ സാമാന്തരികം.



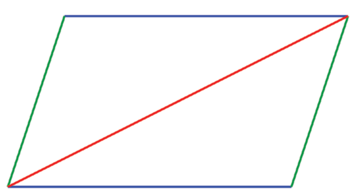
മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഓരോ ജോടി എതിർവശങ്ങളും സമാന്തരമായ ചതുർഭുജമാണ് സാമാന്തരികം.

മുകളിൽ വരച്ച സാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു തോന്നുന്നില്ലേ? എങ്ങനെ ഉറപ്പിക്കാം?

രണ്ടു വരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു കാണാനുള്ള ഒരു വഴി, അവ വശങ്ങളായുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ മറ്റ് അളവുകൾ തുല്യമാണോ എന്നു നോക്കുകയാണ്.

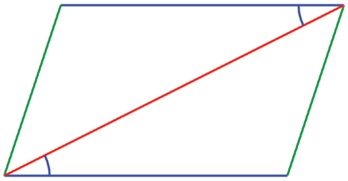
ഈ ചിത്രത്തിൽ ത്രികോണങ്ങളില്ലല്ലോ.

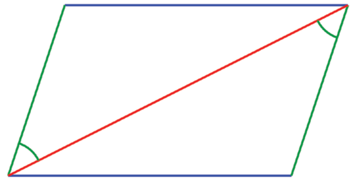
ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരു വികർണ്ണം വരച്ചാൽ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളായില്ലേ?



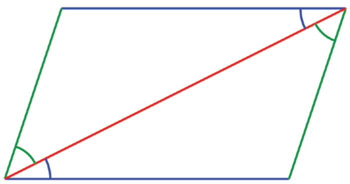
ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലെയും കോണുകളെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

ചിത്രത്തിലെ നീല വരകൾ സമാന്തരമായതിനാൽ, ചുവന്ന വര ഇവയുമായി മുട്ടുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന കോണുകൾ തുല്യമാണ്. പച്ച വരകൾ സമാന്തരമായതിനാൽ, അവ ചുവന്ന വരയുമായി ചേരുന്ന കോണുകളും തുല്യമാണ്.





അതായത്, താഴത്തെ ത്രികോണത്തിലെ ചുവന്ന വശവും അതിലെ രണ്ടു കോണുകളും, മുകളിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുവന്ന വശത്തിനും അതിലെ രണ്ടു കോണുകൾക്കും തുല്യമാണ്.



അപ്പോൾ ത്രികോണങ്ങളിലെ തുല്യമായ കോണുകൾക്ക് എതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളവും തുല്യമാകണമല്ലോ.

അതായത്, ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമാണ്.

ഇതൊരു പൊതുതത്വമായി പറയാം:

ഏതു സാമാന്തരികത്തിന്റെയും എതിർ വശങ്ങൾ തുല്യമാണ്

മുകളിലെ ചർച്ചയിൽ നിന്ന് സാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർകോണുകളും തുല്യമാണെന്ന് കാണാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ ?

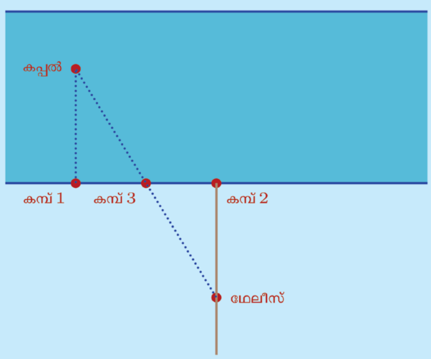
ഏതു സാമാന്തരികത്തിന്റെയും എതിർ കോണുകൾ തുല്യമാണ്

ത്രികോണതന്ത്രം

ബി.സി.ഇ. ആറാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഗ്രീസിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന തത്വചിന്തകനും ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനുമായിരുന്നു ഥേലീസ്. ദൂരെ കടലിൽ നങ്കൂരമിട്ടു കിടക്കുന്ന ഒരു കപ്പൽ, കരയിൽ നിന്ന് എത്ര അകലെയാണെന്ന് കണക്കുകൂട്ടാൻ ഥേലീസ് ഉപയോഗിച്ചതായി പറയപ്പെടുന്ന ഒരു സൂത്രം നോക്കൂ:

ആദ്യം കപ്പലിനു നേരെ തീരത്തോടു ചേർന്ന് ഒരു കമ്പു നാട്ടി. കുറച്ചകലെയായി തീരത്തോടു ചേർന്നുതന്നെ മറ്റൊരു കമ്പും, തുടർന്ന് ഈ രണ്ടു കമ്പുകളുടെ ഒത്ത നടുക്കായി മൂന്നാമതൊരു കമ്പും കുത്തിനിർത്തി.

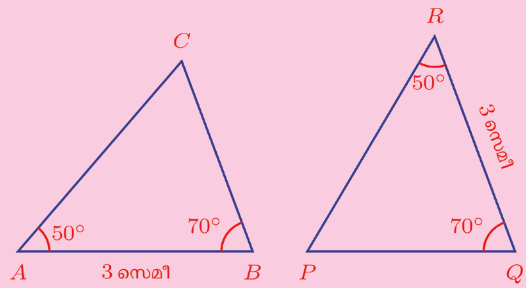
പിന്നീട്, രണ്ടാമത്തെ കമ്പിൽനിന്ന് തീരത്തിന് ലംബമായി കരയിൽ ഒരു വര വരച്ചു; കപ്പലിനെ നോക്കിക്കൊണ്ട് ഈ വരയിലൂടെ പുറകോട്ടു നടന്നു. നടുവിലത്തെ കമ്പ് കപ്പലിന് നേരെ കണ്ടപ്പോൾ നടത്തം നിർത്തി, അപ്പോൾ നിന്നിരുന്ന സ്ഥാനം വരയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി.



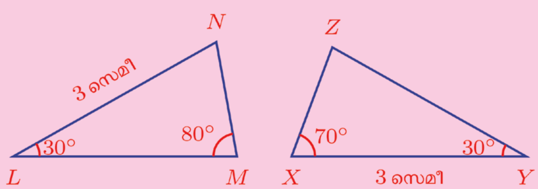
ഇപ്പോൾ കടലിലെ ത്രികോണത്തിന്റെയും കരയിലെ ത്രികോണത്തിന്റെയും തീരത്തോടു ചേർന്ന വശങ്ങളും, അവയുടെ അറ്റങ്ങളിലെ കോണുകളും തുല്യമാണ് (എന്തുകൊണ്ട് ?). അപ്പോൾ കരയിൽനിന്ന് കപ്പലിലേക്കുള്ള ദൂരം, ഥേലീസ് അവസാനം നിന്ന സ്ഥാനവും തീരവും തമ്മിലുള്ള ദൂരം തന്നെയാണല്ലോ.

(1) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ജോടി ചിത്രങ്ങളിലും, ഇടത്തെ ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങൾക്ക് തുല്യമായ വശങ്ങൾ വലത്തെ ത്രികോണത്തിൽ നിന്ന് കണ്ടുപിടിച്ച് എഴുതുക.

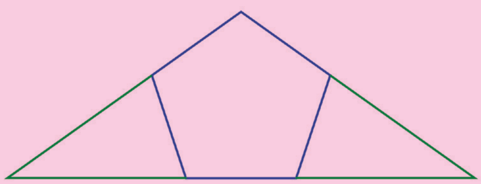
(i)



(ii)



(2) ചിത്രത്തിൽ, വശങ്ങളും കോണുകളുമെല്ലാം തുല്യമായ ഒരു പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ മുകളിലെ രണ്ടു വശങ്ങളും, താഴത്തെ വശവും നീട്ടി, ഒരു ത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നു:



(i) ചിത്രത്തിലെ ഇടതുവശത്തെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കും വലതുവശത്തെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണോ ? എന്തുകൊണ്ട് ?

(ii) ചിത്രത്തിലെ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണോ ? എന്തുകൊണ്ട് ?

(3) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്ക് തുല്യമാണ്.

(i) ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഏതെങ്കിലും വശത്തിൽനിന്ന് എതിർ മൂലയിലേക്കുള്ള ഉയരം, മറ്റേ ത്രികോണത്തിന്റെ തുല്യമായ വശത്തിൽനിന്ന് എതിർ മൂലയിലേക്കുള്ള ഉയരത്തിനു തുല്യമാണോ? എന്തുകൊണ്ട് ?

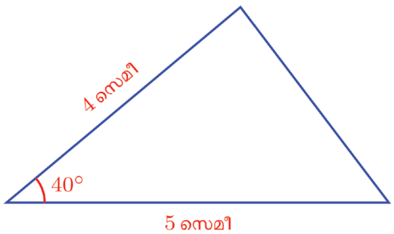
(ii) ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ തുല്യമാണോ ? എന്തുകൊണ്ട് ?

രണ്ടു വശങ്ങൾ

ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ, മൂന്നു വശങ്ങളുടെയും നീളം പറഞ്ഞാൽ മതി; അല്ലെങ്കിൽ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള കോണുകളുടെ അളവുകളും പറഞ്ഞാലും മതി.

മറ്റേതെങ്കിലും മൂന്ന് അളവുകൾ പറഞ്ഞാൽ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ ?

രണ്ടു വശങ്ങളും അവ ചേരുന്ന കോണും ആയാലോ ?

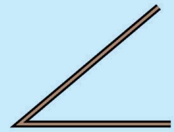


ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങൾ ഏഴാം ക്ലാസിൽ വരച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ (**ത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വശങ്ങളും കോണുകളും** എന്ന ഭാഗം).

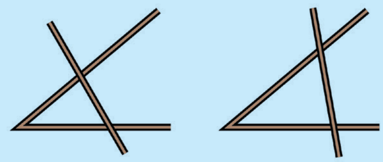
നേരത്തെ വരച്ച ത്രികോണങ്ങളെപ്പോലെ, മൂലകളുടെയും വശങ്ങളുടെയും സ്ഥാനം മാറ്റി, ഈ ത്രികോണത്തെയും തിരിച്ചും മറിച്ചും പലതരത്തിൽ വരയ്ക്കാം:

ത്രികോണനിശ്ചയം

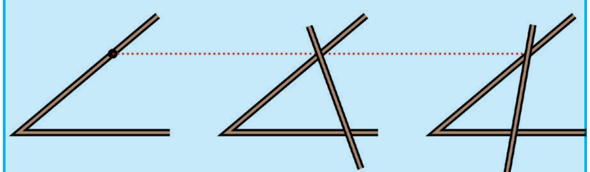
നീളമുള്ള ഒരു ഈർക്കിൽ മടക്കി ഒരു കോൺ ഉണ്ടാക്കുക.



ഈ കോണിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടേയും മുകളിൽ മറ്റൊരു ഈർക്കിൽ വച്ച് ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കണം. പല രീതിയിൽ വയ്ക്കാമല്ലോ.

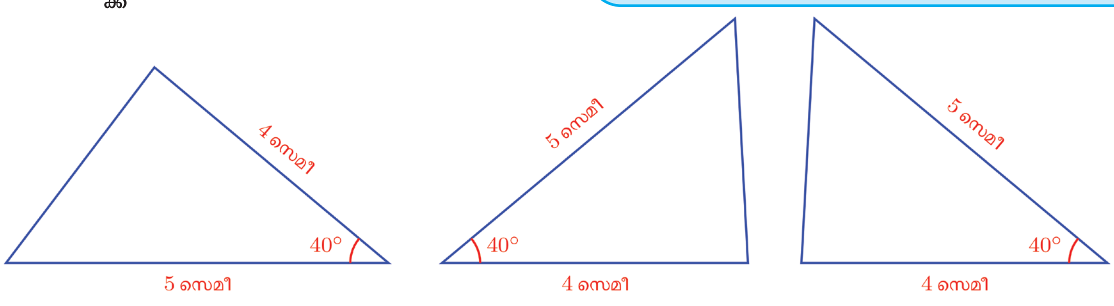


മുകളിലെ വശത്തിൽ ഒരു അടയാളമിട്ട് രണ്ടാമത്തെ ഈർക്കിൽ അതിൽക്കൂടിത്തന്നെ കടന്നു പോകണമെന്നു പറഞ്ഞാലോ ?



മുകളിലെ വശത്തിലും താഴത്തെ വശത്തിലും അടയാളമിട്ട്, ഈ രണ്ടടയാളങ്ങളിൽക്കൂടിയും കടന്നു പോകത്തക്കവിധം ഈർക്കിൽ വയ്ക്കണമെന്നു പറഞ്ഞാലോ ? എത്ര ത്രികോണങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം ?

ഒരു കോണും അതിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളുടെ നീളവും പറയുന്നതോടെ ത്രികോണം ഉറപ്പിക്കാം, അല്ലേ ?



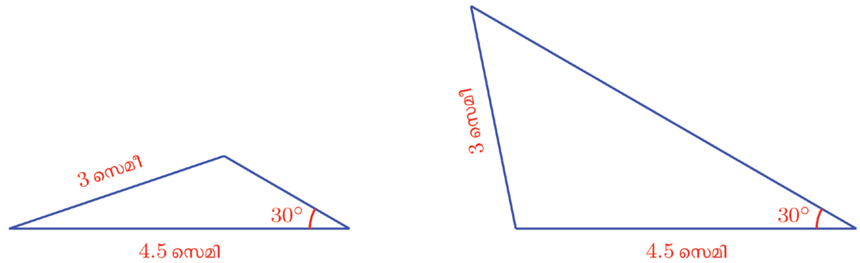
പക്ഷേ ഇവയിലൊന്നും മൂന്നാമത്തെ വശമോ മറ്റു രണ്ടു കോണുകളോ മാറുന്നില്ലല്ലോ.

ഈ ഉദാഹരണത്തിലൂടെ കണ്ട കാര്യവും ഒരു പൊതുതത്വമായി എഴുതാം:

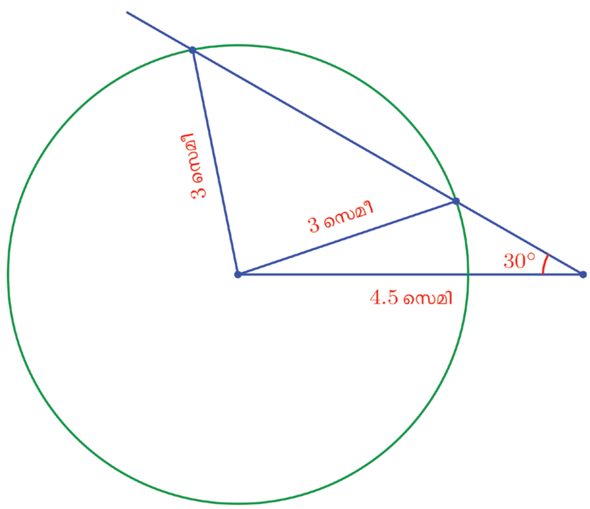
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളും അവ ചേരുന്ന കോണും, മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾക്കും അവ ചേരുന്ന കോണിനും തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങളും തുല്യമാണ്; മറ്റു രണ്ടു കോണുകളും തുല്യമാണ്

വശങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണിനു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും കോണുകൾ തുല്യമായാൽ ഇതു ശരിയാകുമോ ?

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങൾ ഏഴാം ക്ലാസിൽ വരച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ:

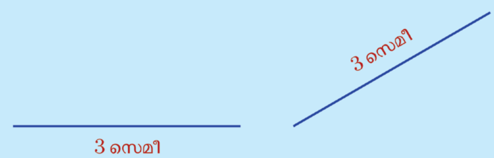


ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ, ഒന്നിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളും ഒരു കോണും മറ്റൊന്നിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾക്കും ഒരു കോണിനും തുല്യമാണ്; പക്ഷേ മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങളോ, മറ്റു രണ്ടു കോണുകളോ, തുല്യമല്ലല്ലോ ?

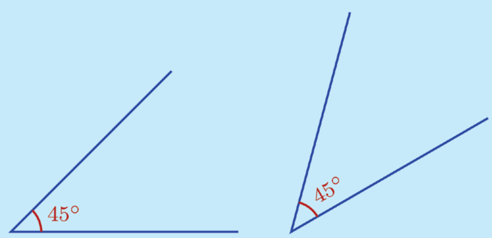
> ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളും ഏതെങ്കിലും ഒരു കോണും മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങൾക്കും ഒരു കോണിനും തുല്യമായാലും, ത്രികോണങ്ങളിലെ മൂന്നാം വശവും മറ്റു രണ്ടു കോണുകളും തുല്യമാകണമെന്നില്ല.

തുല്യത

വരകൾ, കോണുകൾ, ചതുരങ്ങൾ, ത്രികോണങ്ങൾ എന്നിങ്ങനെ പലതരം ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുണ്ട്.

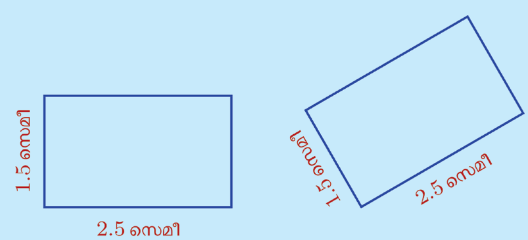


ഒരേ നീളമുള്ള വരകൾ എങ്ങനെ വരച്ചാലും തുല്യമാണെന്നു പറയാറുണ്ടല്ലോ.

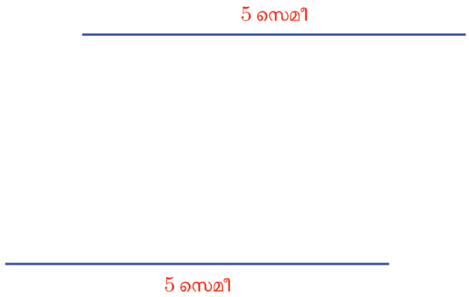


ഇതുപോലെ തന്നെ ഒരേ അളവുള്ള കോണുകളും.

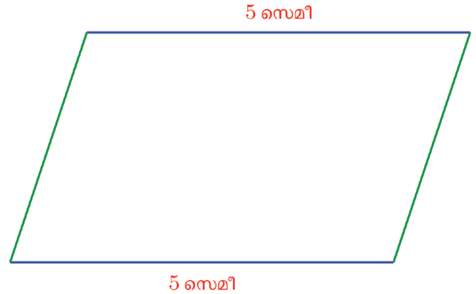
ഒരേ നീളവും വീതിയുമുള്ള ചതുരങ്ങളും തുല്യമാണെന്നു പറയാം.



ഇനി ഒരു കണക്കു നോക്കാം. സമാന്തരമായ രണ്ടു വരകൾ ഒരേ നീളത്തിൽ വരയ്ക്കുക:

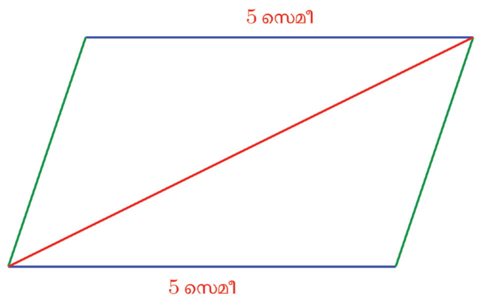


വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ യോജിപ്പിക്കുക:



ചിത്രത്തിലെ ഇടതും വലതും (പച്ച) വരകളെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം ?

ഈ വരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു തോന്നുന്നില്ലേ ? എങ്ങനെ ഉറപ്പിക്കാം ?

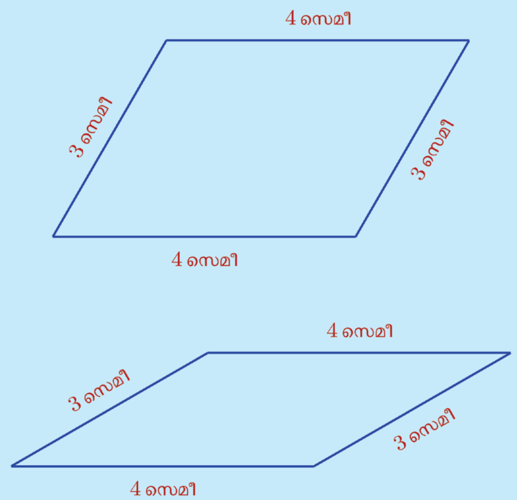


രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലെയും നീല വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്.

ചുവന്ന വര, രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വശമാണ്.

ജ്യാമിതീയ തുല്യത

ചിത്രത്തിലെ സാമാന്തരികങ്ങൾ നോക്കൂ.

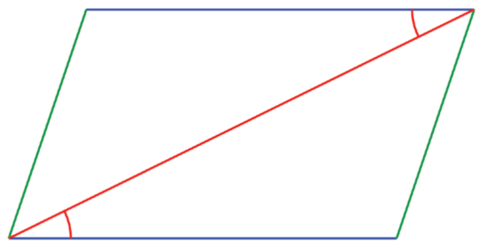


രണ്ട് സാമാന്തരികത്തിലെയും വശങ്ങൾ 4 സെന്റിമീറ്റർ, 3 സെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെയാണ്. പക്ഷേ ഈ സാമാന്തരികങ്ങൾ തുല്യമാണെന്ന് പറയുന്നത് ശരിയല്ലല്ലോ. ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ തുല്യതയെക്കുറിച്ച് യൂക്ലിഡ് പറയുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്;

ഒന്നിനോടൊന്നു യോജിക്കുന്നവ തുല്യമാണ്.

പേജ് 26 ലെ വരകളും കോണുകളും ചതുരങ്ങളുമെല്ലാം, ഒന്നു തിരിച്ചു വച്ചാൽ കൃത്യമായി ചേർന്നിരിക്കുമല്ലോ.

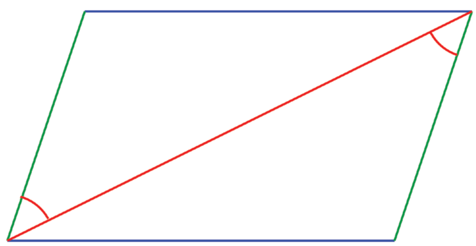
ഇവ ചേരുന്ന കോണുകളോ ?



സമാന്തരമായ നീല വരകളെ ചുവന്ന വര മുട്ടുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന രണ്ടു ചെറിയ കോണുകളാണല്ലോ ഇവ; അതിനാൽ അവ തുല്യമാണ്.

അതായത്, മുകളിലും താഴെയുമുള്ള ത്രികോണങ്ങളിലെ രണ്ടു വശങ്ങളും അവ ചേരുന്ന കോണും തുല്യമാണ്.

അപ്പോൾ ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ മൂന്നാം വശങ്ങളായ പച്ച വരകൾക്കും ഒരേ നീളമാകണമല്ലോ. മാത്രവുമല്ല, ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ കോണുകളും തുല്യമാണ്.



അതായത്, ചുവന്ന വര പച്ച വരകളെ മുട്ടുന്ന രണ്ടു ചെറിയ കോണുകൾ തുല്യമാണ്.

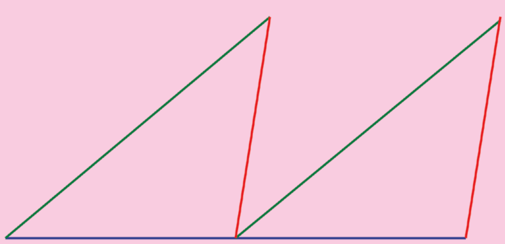
അപ്പോൾ പച്ച വരകൾ സമാന്തരവുമാണ്.

അതായത്, ഈ ചതുർഭുജം ഒരു സാമാന്തരികമാണ്.

ഈ കണക്കിൽ കണ്ട കാര്യം ഒരു പൊതുതത്വമായി പറയാമല്ലോ:

ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങൾ സമാന്തരവും അവയ്ക്ക് ഒരേ നീളവും ആണെങ്കിൽ, ആ ചതുർഭുജം ഒരു സാമാന്തരികമാണ്

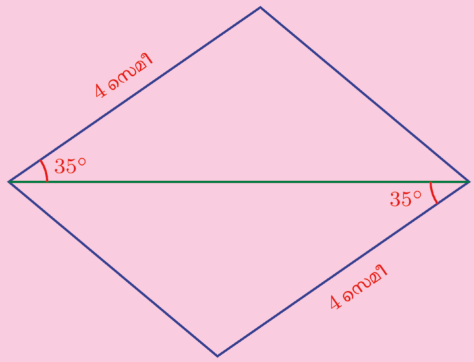
(1) ചിത്രത്തിലെ പച്ച വരകൾ ഒരേ നീളമുള്ള സമാന്തരവരകളാണ്. ഒരെണ്ണം വിലങ്ങനെയുള്ള നീല വരയുടെ ഇടതറ്റത്തുനിന്നും, മറ്റൊരെണ്ണം നീല വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിൽ നിന്നുമാണ് വരച്ചിരിക്കുന്നത്.



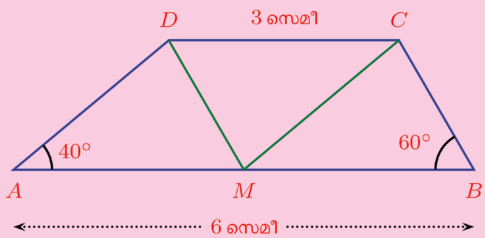
(i) ചിത്രത്തിലെ ചുവന്ന വരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണോ ? എന്തുകൊണ്ട് ?

(ii) ചുവന്ന വരകൾ സമാന്തരമാണോ ?

(2) ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജം സാമാന്തരികമാണോ? എന്തുകൊണ്ട്?



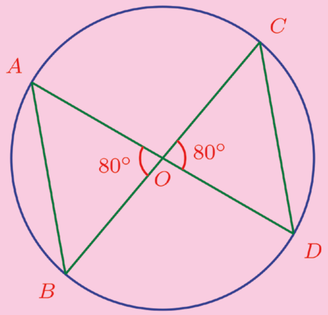
(3) ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിൽ, *AB, CD* എന്നീ വരകൾ സമാന്തരമാണ്. *AB* യുടെ മധ്യബിന്ദുവാണ് *M*.



(i) *AMCD, MBCD* എന്നീ ചതുർഭുജങ്ങൾ സാമാന്തരികങ്ങളാണോ? എന്തുകൊണ്ട്?

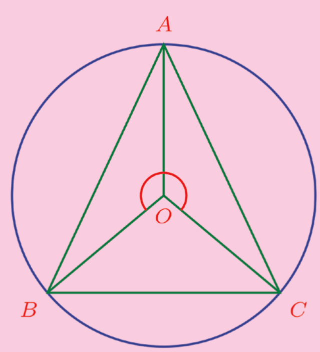
(ii) *AMD, MBC, DCM* എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളെല്ലാം കണക്കാക്കുക.

(4) ചിത്രത്തിൽ *O* വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും *A, B, C, D* വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുമാണ്.



AB, CD എന്നീ വരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണോ? എന്തുകൊണ്ട്?

(5) ചിത്രത്തിൽ *O* വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും *A, B, C* വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുമാണ്. $\angle AOB$, $\angle AOC$ എന്നീ കോണുകൾ തുല്യമാണ്.



AB, AC എന്നീ വരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണോ? എന്തുകൊണ്ട്?

ഇതുവരെ കണ്ടതെല്ലാമൊന്നു ചുരുക്കിപ്പറയാം.

ഒരു ത്രികോണത്തിന് മൂന്ന് വശങ്ങളും മൂന്ന് കോണുകളും ചേർന്ന് ആറ് അളവുകളുണ്ടല്ലോ. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ ഈ ആറ് അളവുകളും തുല്യമായാൽ, അവ കൃത്യമായി ചേർന്നിരിക്കുന്ന വിധത്തിൽ ഒന്നിനുമേൽ ഒന്നായി ചേർത്തു വയ്ക്കാം;

അതായത്, അവ **തുല്യമായ ത്രികോണങ്ങളാണ് (Equal Triangles)**.

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ തുല്യമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കാൻ, ഈ ആറ് അളവുകളും ഒത്തുനോക്കേണ്ടതുണ്ടോ? പ്രത്യേക രീതിയിലുള്ള മൂന്നളവുകൾ പരിശോധിച്ചാൽ മതി എന്നല്ലേ ഇവിടെ കണ്ടത്:

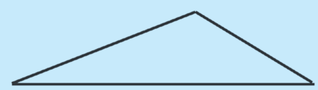
ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ചുവടെപ്പറയുന്ന തരത്തിലുള്ള ഏതെങ്കിലും മൂന്നളവുകൾ, മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിലെ അതേ തരത്തിലുള്ള മൂന്ന് അളവുകൾക്ക് തുല്യമാണെങ്കിൽ, ത്രികോണങ്ങളിലെ മറ്റു മൂന്ന് അളവുകളും തുല്യമാണ്; അതായത് അവ തുല്യത്രികോണങ്ങളാണ്.

- **മൂന്നു വശങ്ങൾ**
- **രണ്ടു വശങ്ങളും അവ ചേരുന്ന കോണും**
- **ഒരു വശവും അതിന്റെ അറ്റങ്ങളിലുള്ള കോണുകളും**

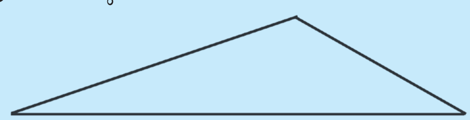
ശരിയല്ലാത്ത പൊരുത്തം

ഒരു ത്രികോണത്തിന് മൂന്നു വശങ്ങൾ, മൂന്നു കോണുകൾ എന്നിങ്ങനെ ആറ് അളവുകളാണല്ലോ ഉള്ളത്. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ ഈ അളവുകളിലെ നിശ്ചിതമായ മൂന്നെണ്ണം (മൂന്ന് വശങ്ങൾ, രണ്ടു വശങ്ങളും അവ ചേരുന്ന കോണും, ഒരു വശവും അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള കോണുകളും) തുല്യമായാൽ ഈ ത്രികോണങ്ങൾ തുല്യമാകുമെന്ന് (അതായത് ബാക്കി മൂന്ന് അളവുകളും തുല്യമായിരിക്കുമെന്ന്) കണ്ടു.

ഇനി ഒരു കടലാസിൽ വശങ്ങൾ 4, 6, 9 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കൂ.



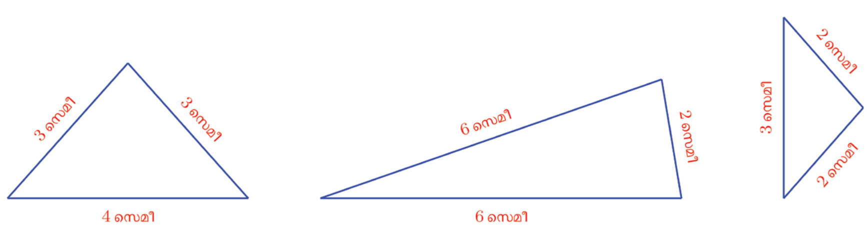
അടുത്തതായി 6, 9, 13.5 സെന്റിമീറ്റർ ആയ മറ്റൊരു ത്രികോണവും.



ഇവയുടെ കോണുകൾ അളന്നു നോക്കൂ. രണ്ട് ത്രികോണത്തിലെയും കോണുകൾ തുല്യമല്ലേ ? (വെട്ടിയെടുത്ത് കോണുകളോരോന്നും ചേർത്തുവെച്ച് നോക്കിയാലും മതി). അതായത്, ഈ ത്രികോണങ്ങളിൽ മൂന്ന് കോണുകളും, രണ്ടു വശങ്ങളുമായി അഞ്ച് അളവുകൾ തുല്യമാണ്. പക്ഷേ ത്രികോണങ്ങൾ തുല്യമല്ലല്ലോ.

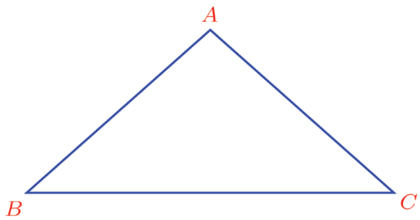
സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ

ഈ ത്രികോണങ്ങൾ നോക്കൂ:



എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളിലും രണ്ടു വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്. ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങളെ **സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ (Isosceles triangles)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഈ സമപാർശ്വത്രികോണം നോക്കൂ:



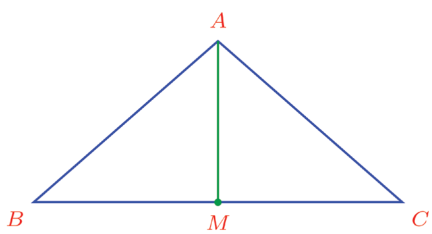
ഇതിലെ ഇടതും വലതും വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്.

ഇടതും വലതും കോണുകൾ നോക്കൂ. എന്തെങ്കിലും ബന്ധം തോന്നുന്നുണ്ടോ ?

ഇത്തരമൊരു ത്രികോണം കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത്, തുല്യമായ വശങ്ങൾ ചേർന്നിരിക്കുന്ന തരത്തിൽ നടുവിലൂടെ മടക്കിനോക്കൂ. ഇടതും വലതും കോണുകളും ചേർന്നിരിക്കുന്നില്ലേ ?

കോണുകൾ തുല്യമാകാൻ എന്താണു കാരണം ?

മടക്കിയ വര ചിത്രത്തിൽ വരച്ചു നോക്കാം; അതായത്, മുകളിലെ മൂലയും താഴത്തെ വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിച്ചു വരയ്ക്കാം:



ചിത്രത്തിന്റെ ഇടതും വലതുമുള്ള ചെറിയ ത്രികോണങ്ങൾ *ABM, ACM,* ഇവയുടെ വശങ്ങൾ നോക്കുക.

> min = 3, max = 15 ആകത്തക്ക വിധം സ്ലൈഡർ a നിർമ്മിക്കുക. നീളം 6 ആയി AB എന്ന വര വരയ്ക്കുക. A, B ഇവ കേന്ദ്രമായും ആരം a ആയും ഓരോ വൃത്തങ്ങൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ΔABC വരയ്ക്കുക. ഇനി വൃത്തങ്ങൾ മറച്ചു വയ്ക്കാം. a യുടെ വില മാറുന്നതനുസരിച്ച് വ്യത്യസ്ത ത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടുന്നില്ലേ ? ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം രണ്ടു വശങ്ങൾ തുല്യമാണ്. കോണുകളോ ?
>
> a = 6 ആകുമ്പോൾ കോണുകൾ എത്രയാണ് ?

- $AB = AC$ എന്ന് ആദ്യമേ പറഞ്ഞു
- M എന്ന ബിന്ദു BC എന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദു ആയതിനാൽ $BM = CM$
- AM എന്ന വര, രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വശമാണ്

അതായത്, *ABM, ACM* എന്നീ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്.

അതിനാൽ അവയുടെ തുല്യവശങ്ങൾക്ക് എതിരെയുള്ള കോണുകളും തുല്യമാകണമല്ലോ.

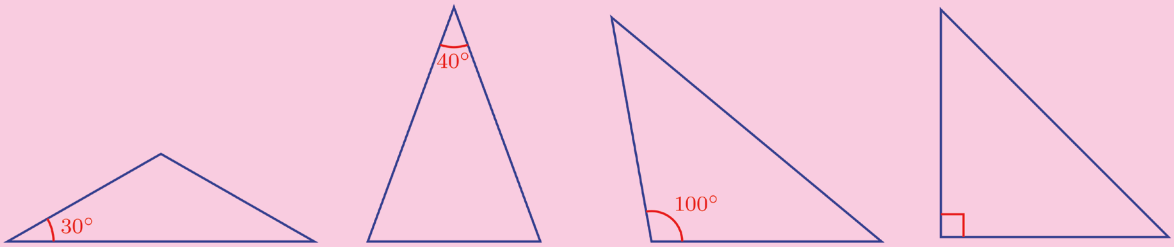
അപ്പോൾ $\angle B = \angle C$

ഇവ ആദ്യം വരച്ച ABC എന്ന ത്രികോണത്തിലെ തുല്യമായ വശങ്ങൾക്ക് എതിരെയുള്ള കോണുകൾ തന്നെയല്ലേ ?

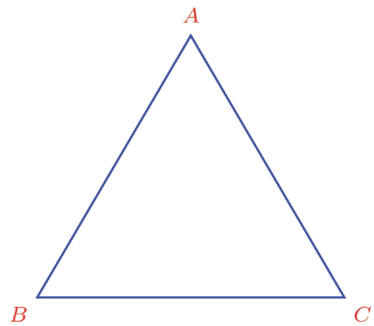
ഇക്കാര്യം ഒരു പൊതുതത്വമായി എഴുതാം:

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഈ വശങ്ങളുടെ എതിരെയുള്ള കോണുകളും തുല്യമാണ്

ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളുടെ മറ്റുകോണുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക ?



ഇനി ഒരു ചോദ്യം : ഒരു ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നു വശങ്ങളും തുല്യമായാലോ ?



ABC എന്ന ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നു വശങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണ്.

AB, AC എന്നീ വശങ്ങൾ തുല്യമായതിനാൽ, മുകളിൽ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, *B* യിലെയും, *C* യിലെയും കോണുകൾ തുല്യമാണ്;

അതുപോലെ *BA, BC* എന്നീ വശങ്ങൾ തുല്യമായതിനാൽ, *A* യിലെയും, *C* യിലെയും കോണുകൾ തുല്യമാണ്;

അപ്പോൾ എല്ലാ കോണുകളും തുല്യമായില്ലേ ?

കോണുകളുടെ തുക 180° ആയതിനാൽ ഓരോ കോണും $180° \div 3 = 60°$ എന്നും കാണാം.

വശങ്ങളെല്ലാം തുല്യമായ ത്രികോണത്തിനെ സമഭുജത്രികോണം എന്നാണല്ലോ പറയുന്നത്. അപ്പോൾ പൊതുവേ ഇങ്ങനെ പറയാം:

ഏതൊരു സമഭുജത്രികോണത്തിലും, കോണുകളെല്ലാം 60° ആണ്

min = 0, max = 90° ആകത്തക്കവിധം ഒരു Angle Slider α നിർമ്മിക്കുക (Slider Tool എടുത്ത് ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ Angle എന്നത് തിരഞ്ഞെടുത്താൽ മതി).

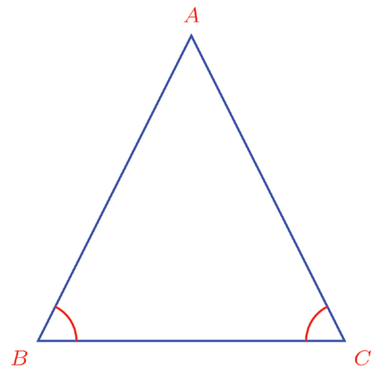
നീളം 6 ആയി AB എന്ന വര വരയ്ക്കുക. ∠A = ∠B = α ആകത്തക്കവിധം വരകൾ വരച്ച് കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. ΔABC വരയ്ക്കുക.

α മാറുന്നതനുസരിച്ച് ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ മാറുന്നത് നോക്കൂ. α = 60° ആകുമ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ പ്രത്യേകത എന്താണ് ? 45° ആകുമ്പോഴോ ?

ഇനി മറ്റൊരു ചോദ്യം: ആദ്യം പറഞ്ഞ തത്വം തിരിച്ചു പറഞ്ഞാൽ ശരിയാകുമോ?

അതായത്, ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു കോണുകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ, അവയുടെ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമാകുമോ?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

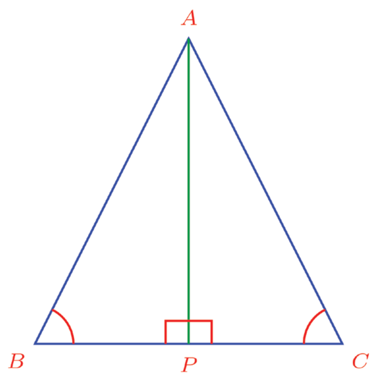


ABC എന്ന ത്രികോണത്തിലെ B യിലെയും C യിലെയും കോണുകൾ തുല്യമാണ്.

AB, AC എന്നീ വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണോ എന്നാണ് ചോദ്യം.

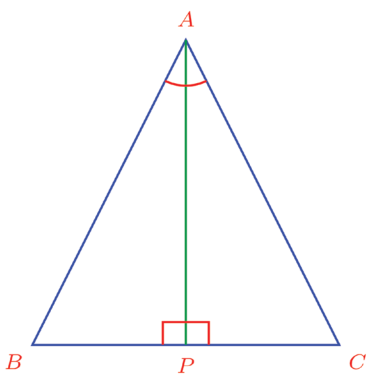
മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ ത്രികോണം ABC യെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കാം:

ഇവിടെ മുകളിലെ മൂലയും താഴത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്നതിനു പകരം, മുകളിലെ മൂലയിൽ നിന്ന് താഴത്തെ വശത്തിനു ലംബം വരയ്ക്കുന്നതാണ് സൗകര്യം:



ഇപ്പോൾ ഇടതും വലതുമുള്ള ABP, ACP എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ, B, C എന്നീ മൂലകളിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണ്. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലെയും P എന്ന മൂലയിലെ കോണുകൾ മട്ടമായതിനാൽ തുല്യമാണ്.

അപ്പോൾ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലെയും മൂന്നാമത്തെ കോണുകളും തുല്യമാണല്ലോ.



AP എന്ന വര രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വശമാണ്.

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലെയും ഒരു വശവും അതിന്റെ അറ്റങ്ങളിലുള്ള കോണുകളും തുല്യമല്ലേ? അപ്പോൾ ഈ ത്രികോണങ്ങളിലെ മട്ടകോണുകൾക്ക് എതിരെയുള്ള AB, AC എന്നീ വശങ്ങൾ തുല്യമാണ്.

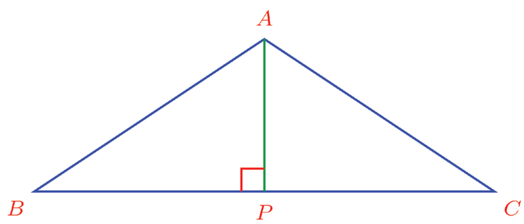
ഇവയാണല്ലോ ABC എന്ന ത്രികോണത്തിലെ തുല്യമായ കോണുകളുടെ എതിർവശങ്ങൾ.

അപ്പോൾ ആദ്യമെഴുതിയ തത്വം തിരിച്ചു പറഞ്ഞാലും ശരിയാണ്.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു കോണുകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഈ കോണുകളുടെ എതിരെയുള്ള വശങ്ങളും തുല്യമാണ്

ഇതിൽനിന്ന് മറ്റൊരു കാര്യവും കാണാം.

ചിത്രത്തിൽ ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിലെ തുല്യമായ വശങ്ങൾ ചേരുന്ന മൂലയിൽനിന്ന് എതിർവശത്തേയ്ക്ക് ലംബം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



AB, AC ഇവ തുല്യമായതിനാൽ $\angle B$, $\angle C$ എന്നിവ തുല്യമാണ്. ഇവ ABP, ACP എന്നീ മട്ടത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ ത്രികോണങ്ങളിലെ രണ്ടു കോണുകൾ തുല്യമാണ്. അതിനാൽ മൂന്നാമത്തെ കോണുകളും തുല്യമാണ്. അതായത്

$$\angle BAP = \angle CAP$$

എന്താണ് ഇതിന്റെ അർഥം ?

AP എന്ന വര, BAC എന്ന കോണിനെ രണ്ടു തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.

ഇനി രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലെയും AP എന്ന വശവും അതിലെ കോണുകളും തുല്യമായതിനാൽ ഈ ത്രികോണങ്ങളിലെ മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

$$BP = CP$$

അതായത്, AP എന്ന ലംബം BC എന്ന വരയെ രണ്ടു തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.

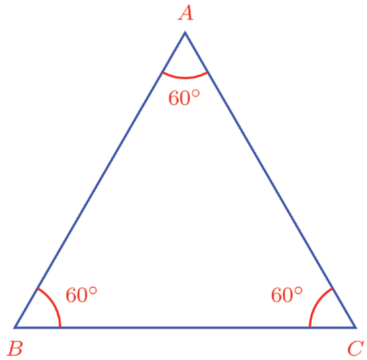
ഇക്കാര്യങ്ങൾ ഒരു പൊതുതത്വമായി പറയാമല്ലോ.

ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിൽ, തുല്യവശങ്ങൾ ചേരുന്ന മൂലയിൽ നിന്ന് എതിർവശത്തേയ്ക്കുള്ള ലംബം, ഈ വശത്തെയും ഈ മൂലയിലുള്ള കോണിനേയും സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു

ഇനി മറ്റൊരു ചോദ്യം:

ഏതൊരു സമഭുജത്രികോണത്തിലും കോണുകളെല്ലാം 60° ആണെന്നറിയാം. മറിച്ച് ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണെങ്കിൽ (60° വീതം) വശങ്ങൾ തുല്യമാകുമോ ?

ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ട് കോണുകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ അവയുടെ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമാണെന്ന് കണ്ടു.



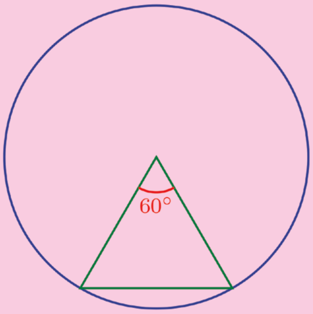
അതായത് ചിത്രത്തിൽ $\angle B = \angle C$ ആയതിനാൽ ഇവയുടെ എതിർവശങ്ങളായ $AC = AB$ എന്ന് കിട്ടും.

$\angle A = \angle C$ ആയതിനാൽ $BC = AB$ എന്നും കിട്ടും.

അപ്പോൾ $AB = BC = AC$ ആയി. ത്രികോണം സമഭുജ ത്രികോണവുമായി.

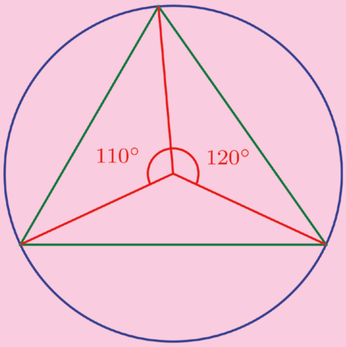
(1) ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോൺ 120° ആണ്. മറ്റു രണ്ടു കോണുകൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?

(2) ചിത്രത്തിൽ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും യോജിപ്പിച്ച് ത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



ത്രികോണത്തിലെ മറ്റു രണ്ടു കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.

(3) ചിത്രത്തിൽ ഒരു വൃത്തത്തിലെ മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

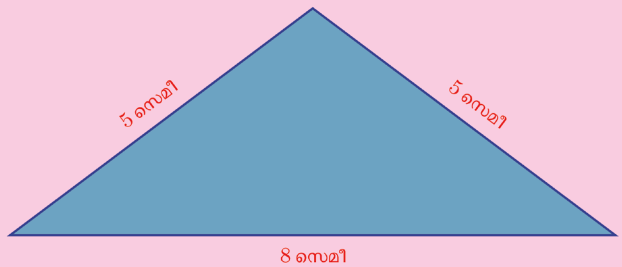


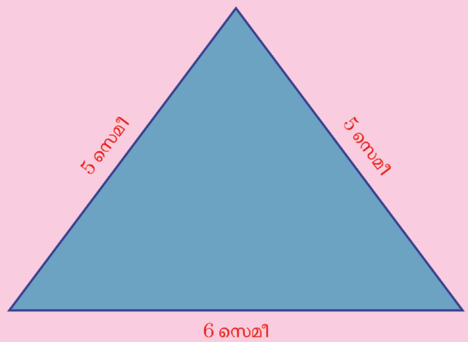
വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന മൂന്നു കോണുകളിൽ രണ്ടെണ്ണത്തിന്റെ അളവും പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്.

(i) വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ കോൺ കണക്കാക്കുക.

(ii) വൃത്തത്തിലെ വലിയ (പച്ച) ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം കണക്കാക്കുക.

(4) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.





(5) ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോൺ $70°$ ആണ്. മറ്റ് രണ്ട് കോണുകളെക്കുറിച്ച് എന്തൊക്കെ പറയാം ?

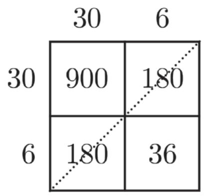
(6) ഒരു കോൺ $70°$ യും ഒരു വശം 8 സെന്റിമീറ്ററും ആയ തുല്യമല്ലാത്ത എത്ര സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാം ?

3

വർഗസമവാക്യങ്ങൾ

തുകയുടെ വർഗം

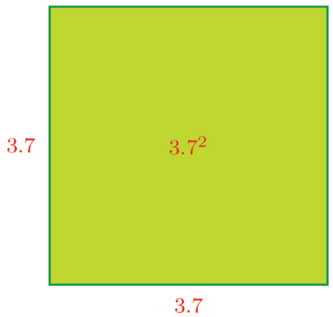
പല സംഖ്യകളുടെയും വർഗങ്ങൾ കണക്കാക്കാനുള്ള ഒരു മാർഗം, **വർഗങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടു. ഉദാഹരണമായി,

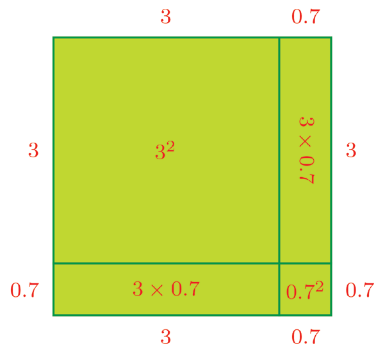


$$36^2 = 30^2 + (30 \times 6 \times 2) + 6^2$$
$$= 900 + 360 + 36$$
$$= 1296$$

3.7^2 കണക്കാക്കിയത് എങ്ങനെയാണ് ?

വശങ്ങളുടെ നീളം 3.7 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കിയിട്ടില്ലേ ? (**വർഗങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ദശാംശവർഗം** എന്ന ഭാഗം):





$$3.7^2 = 3^2 + (3 \times 0.7 \times 2) + (0.7)^2$$
$$= 9 + 4.2 + 0.49$$
$$= 13.69$$

ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ, 36 നെ $30 + 6$ എന്നു പിരിച്ചെഴുതിയാണല്ലോ വർഗം കണക്കാക്കിയത്; രണ്ടാമത്തെ കണക്കിൽ 3.7 നെ $3 + 0.7$ എന്നു പിരിച്ചെഴുതിയും.

എങ്ങനെയാണ് വർഗം കണക്കാക്കിയത് ?

ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ 36^2 കണക്കാക്കാൻ കൂട്ടിയത് എന്തൊക്കെയാണ്?

$30^2 = 30$ ന്റെ വർഗം

$6^2 = 6$ ന്റെ വർഗം

$30 \times 6 \times 2 = 30$ ന്റെയും 6 ന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ്

രണ്ടാമത്തെ കണക്കിൽ 3.7^2 കണക്കാക്കാൻ കൂട്ടിയത് എന്തൊക്കെയാണ്?

$3^2 = 3$ ന്റെ വർഗം

$0.7^2 = 0.7$ ന്റെ വർഗം

$3 \times 0.7 \times 2 = 3$ ന്റെയും 0.7 ന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ്

മറ്റു തുകകൾ എടുത്താലും ഇതുപോലെ തന്നെ വർഗം കണക്കാക്കാമല്ലോ. ഈ രീതി പൊതുവായി എങ്ങനെ പറയാം?

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗം, സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെയും അവയുടെ ഗുണന ഫലത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങിന്റെയും തുകയാണ്

സംഖ്യകളുടെ ഇത്തരം പൊതുവായ ക്രിയാബന്ധങ്ങൾ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് ചുരുക്കി യെഴുതുന്നത്, ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (**ബീജഗണിതം** എന്ന പാഠത്തിലെ **സംഖ്യകളും ബീജഗണിതവും** എന്ന ഭാഗം).

മുകളിലെഴുതിയ വർഗതത്വം എങ്ങനെ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പറയാം?

സംഖ്യകൾ x, y എന്നെടുത്താൽ, തുക $x + y$

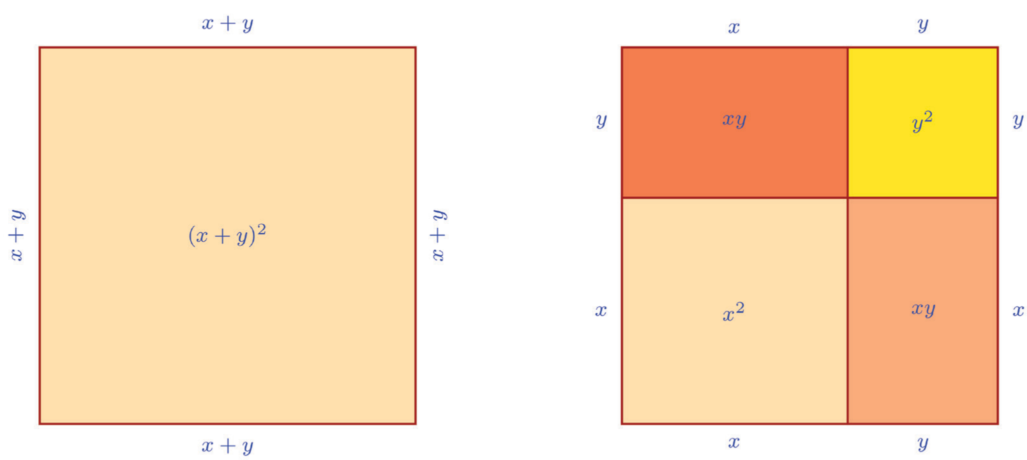
അതിന്റെ വർഗമോ?

$(x + y)^2$ എന്നാണെഴുതുക.

അപ്പോൾ തത്വത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം എന്താണ്?

x, y **ഏതു സംഖ്യകൾ ആയാലും** $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

ജ്യാമിതീയമായി ഇത് പരപ്പളവുകളുടെ ബന്ധമായി ഇങ്ങനെ കാണിക്കാം:



$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ x, y ആയി ഏതു സംഖ്യകളും എടുക്കാമല്ലോ.

y ആയി 1 എടുത്താലോ ?

$$(x + 1)^2 = x^2 + 1 + 2x$$

ബീജഗണിതവാചകങ്ങളിൽ അക്ഷരങ്ങൾ ആദ്യം എഴുതുകയാണ് പതിവ്. അതനുസരിച്ച്, മുകളിലെ സമവാക്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

ഇതിൽ x ആയി ഏതു സംഖ്യയും എടുക്കാം. അപ്പോൾ ആദ്യമെഴുതിയ പൊതുതത്വത്തിന്റെ ഒരു ഉപതത്വമായി:

x ഏതു സംഖ്യ ആയാലും, $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

അതായത്,

ഒരു സംഖ്യയോട് ഒന്നു കൂട്ടിയ സംഖ്യയുടെ വർഗം കണക്കാക്കാൻ, സംഖ്യയുടെ വർഗ ത്തിനോട്, സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങും ഒന്നും കൂട്ടിയാൽ മതി.

ഇതിൽ x ആയി 1, 2, 3, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്താലോ ?

$$2^2 = 1^2 + (2 \times 1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$3^2 = 2^2 + (2 \times 2) + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$$

$$4^2 = 3^2 + (2 \times 3) + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$$

....

$$11^2 = 10^2 + (2 \times 10) + 1 = 100 + 20 + 1 = 121$$

$$12^2 = 11^2 + (2 \times 11) + 1 = 121 + 22 + 1 = 144$$

....

എന്നെല്ലാം കാണാം (**വർഗങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **പൂർണ്ണവർഗങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗത്തിൽ ഇത് കണ്ടതാണല്ലോ).

ഇനി $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ എന്നതിൽ y ആയി $\frac{1}{2}$ എടുത്താലോ ?

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 \times x \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= x^2 + \frac{1}{4} + x$$

$$= x^2 + x + \frac{1}{4}$$

അപ്പോൾ മറ്റൊരു ഉപതത്വമായി:

x ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$

ഇതിലും x ആയി എണ്ണൽസംഖ്യകളെടുത്താലോ ?

$$\left(1\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1^2 + 1 + \frac{1}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2\tfrac{1}{4}$$

$$\left(2\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2^2 + 2 + \frac{1}{4} = 4 + 2 + \frac{1}{4} = 6\tfrac{1}{4}$$

$$\left(3\tfrac{1}{2}\right)^2 = 3^2 + 3 + \frac{1}{4} = 9 + 3 + \frac{1}{4} = 12\tfrac{1}{4}$$

ഇതിന്റെയും ദശാംശരൂപം **വർഗങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (**ദശാംശവർഗങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

ഇനി ഈ സമവാക്യം നോക്കുക.

x ആയി പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \times x \times \frac{1}{x}$$

$$= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

ഇതിൽ x ആയി 2, 3, 4, ... എന്നീ എണ്ണൽസംഖ്യകളെടുത്താലോ?

$$\left(2\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2^2 + \frac{1}{2^2} + 2 = 6\tfrac{1}{4}$$

$$\left(3\tfrac{1}{3}\right)^2 = 3^2 + \frac{1}{3^2} + 2 = 11\tfrac{1}{9}$$

$$\left(4\tfrac{1}{4}\right)^2 = 4^2 + \frac{1}{4^2} + 2 = 18\tfrac{1}{16}$$

....

(1) ചുവടെയുള്ള വർഗങ്ങൾ മനസ്സിൽത്തന്നെ കണക്കാക്കുക:

(i) 15^2 (ii) 25^2 (iii) 33^2 (iv) $\left(5\tfrac{1}{2}\right)^2$ (v) $\left(10\tfrac{1}{2}\right)^2$ (vi) $\left(25\tfrac{1}{2}\right)^2$ (vii) $\left(5\tfrac{1}{5}\right)^2$

(2) തുകയുടെ വർഗത്തെക്കുറിച്ചുള്ള പൊതുതത്വത്തിൽ, ഒരു സംഖ്യ 2 എന്നെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന ഉപതത്വം എന്താണ് ? ഇതുപയോഗിച്ച് ചുവടെപ്പറയുന്നവ മനക്കണക്കായി ചെയ്യുക:

(i) 22^2 എത്രയാണ് ?

(ii) 52^2 എത്രയാണ് ?

(iii) $25^2 = 625$ ആണ്; 27^2 എത്രയാണ് ?

(3) $43^2 = 1849$ ആണ്.

(i) 44^2 എത്രയാണ് ? (ii) 46^2 എത്രയാണ് ?

സവിശേഷ സ്വഭാവമുള്ള ചില സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ പ്രത്യേകത മനസ്സിലാക്കാനും തുകയുടെ വർഗത്തെക്കുറിച്ചുള്ള സമവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി ഈ കണക്കുകൾ നോക്കുക:

15^2 $= (10+5)^2$ $= 10^2 + (10 \times 5 \times 2) + 5^2$ $= 100 + 100 + 25$ $= 225$	25^2 $= (20+5)^2$ $= 20^2 + (20 \times 5 \times 2) + 5^2$ $= 400 + 200 + 25$ $= 625$	35^2 $= (30+5)^2$ $= 30^2 + (30 \times 5 \times 2) + 5^2$ $= 900 + 300 + 25$ $= 1225$

അവസാന അക്കം (ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്തെ അക്കം) 5 ആയ എല്ലാ സംഖ്യകളുടെയും വർഗ ത്തിന്റെ അവസാനത്തെ രണ്ടക്കങ്ങൾ ചേർന്നാൽ 25 തന്നെ ആകുമോ ?

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിക്കാം. ഏതു സംഖ്യയുടെയും അവസാനത്തെ അക്കം, സംഖ്യയെ 10 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന മിച്ചമാണല്ലോ (അഞ്ചാം ക്ലാസിലെ **സംഖ്യാബന്ധ ങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **മിച്ചക്കണക്കുകൾ** എന്ന ഭാഗം).

അപ്പോൾ 5 ൽ അവസാനിക്കുന്ന ഒരു സംഖ്യയെ 10 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മിച്ചം 5.

അതിലെ ഹരണഫലം n എന്നെടുത്താൽ, ഇത്തരം സംഖ്യകളുടെ പൊതുരൂപം $10n + 5$ (ഏഴാം ക്ലാസിലെ **ബീജഗണിതം** എന്ന പാഠത്തി ലെ **മടങ്ങും മിച്ചവും** എന്ന ഭാഗം ഓർക്കുക).

ഈ രൂപത്തിലുള്ള ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗം എന്താണ് ?

$$(10n+5)^2 = (10n)^2 + (10n \times 5 \times 2) + 5^2$$
$$= 100n^2 + 100n + 25$$

ഇതിലെ $100n^2 + 100n$ എന്നതിനെ ഇങ്ങനെ എഴുതാമല്ലോ:

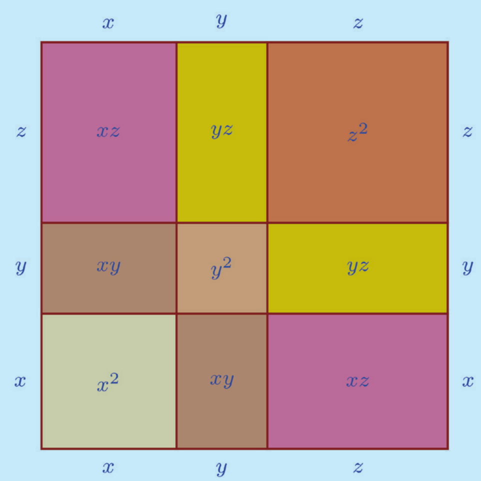
$$100n^2 + 100n = 100(n^2 + n)$$

അപ്പോൾ

$$(10n+5)^2 = 100(n^2+n) + 25$$

മൂന്നു സംഖ്യകൾ

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗം ജ്യാമിതീയ മായി കണക്കാക്കാൻ സമചതുരത്തെ നാലായി മുറിച്ചു പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടിയതുപോലെ, മൂന്നു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗത്തെയും ഇങ്ങനെ കാണാം:



ഇതിൽനിന്ന് ഇങ്ങനെ കിട്ടും:

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

അതായത്, $n^2 + n$ എന്ന സംഖ്യയെ 100 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 25 കൂട്ടിയതാണ് വർഗം.

ഏതു സംഖ്യയെയും 100 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ, അവസാനത്തെ രണ്ടക്കങ്ങളും 0.

അപ്പോൾ 25 കൂട്ടിയാൽ അവസാനത്തെ രണ്ടക്കങ്ങൾ ചേർന്ന് 25 ആകും.

ഉദാഹരണമായി, ഈ കണക്കനുസരിച്ച്

$$\begin{aligned} 65^2 &= ((6^2 + 6) \times 100) + 25 \\ &= (42 \times 100) + 25 \\ &= 4200 + 25 \\ &= 4225 \end{aligned}$$

ഇത്തരം വർഗങ്ങളിലെ മറ്റ് അക്കങ്ങൾ ചേർന്ന സംഖ്യയും കണക്കാക്കാം;

അതിന് $(10n + 5)^2 = 100(n^2 + n) + 25$ എന്ന സമവാക്യത്തിലെ $n^2 + n$ നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം

$$n^2 + n = n(n + 1)$$

അപ്പോൾ

$$(10n + 5)^2 = (n(n + 1) \times 100) + 25$$ എന്നാകും.

ഇതിൽ നിന്ന്, വർഗത്തിലെ അവസാനത്തെ 25 (രണ്ടക്കങ്ങൾ) മാറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ $n(n + 1)$ എന്നു കാണാമല്ലോ.

ഇതിലെ n എന്നത്, സംഖ്യയുടെ അവസാനത്തെ അക്കമായ 5 മാറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയാണല്ലോ. അപ്പോൾ വർഗം കണക്കാക്കേണ്ട സംഖ്യയിലെ 5 മാറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയെ അതിന്റെ അടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ്, വർഗത്തിലെ 25 മാറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ.

ഉദാഹരണമായി

$$\begin{aligned} 75^2 &= (7 \times 8 \times 100) + 25 \\ &= 5600 + 25 \\ &= 5625 \end{aligned}$$

195^2 ആയാലോ ?

ആദ്യം 19×20 കണക്കാക്കുക:

$$19 \times 20 = 380$$

ഇതിന്റെ അവസാനം 25 ചേർത്തുവച്ചാൽ 195 ന്റെ വർഗമായി

$$195^2 = 38025$$

76 ന്റെ കളി

$$76^2 = 5776$$

$$176^2 = 30976$$

$$276^2 = 76176$$

76 ൽ അവസാനിക്കുന്ന വേറെയും സംഖ്യകളുടെ വർഗം കണ്ടെത്തി നോക്കൂ. എന്തു പ്രത്യേകതയാണ് കാണുന്നത് ?

എന്തുകൊണ്ടാണിത് ?

76 ൽ അവസാനിക്കുന്ന ഏത് സംഖ്യയേയും $100n + 76$ എന്ന രൂപത്തിലെഴുതാം.

$$(100n + 76)^2 = 10000n^2 + 15200n + 5776.$$

n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും $10000n^2$ ന്റെയും $15200n$ ന്റെയും തുകയിൽ ഒന്നിന്റെയും പത്തിന്റെയും സ്ഥാനത്ത് പൂജ്യമായിരിക്കുമല്ലോ. ഇവയുടെ തുകയോട് 5776 കൂട്ടുമ്പോൾ അവസാനത്തെ രണ്ടക്കം 76 ആയിരിക്കും.

76 ന് പകരം മറ്റേതെങ്കിലും രണ്ടക്കസംഖ്യകൾക്ക് ഈ പ്രത്യേകതയുണ്ടോ ?

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

ഏതു സംഖ്യയെയും 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മിച്ചം 0, 1, 2 ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ആയിരിക്കു മല്ലോ.

മിച്ചം 0 ആണെങ്കിൽ, സംഖ്യ 3 ന്റെ ഗുണിതം; അപ്പോൾ 3 ന്റെ ഗുണിതമല്ലാത്ത സംഖ്യകളെ 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മിച്ചം 1 അല്ലെങ്കിൽ 2.

ഇത്തരം സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളെ 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലോ ?

സംഖ്യ	വർഗം	3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മിച്ചം
1	1	1
2	4	1
4	16	1
5	25	1

ഇത്തരം ഏതു സംഖ്യയുടെ വർഗത്തിനെ 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും മിച്ചം 1 തന്നെ ആയിരിക്കുമോ ? ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പരിശോധിക്കാം.

3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 മിച്ചം വരുന്ന സംഖ്യകളെയെല്ലാം

$$3n + 1, \ (n = 0, 1, 2, 3, ...)$$

എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാമല്ലോ (ഏഴാം ക്ലാസിലെ **ബീജഗണിതം** എന്ന പാഠത്തിലെ **മടങ്ങും മിച്ചവും** എന്ന ഭാഗം).

ഇത്തരം സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളോ ?

$$(3n + 1)^2 = (3n)^2 + (3n \times 1 \times 2) + 1^2$$

$$= 9n^2 + 6n + 1$$

ഇതിലെ $9n^2 + 6n$ എന്നതിനെ 3 ന്റെ ഗുണിതമായി എഴുതാം:

$$9n^2 + 6n = 3(3n^2 + 2n)$$

കമ്പ്യൂട്ടർ സഹായം

മുകളിലെ പട്ടിക ഉണ്ടാക്കാൻ പൈഥൻ ഭാഷയിൽ ഒരു പ്രോഗ്രാം എഴുതാം;

```
for n in range(1,11):
    if n%3! = 0:
        print (n, n**2, (n**2)%3)
```

ഇതിലെ ആദ്യത്തെ വരി, 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളായി *n* എടുക്കാനുള്ള നിർദേശമാണ് രണ്ടാമത്തെ വരിയിലെ *n*%3 എന്നത്, *n* നെ 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ച് മിച്ചം കാണാനുള്ള നിർദേശവും ! = 0 എന്നതിന്റെ അർഥം, പൂജ്യമല്ല എന്നുമാണ്. അപ്പോൾ ഈ വരി മുഴുവനായി if n% 3! = 0 എന്നു വായിക്കുമ്പോൾ അർഥം, *n* നെ 3 കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ മിച്ചം 0 അല്ലെങ്കിൽ എന്നാണ്.

ഈ നിബന്ധന അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ എന്തു ചെയ്യണമെന്നാണ് അവസാനത്തെ വരി പറയുന്നത്. ഇത്തരം സംഖ്യകൾ, അവയുടെ വർഗങ്ങൾ, അവയെ 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലുള്ള മിച്ചങ്ങൾ ഇവയെല്ലാം എഴുതിക്കാണിക്കുക എന്നാണ് ഈ നിർദേശം.

പ്രോഗ്രാം ഈ പട്ടിക തരും

```
1   1    1
2   4    1
4   16   1
5   25   1
7   49   1
8   64   1
10  100  1
```

അപ്പോൾ

$$(3n+1)^2 = 3(3n^2+2n)+1$$

അതായത്, ഇത്തരം ഏതു വർഗവും, 3 ന്റെ ഗുണിതത്തിനോട് 1 കൂട്ടിയതാണ്; അഥവാ, 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 മിച്ചം വരുന്നവയാണ്.

ഇനി 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 2 മിച്ചം വരുന്ന സംഖ്യകളോ ?

ഇവയുടെ പൊതുരൂപം

$$3n+2, \ (n = 0, 1, 2, 3, ...)$$

ഇവയുടെ വർഗങ്ങൾ

$$(3n+2)^2 = 9n^2 + 12n + 4 = 3(3n^2+4n)+4$$

ഇത്തരമൊരു സംഖ്യയെ 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലുള്ള മിച്ചം എന്താണ് ?

സമവാക്യത്തിലെ 4 നെ 3 + 1 എന്നെഴുതാമല്ലോ

അപ്പോൾ

$$(3n+2)^2 = 3(3n^2+4n)+3+1$$

$$= 3(3n^2+4n+1)+1$$

വീണ്ടും 3 ന്റെ ഗുണിതത്തിനോട് 1 കൂട്ടിയ സംഖ്യതന്നെ കിട്ടിയില്ലേ ?

അതായത്, സംഖ്യയെ 3 കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള മിച്ചം 2 ആയാലും, വർഗത്തിനെ 3 കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 1 തന്നെയാണ്.

അപ്പോൾ എന്തു പറയാം ?

3 ന്റെ ഗുണിതമല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യയുടെ വർഗത്തിനെയും 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, മിച്ചം 1 ആണ്.

3 ന്റെ ഗുണിതമായ ഏതു സംഖ്യയുടെ വർഗവും 3 ന്റെ ഗുണിതം തന്നെയല്ലേ (എന്തുകൊണ്ട്?)

പൊതുവേ ഇതൊരു തത്വമായി ഇങ്ങനെ പറയാം.

ഏതു പൂർണ്ണവർഗത്തെയും 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, മിച്ചം 0 അല്ലെങ്കിൽ 1 ആണ്.

ഇത് തിരിച്ച് ഇങ്ങനെയും പറയാം:

3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 2 മിച്ചം വരുന്ന സംഖ്യകളൊന്നും പൂർണ്ണവർഗങ്ങളല്ല.

(1) കുറെ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ വർഗം കണക്കാക്കി, ചുവടെ പറയുന്ന കാര്യങ്ങൾ പരിശോധിക്കുക. അവ ശരിയാകാനുള്ള കാരണം വിശദീകരിക്കുക:

(i) ഒറ്റസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം വർഗങ്ങളും ഒറ്റസംഖ്യകളാണ്.

(ii) ഏത് ഒറ്റസംഖ്യയുടെയും വർഗത്തെ 4 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന മിച്ചം 1 ആണ്.

(iii) ഏത് ഒറ്റസംഖ്യയുടെയും വർഗത്തെ 8 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന മിച്ചം 1 ആണ്.

(2) കുറെ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളെ 4 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന മിച്ചം കണക്കാക്കുക. ചുവടെ പറയുന്ന കാര്യങ്ങളുടെ കാരണം വിശദീകരിക്കുക.

(i) ഏതു എണ്ണൽസംഖ്യയുടെയും വർഗത്തെ 4 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന മിച്ചം 0 അല്ലെങ്കിൽ 1 ആണ്.

(ii) 4 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മിച്ചം 2 അല്ലെങ്കിൽ 3 ആകുന്ന സംഖ്യകളൊന്നും പൂർണ്ണവർഗങ്ങളല്ല.

(3) ഈ കണക്കുകൾ നോക്കുക:

$$3 = 2^2 - 1^2$$

$$5 = 3^2 - 2^2$$

$$7 = 4^2 - 3^2$$

കുറേക്കൂടി ഒറ്റസംഖ്യകൾ എടുത്ത്, പൂർണ്ണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാൻ കഴിയുമോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. ഒന്നിനേക്കാൾ വലിയ എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളെയും ഇങ്ങനെ എഴുതാൻ കഴിയുന്നതിന്റെ കാരണം വിശദീകരിക്കുക.

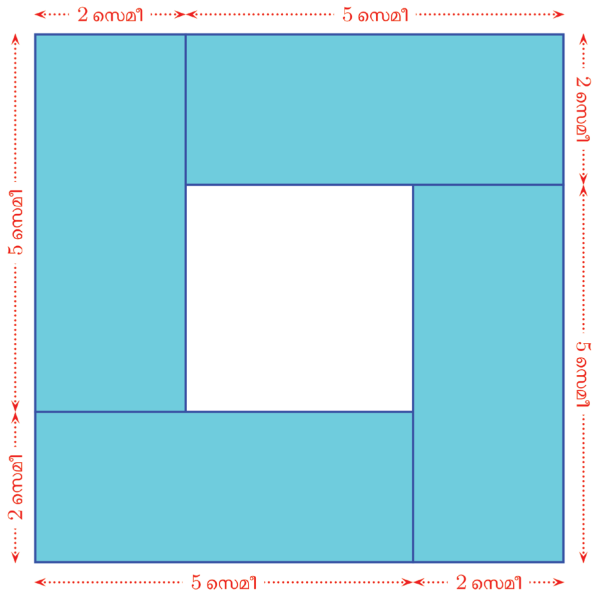
(സൂചന : ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ പൊതുരൂപം ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർക്കുക).

(4) ഒന്നിൽ അവസാനിക്കുന്ന ഏതൊരു സംഖ്യയുടെയും വർഗം 1 ൽ തന്നെ അവസാനിക്കും എന്ന് സമർഥിക്കുക. 5 ൽ അവസാനിക്കുന്ന സംഖ്യയുടേയോ ?

6 ൽ അവസാനിക്കുന്ന സംഖ്യയായാലോ ?

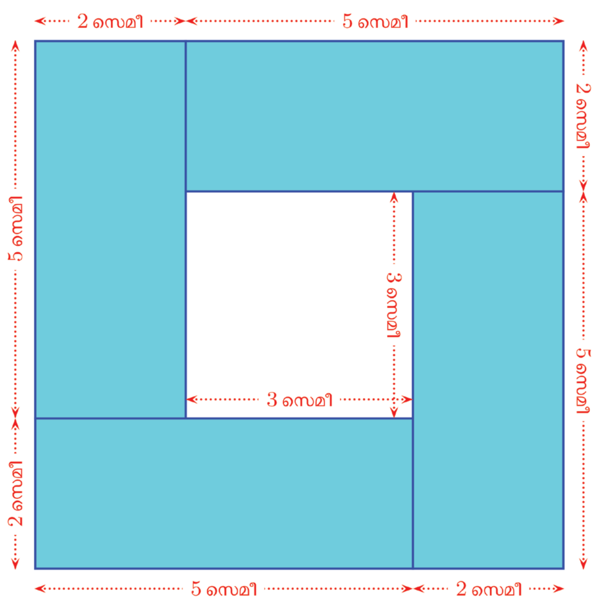
വ്യത്യാസവർഗം

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ഒരേ വലുപ്പമുള്ള നാലു ചതുരങ്ങൾ ചേർത്ത് ഒരു സമചതുരമുണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്നു. സമചതുരത്തിനകത്തെ ചെറിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

ചെറിയ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കാമല്ലോ:

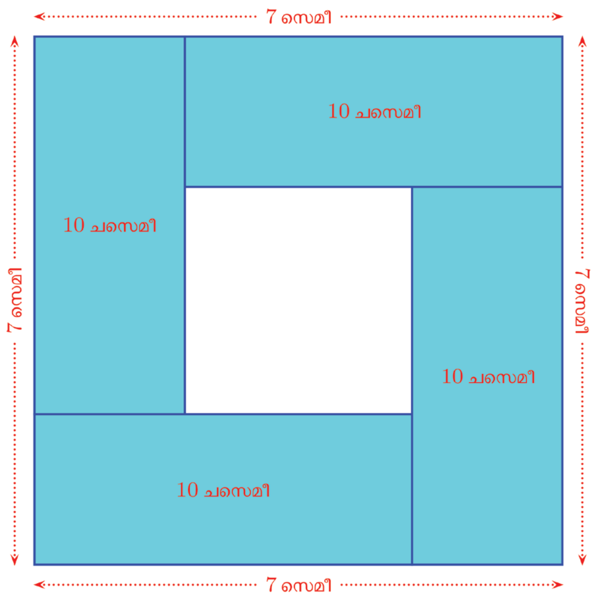


അതായത് ഇതൊരു സമചതുരമാണ്; വശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ.

പരപ്പളവ്

$$3^2 = 9 \text{ ചസെമീ}$$

മറ്റൊരു രീതിയിലും ഇത് കണക്കാക്കാം; വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിൽനിന്ന്, നാലു ചതുരങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ് കുറയ്ക്കുക:



അതായത്, പരപ്പളവ്

$$7^2 - (10 \times 4) = 49 - 40 = 9 \text{ ചസെമീ}$$

ഇതിൽ ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കിയത് എങ്ങനെയാണ് ?

$$5 - 2 = 3$$

വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളമോ ?

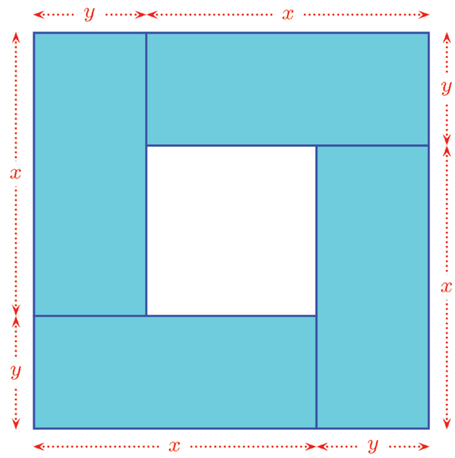
$$5 + 2 = 7$$

അപ്പോൾ ഇവിടെ കണ്ട കണക്ക്, സംഖ്യകൾ മാത്രമായി പറഞ്ഞാലോ ?

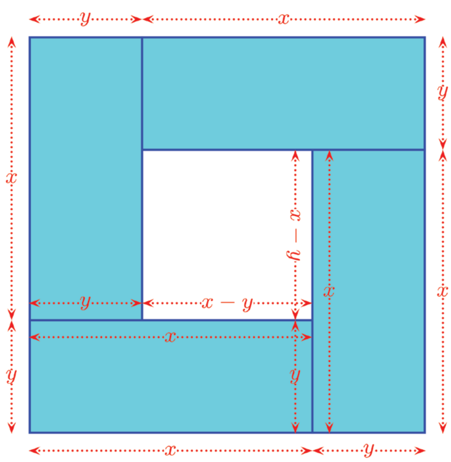
$$(5 - 2)^2 = (5 + 2)^2 - (5 \times 2 \times 4)$$

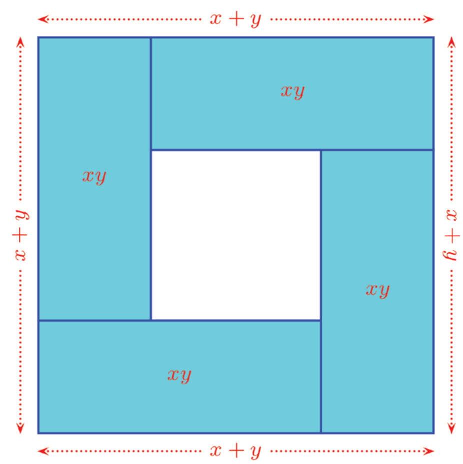
5 നും 2 നും പകരം മറ്റു സംഖ്യകളെടുത്താലും ഇത് ശരിയാകുമോ ?

ഒരുപോലെയുള്ള നാലു ചതുരങ്ങളുടെയും വശങ്ങളുടെ നീളം x, y എന്നെടുത്തു നോക്കാം:



നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് രണ്ടുതരത്തിൽ കണക്കാക്കി നോക്കാം:





ഇടതുവശത്തെ ചിത്രത്തിൽനിന്ന്

ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $(x-y)^2$

വലതുവശത്തെ ചിത്രത്തിൽനിന്ന്

ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $(x+y)^2 - 4xy$

അപ്പോൾ

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$$

ഇതിലെ $(x+y)^2$ എന്നത് ഇങ്ങനെ എഴുതാമല്ലോ:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ സമവാക്യത്തിൽ ഇതുപയോഗിച്ചാൽ

$$(x-y)^2 = (x^2 + y^2 + 2xy) - 4xy$$

സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുവശത്ത് കുറയ്ക്കുന്ന $4xy$ എന്നത് $2xy + 2xy$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ $4xy$ കുറയ്ക്കാൻ, ആദ്യം ഒരു $2xy$ യും, പിന്നെ ഒരു $2xy$ യും കുറച്ചാലോ ? (ഏഴാം ക്ലാസിലെ **കണക്കിലെ ചുരുക്കെഴുത്ത്** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഒന്നൊന്നായും മൊത്തമായും** എന്ന ഭാഗം ഓർക്കുക).

$$\begin{aligned}(x-y)^2 &= (x^2 + y^2 + 2xy) - 4xy \\ &= x^2 + y^2 + 2xy - 2xy - 2xy \\ &= x^2 + y^2 - 2xy\end{aligned}$$

ഇതിൽ x, y ഏതു സംഖ്യകളും ആകാമല്ലോ. അതായത്

***x, y* ഏതു സംഖ്യകൾ ആയാലും $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$**

ഇത് സാധാരണ ഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാലോ ?

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗം, സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുകയിൽ നിന്ന് അവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് കുറച്ചതാണ്

ചില സംഖ്യകളുടെ വർഗം കണക്കാക്കാൻ ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, 99^2 കണക്കാക്കാൻ $99 = (90 + 9)$ എന്നെഴുതി, തുകയുടെ വർഗം കണക്കാക്കുന്നതിനു പകരം, $99 = (100 - 1)$ എന്നെഴുതി, വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗം കണക്കാക്കാം:

$$\begin{aligned}99^2 &= (100-1)^2 \\ &= 100^2 - (100 \times 1 \times 2) + 1^2 \\ &= 10000 - 200 + 1 \\ &= 9801\end{aligned}$$

ഇതുപോലെ

$$\begin{aligned}48^2 &= (50-2)^2 \\ &= 50^2 - (50 \times 2 \times 2) + 2^2 \\ &= 2500 - 200 + 4 \\ &= 2304\end{aligned}$$

(1) ചുവടെയുള്ള വർഗങ്ങൾ മനസ്സിൽ കണക്കാക്കുക.

(i) 29^2 (ii) 38^2 (iii) 999^2 (iv) $\left(9\frac{1}{2}\right)^2$ (v) $(9.7)^2$

(2) ഈ കണക്കുകൾ നോക്കുക:

$$3^2 - (2 \times 3) = 3 = 2^2 - 1$$

$$4^2 - (2 \times 4) = 8 = 3^2 - 1$$

$$5^2 - (2 \times 5) = 15 = 4^2 - 1$$

ഇവയിലെ പൊതുതത്വം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

തുകയുടെയും, വ്യത്യാസത്തിന്റെയും വർഗങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന് മറ്റു ചില സമവാക്യങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം.

ഉദാഹരണമായി

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$
$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

എന്ന രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളും കൂട്ടിയാൽ എന്തു കിട്ടും ?

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

ഇതു തിരിച്ചെഴുതിയാൽ

$$2(x^2 + y^2) = (x + y)^2 + (x - y)^2$$

ഇതിൽ x, y ആയി പല എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്താൽ, ഇങ്ങനെയെല്ലാം കിട്ടുമല്ലോ.

$$2(2^2 + 1^2) = 10 = 3^2 + 1^2$$

$$2(3^2 + 2^2) = 26 = 5^2 + 1^2$$

$$2(5^2 + 1^2) = 52 = 6^2 + 4^2$$

$$2(6^2 + 4^2) = 104 = 10^2 + 2^2$$

ഇങ്ങനെ ഏതു രണ്ടു പൂർണ്ണവർഗങ്ങളുടെ തുകയെടുത്താലും, അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങിനെയും മറ്റു രണ്ടു പൂർണ്ണവർഗങ്ങളുടെ തുകയായി എഴുതാം.

ഇതുപയോഗിച്ച് 20, 40, 80 എന്നീ സംഖ്യകളെ രണ്ട് പൂർണ്ണവർഗങ്ങളുടെ തുകയായി എഴുതാൻ നോക്കൂ:

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം.

വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗത്തെക്കുറിച്ചുള്ള സമവാക്യം കിട്ടിയത് എങ്ങനെയാണ് ?

ആദ്യം

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$$

എന്ന സമവാക്യം ഉണ്ടാക്കിയിട്ടല്ലേ ? എന്താണ് ഇതിന്റെ അർഥം ?

$(x+y)^2$ എന്ന സംഖ്യയിൽ നിന്ന് $4xy$ എന്ന സംഖ്യ കുറച്ചാൽ, $(x-y)^2$ എന്ന സംഖ്യ കിട്ടും. അപ്പോൾ $(x+y)^2$ ൽ നിന്ന് $(x-y)^2$ കുറച്ചാൽ $4xy$ കിട്ടുമല്ലോ. അതായത്

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$$

ഇതു തിരിച്ചെഴുതിയാൽ

$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$$

ഇതിൽ y ആയി 1 എടുത്താൽ ഇങ്ങനെയാകും:

$$4x = (x+1)^2 - (x-1)^2$$

ഇനി x ആയി 2, 3, 4, ... എന്നീ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്താൽ ഇങ്ങനെയെല്ലാം കിട്ടും.

$$8 = 3^2 - 1^2$$

$$12 = 4^2 - 2^2$$

$$16 = 5^2 - 3^2$$

....

അതായത് 8 മുതലുള്ള 4 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളെയെല്ലാം രണ്ടു പൂർണ്ണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാം.

1 ഒഴിച്ചുള്ള ഒറ്റസംഖ്യകളെയെല്ലാം രണ്ടു പൂർണ്ണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാം എന്നു നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ.

ഏത് സംഖ്യയെയും രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ വർഗവ്യത്യാസമായി എഴുതാൻ പറ്റുമോ എന്നു നോക്കാം.

പൈഥാഗറസ് ത്രയങ്ങൾ

മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ രണ്ടെണ്ണത്തിന്റെ വർഗങ്ങളുടെ തുക മൂന്നാമത്തേതിന്റെ വർഗത്തിന് തുല്യമായാൽ, ഈ മൂന്ന് സംഖ്യകളെ ഒരു പൈഥാഗറസ് ത്രയം എന്നാണ് പറയുക എന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. ഉദാഹരണമായി

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

ആയതിനാൽ 3, 4, 5 എന്ന മൂന്നു സംഖ്യകൾ ഒരു പൈഥാഗറസ് ത്രയമാണ്. ഏതാണ്ട് ബി.സി.ഇ. രണ്ടായിരത്തിലെ ബാബിലോണിയയിൽ നിന്നുള്ള ഒരു കളിമൺ പലകയിൽ ഇത്തരം ത്രയങ്ങളുടെ ഒരു പട്ടിക തന്നെ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

ഇത്തരം എല്ലാ ത്രയങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഒരു വഴിയുണ്ട്. $m > n$ ആയ രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്ത് ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നതുപോലെ a, b, c കണക്കാക്കുക.

$$a = m^2 - n^2$$

$$b = 2mn$$

$$c = m^2 + n^2$$

ഇനി

$$(x-y)^2 + 4xy = (x+y)^2$$

എന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച്

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (m^2-n^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= (m^2-n^2)^2 + 4m^2n^2 \\ &= (m^2+n^2)^2 \\ &= c^2 \end{aligned}$$

എന്നു കാണാം.

ഏതാണ്ട് ബി.സി.ഇ. മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടിൽത്തന്നെ ഗ്രീസിലെ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർക്ക് ഈ രീതി അറിയാമായിരുന്നു.

അതിനായി $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$ എന്ന സമവാക്യത്തിനെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2$$

ഈ സമവാക്യത്തിൽ

$$\frac{1}{4}(x+y)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

എന്നും

$$\frac{1}{4}(x-y)^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

എന്നും എഴുതിയാൽ, സമവാക്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

എന്താണ് ഇതിന്റെ അർഥം?

ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെയും (എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ആകണമെന്നില്ല) ഗുണനഫലത്തിനെ രണ്ടു വർഗങ്ങളുടെ (പൂർണ്ണവർഗങ്ങളാകണമെന്നില്ല) വ്യത്യാസമായി എഴുതാം; കുറേക്കൂടി കൃത്യ മായി പറഞ്ഞാൽ

ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെയും ഗുണനഫലം, അവയുടെ തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും പകുതികളുടെ വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമാണ്

ഏതു സംഖ്യ x നെയും $x \times 1$ എന്നെഴുതാമല്ലോ. അപ്പോൾ മുകളിൽ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്

$$x = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2$$

ഉദാഹരണമായി

$$11 = \left(\frac{11+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{11-1}{2}\right)^2 = 6^2 - 5^2$$

$$10 = \left(\frac{10+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{10-1}{2}\right)^2 = \left(5\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(4\tfrac{1}{2}\right)^2$$

ചില ഗുണനഫലങ്ങൾ എളുപ്പം കണക്കാക്കാനും മുകളിൽപ്പറഞ്ഞ രീതി ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി

135×65 നോക്കുക. തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും പകുതി കണക്കാക്കിയാൽ

$$\frac{135+65}{2} = 100$$

$$\frac{135-65}{2} = 35$$

എന്നു കിട്ടും. ഇപ്പോൾ കണ്ട തത്വമനുസരിച്ച്,

$$135 \times 65 = 100^2 - 35^2$$
$$= 10000 - 1225$$
$$= 8775$$

ഇതുപോലെ, 26.5×23.5 കണക്കാക്കാം:

$$26.5 \times 23.5 = \left(\frac{26.5 + 23.5}{2}\right)^2 - \left(\frac{26.5 - 23.5}{2}\right)^2$$
$$= 25^2 - 1.5^2$$
$$= 625 - 2.25$$
$$= 622.75$$

(1) ഈ കണക്കുകൾ നോക്കുക:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{2} \qquad 2 = 2 \times 1^2$$
$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2\frac{1}{2}\right)^2 = 8\frac{1}{2} \qquad 8 = 2 \times 2^2$$
$$\left(2\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 18\frac{1}{2} \qquad 18 = 2 \times 3^2$$

(i) ഈ ക്രമത്തിൽ അടുത്ത രണ്ടു വരികൾ കൂടി എഴുതുക.

(ii) ഇവയിലെ പൊതുതത്വം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(2) ചില എണ്ണൽസംഖ്യകളെ രണ്ടു പൂർണ്ണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി രണ്ടുതരത്തിൽ എഴുതാം. ഉദാഹരണമായി

$$24 = 7^2 - 5^2 = 5^2 - 1^2$$
$$32 = 9^2 - 7^2 = 6^2 - 2^2$$
$$40 = 11^2 - 9^2 = 7^2 - 3^2$$

8 ന്റെ തുടർന്നുള്ള ചില ഗുണിതങ്ങളെക്കൂടി പൂർണ്ണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി രണ്ട് തരത്തിൽ എഴുതുക.

24 മുതലുള്ള 8 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളെയെല്ലാം ഇങ്ങനെ രണ്ടുതരത്തിൽ എഴുതുന്ന രീതി, ബീജഗണിതത്തിലൂടെ വിശദീകരിക്കുക.

(3) ചില സംഖ്യകളെ രണ്ടുപൂർണ്ണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി രണ്ടുതരത്തിൽ എഴുതിയിരിക്കുന്നത് നോക്കൂ:

$$15 = 8^2 - 7^2 = 4^2 - 1^2$$
$$21 = 11^2 - 10^2 = 5^2 - 2^2$$
$$35 = 18^2 - 17^2 = 6^2 - 1^2$$

(i) 15, 21, 35 എന്നീ സംഖ്യകളെ രണ്ടു ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എങ്ങനെയെല്ലാം എഴുതാം ?

(ii) രണ്ടു പൂർണ്ണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി രണ്ടുതരത്തിൽ എഴുതാവുന്ന ഇത്തരത്തിലുള്ള മറ്റു രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(iii) ഇതിൽ നിന്ന് കിട്ടുന്ന ഒരു പൊതുതത്വം എന്താണ് ?

(4) ചുവടെയുള്ള ഗുണനഫലങ്ങളെ രണ്ടു വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതി കണക്കാക്കുക:

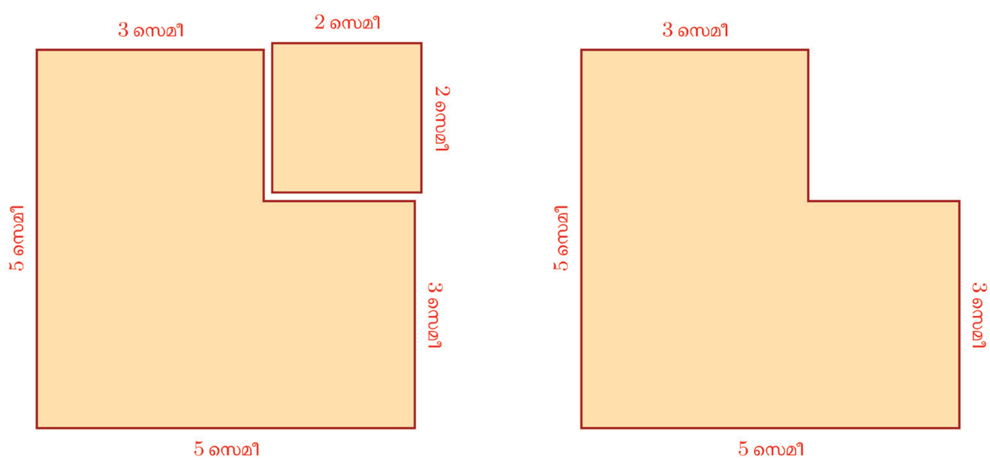
(i) 78×22 (ii) 301×299 (iii) $2\frac{1}{3} \times 1\frac{2}{3}$ (iv) 10.7×9.3

(5) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ജോടി ഗുണനത്തിലും ഏതിലാണ് വലിയ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതെന്ന് ഗുണിച്ചു നോക്കാതെ കണ്ടുപിടിക്കുക:

(i)	75×25	76×24
(ii)	76×24	74×26
(iii)	10.6×9.4	10.4×9.6

വർഗവ്യത്യാസം

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



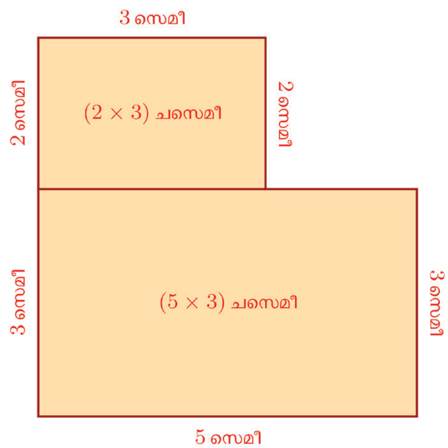
ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ മൂലയിൽനിന്ന് ചെറിയൊരു സമചതുരം മുറിച്ചു മാറ്റിയിരിക്കുന്നു. മിച്ചമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

എളുപ്പമല്ലേ?

വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിൽ നിന്ന്, ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കുറയ്ക്കുക

$$5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21 \text{ ചസെമീ}$$

ഇതു മറ്റൊരു രീതിയിലും കണക്കാക്കാം. മിച്ചമുള്ള ഭാഗത്തിനെ രണ്ടു ചതുരങ്ങളായി ഭാഗിക്കാമല്ലോ. ഇവയുടെ പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടിയാൽ മതി:



മിച്ചമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

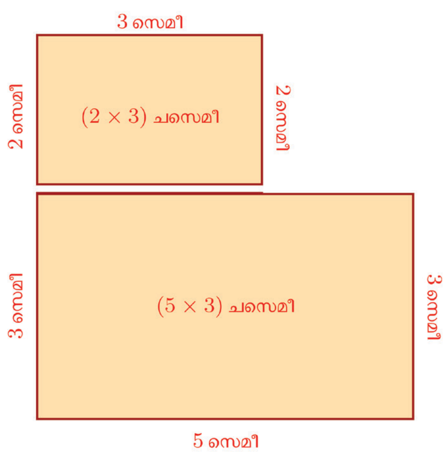
$$(5 \times 3) + (2 \times 3) = 15 + 6 = 21 \text{ ചസെമീ}$$

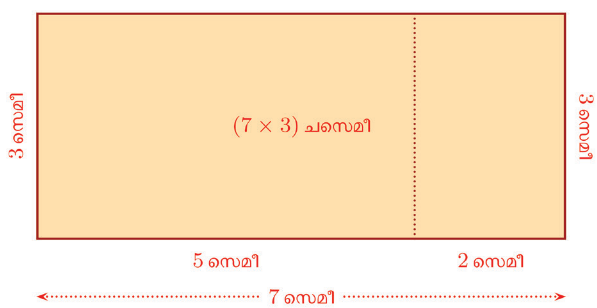
കണക്കുകൂട്ടൽ ഇങ്ങനെയുമാവാം:

$$(5 \times 3) + (2 \times 3) = (5 + 2) \times 3 = 7 \times 3 = 21$$

ഈ കണക്കുകൂട്ടലിന്റെ അവസാനം, 7 ഉം 3 ഉം ആണല്ലോ ഗുണിച്ചത്. വശങ്ങൾ 7 സെന്റിമീറ്ററും 3 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവല്ലേ ഇത് ?

അപ്പോൾ മിച്ചമുള്ള ഭാഗത്തിനെ ഇത്തരമൊരു ചതുരമാക്കാമോ?





മുകളിലെ ചെറിയ ചതുരം മുറിച്ചെടുത്ത്, വലിയ ചതുരത്തിന്റെ വലതുവശത്ത് ചേർത്തു വച്ചാൽ മതി. ഈ മാറ്റം സംഖ്യകളായി എഴുതിയാൽ,

$$5^2 - 2^2 = 7 \times 3$$

ഇതിൽ ഇടതുവശത്തെ 5, 2 എന്നീ സംഖ്യകളിൽനിന്ന്, വലതുവശത്തെ 7 ഉം 3 ഉം കിട്ടിയതെങ്ങനെ ?

$$7 = 5 + 2$$

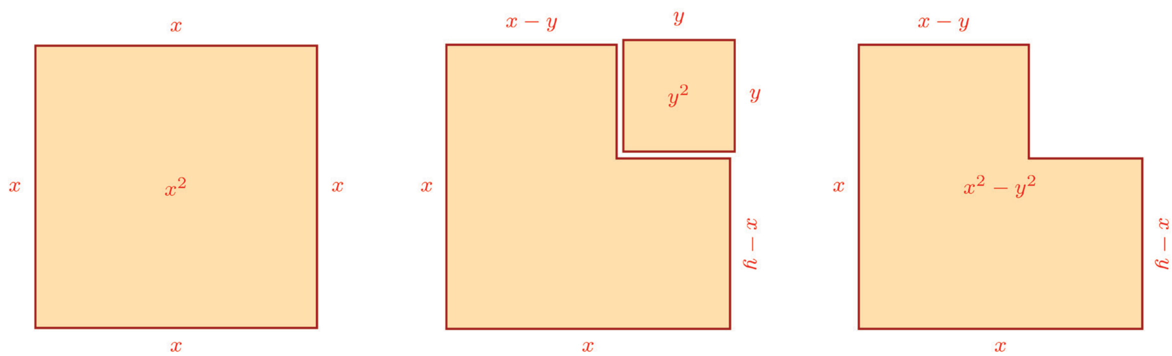
$$3 = 5 - 2$$

അപ്പോൾ

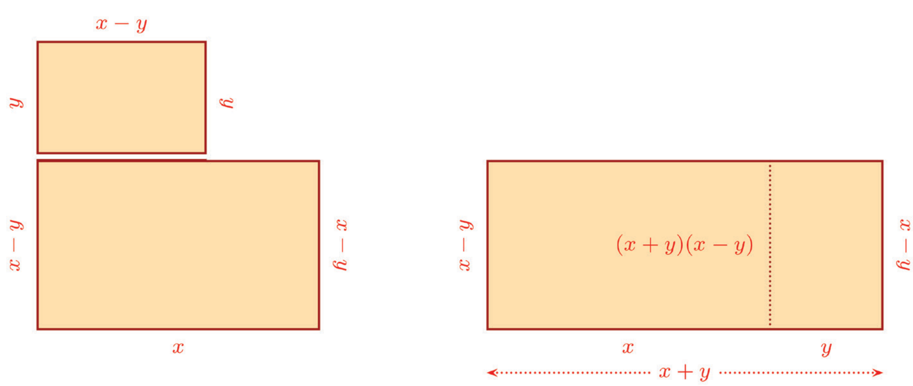
$$5^2 - 2^2 = (5 + 2) \times (5 - 2)$$

ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താലും ഇതുപോലെ വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം, തുകയുടെയും, വ്യത്യാസത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാകുമോ ?

സംഖ്യകൾ x, y എന്നെടുത്ത്, സമചതുരപ്രശ്നത്തിന്റെ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കാം:



നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ മുകളിൽനിന്നൊരു ചതുരം മുറിച്ചെടുത്ത്, വലതുഭാഗത്ത് ചേർത്തുവയ്ക്കാം.



അപ്പോൾ ഇനി ഇക്കാര്യം ഒരു പൊതുതത്വമായി എഴുതാമല്ലോ.

> x, y **ഏതു സംഖ്യകൾ ആയാലും** $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

ഇത് സാധാരണ ഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാലോ ?

> **രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം, സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്**

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തെ വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതുന്ന രീതി കഴിഞ്ഞ ഭാഗത്ത് കണ്ടല്ലോ. മറിച്ച്, രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുന്ന രീതിയാണ് ഇപ്പോൾ കണ്ടത്.

ഉദാഹരണമായി

$$168^2 - 162^2 = (168 + 162) \times (168 - 162)$$
$$= 330 \times 6$$
$$= 1980$$

ഭിന്നസംഖ്യകളിലും ഇതു ചെയ്യാം:

$$\left(5\frac{1}{2}\right)^2 - \left(4\frac{1}{2}\right)^2 = \left(5\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}\right) \times \left(5\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2}\right)$$
$$= 10 \times 1 = 10$$

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ, y ആയി 1 എടുത്താൽ, അത് ഇങ്ങനെയാകും:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ എന്നും എഴുതാം

ഇത് തിരിച്ചു വായിച്ചാൽ

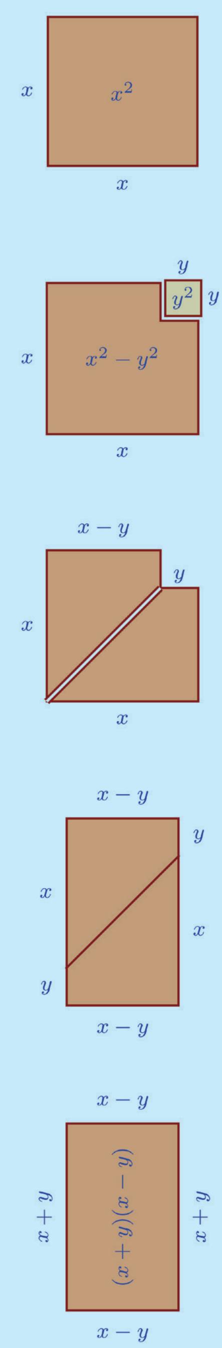
$$(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$$

ഇതിൽ x ആയി 2, 3, 4, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്താൽ ഇങ്ങനെയെല്ലാം കാണാം:

$$1 \times 3 = 2^2 - 1$$
$$2 \times 4 = 3^2 - 1$$
$$3 \times 5 = 4^2 - 1$$

....

മറ്റൊരു രീതി



ഇത് സാധാരണഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാലോ ?

അടുത്തടുത്ത മൂന്നു എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം, നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ വർഗത്തിൽനിന്ന് ഒന്നു കുറച്ചതാണ്.

അടുത്തടുത്ത മൂന്നു എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സംഖ്യകളുടെ തുക, നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് എന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർക്കുക (**ബീജഗണിതം** എന്ന പാഠത്തിലെ **സംഖ്യകളും ബീജഗണിതവും** എന്ന ഭാഗം).

(1) ചുവടെയുള്ള ക്രിയകൾ മനക്കണക്കായി ചെയ്യുക.

(i) $68^2 - 32^2$ (ii) $\left(3\frac{1}{2}\right)^2 - \left(2\frac{1}{2}\right)^2$ (iii) $3.6^2 - 1.4^2$

(2) ഈ കണക്കുകൾ നോക്കുക.

$$3^2 - 2^2 = 5 = 3 + 2$$

$$4^2 - 3^2 = 7 = 4 + 3$$

$$5^2 - 4^2 = 9 = 5 + 4$$

(i) ഈ ക്രമത്തിൽ അടുത്ത രണ്ടു വരികൾ കൂടി എഴുതുക.

(ii) ഇതിലെ പൊതുതത്വം ബീജഗണിത സമവാക്യമായി എഴുതുക.

(iii) ഈ പൊതുതത്വം സാധാരണ ഭാഷയിൽ എഴുതുക.

(3) കലണ്ടറിൽ ഒൻപതു സംഖ്യകളുള്ള ഒരു സമചതുരമെടുത്ത്, നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ ഇടതും വലതും, മുകളിലും താഴെയും ഉള്ള സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക:

ഞായർ	തിങ്കൾ	ചൊവ്വ	ബുധൻ	വ്യാഴം	വെള്ളി	ശനി
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

ഇടതും വലതുമുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും, മുകളിലും താഴെയുമുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും കണക്കാക്കി, അവയുടെ വ്യത്യാസവും കണക്കാക്കുക:

$$8 \times 10 = 80$$
$$80 - 32 = 48$$
$$2 \times 16 = 32$$

ഇതുപോലെ ഒൻപതു സംഖ്യകളുള്ള മറ്റു സമചതുരങ്ങളെടുത്ത് ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്യുക. എല്ലാ സമചതുരത്തിലും വ്യത്യാസം 48 കിട്ടുന്നതിന്റെ കാരണം, ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(*സൂചന: നടുവിലെ സംഖ്യ x എന്നെടുക്കുകയാണ് സൗകര്യം*)

(4) മുകളിലെ കണക്കിലെപ്പോലെ കലണ്ടറിൽ ഒൻപതു സംഖ്യകളുടെ സമചതുരവും, അതിന്റെ നാലു കോണുകളിലുമുള്ള സംഖ്യകളും അടയാളപ്പെടുത്തുക:

ഞായർ	തിങ്കൾ	ചൊവ്വ	ബുധൻ	വ്യാഴം	വെള്ളി	ശനി
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

കോണോടുകോൺ വരുന്ന സംഖ്യാജോടികൾ ഗുണിച്ച് വ്യത്യാസം കണക്കാക്കുക.

$$15 \times 3 = 45$$
$$45 - 17 = 28$$
$$1 \times 17 = 17$$

ഇതുപോലെ ഒൻപതു സംഖ്യകളുള്ള മറ്റു സമചതുരങ്ങളെടുത്ത് ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്യുക. എല്ലാ സമചതുരത്തിലും വ്യത്യാസം 28 കിട്ടുന്നതിന്റെ കാരണം, ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(5) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 20 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന് ഈ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തെക്കാൾ 2 സെന്റിമീറ്റർ നീളം കൂടുതലും, മറ്റൊരു വശത്തിന് സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തെക്കാൾ 2 സെന്റിമീറ്റർ നീളം കുറവുമാണ്.

(i) ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ് ?

(ii) സമചതുരത്തിന്റെയും ചതുരത്തിന്റെയും പരപ്പളവുകൾ എത്രയാണ് ?

(6) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന് ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിനേക്കാൾ നീളം കൂടുതലും മറ്റൊരു വശത്തിന് ഈ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തേക്കാൾ അത്രതന്നെ നീളം കുറവുമാണ്.

(i) സമചതുരത്തിന്റെയും ചതുരത്തിന്റെയും ചുറ്റളവുകളെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം ?

(ii) സമചതുരത്തിനാണോ, ചതുരത്തിനാണോ പരപ്പളവ് കൂടുതൽ ?

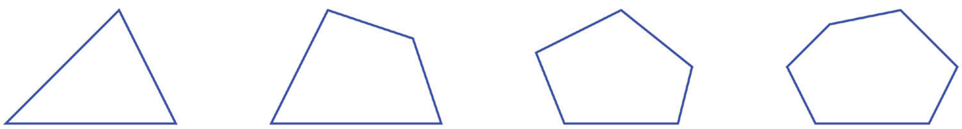
1 നേക്കാൾ വലിയ എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളേയും ചില ഇരട്ടസംഖ്യകളേയും രണ്ട് പൂർണ്ണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാം എന്ന് കണ്ടല്ലോ. ഏതുതരം എണ്ണൽ സംഖ്യകളെയാണ് രണ്ട് പൂർണ്ണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാൻ കഴിയാത്തത് ?

4

ബഹുഭുജങ്ങൾ

പേരുകൾ

നേർവരകൾ മാത്രം ചേർന്ന പല രൂപങ്ങൾ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ



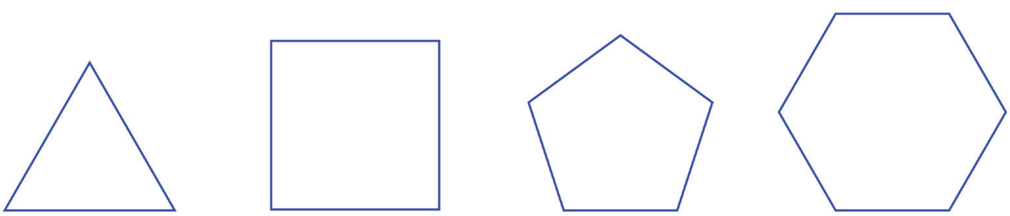
ത്രികോണം	ചതുർഭുജം	പഞ്ചഭുജം	ഷഡ്ഭുജം
Triangle	Quadrilateral	Pentagon	Hexagon

ത്രികോണത്തിന് മൂന്നു വശങ്ങളും, മൂന്നു മൂലകളും;

ചതുർഭുജത്തിന് വശങ്ങളും മൂലകളും നാലായി; പഞ്ചഭുജത്തിന് അഞ്ച്, ഷഡ്ഭുജത്തിന് ആറ്.

വശങ്ങളുടെയും മൂലകളുടെയും എണ്ണം കൂട്ടി, ഇതുപോലെയുള്ള രൂപങ്ങൾ എത്ര വേണമെങ്കിലും വരയ്ക്കാമല്ലോ. ഇവയുടെയെല്ലാം പൊതുവായ പേര് **ബഹുഭുജം (Polygon)** എന്നാണ്.

മുകളിലെ ചിത്രങ്ങളെല്ലാം കുറേക്കൂടി ഭംഗിയാക്കാം:



ഇപ്പോൾ ഓരോ ബഹുഭുജത്തിന്റേയും വശങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ നീളമാണ്; കോണുകൾക്കെല്ലാം ഒരേ വലുപ്പവും. ഇത്തരം ബഹുഭുജങ്ങളെ **സമബഹുഭുജം (Regular polygon)** എന്നു പറയുന്നു.

കോണുകൾ

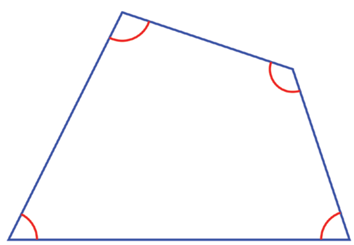
ഏതു ത്രികോണത്തിലും കോണുകളെല്ലാം കൂട്ടിയാൽ 180° കിട്ടുമെന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (**സമാന്തരവരകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ത്രികോണക്കണക്ക്** എന്ന ഭാഗം).

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകൾ നാലും കൂട്ടിയാലോ ?

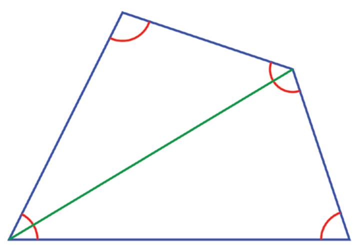
ചതുരമാണെങ്കിൽ ഓരോ കോണും 90° ; എല്ലാം കൂടി $90° \times 4 = 360°$

എല്ലാ ചതുർഭുജങ്ങളിലും ഇതു ശരിയാകുമോ ?

ഈ ചതുർഭുജം നോക്കൂ:



ഒരു വികർണ്ണം വരച്ചാൽ ഇതിലെ രണ്ടു കോണുകൾ രണ്ടായി മുറിയും.



വിചിത്ര ബഹുഭുജങ്ങൾ

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.

ഇവയും നേർവരകൾ മാത്രം ഉപയോഗിച്ചാണ് വരച്ചിരിക്കുന്നത്. അതിനാൽ ഇവയേയും ബഹുഭുജങ്ങളായി ചിലപ്പോൾ പരിഗണിക്കാറുണ്ട്. എന്നാൽ നമ്മുടെ പാഠത്തിൽ, ശീർഷങ്ങൾ അകത്തേക്കു കുഴിഞ്ഞിരിക്കുന്നതോ, വശങ്ങൾ പരസ്പരം മുറിച്ചു കടക്കുന്നതോ ആയ ഇത്തരം രൂപങ്ങളെ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തിൽ ഉൾപ്പെടുത്തുന്നില്ല. നാം പൊതുവായി പറയാനുദ്ദേശിക്കുന്ന പല തത്വങ്ങളും ഇവയ്ക്ക് ബാധകമാകാത്തതാണ് കാരണം.

ചതുർഭുജം ഇപ്പോൾ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളായല്ലോ. മുറിഞ്ഞ കോണുകളുടെ മുകൾഭാഗങ്ങൾ, മുകളിലെ ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു കോണുകളല്ലേ ? താഴത്തെ ഭാഗങ്ങൾ, താഴത്തെ ത്രികോണത്തിലെയും.

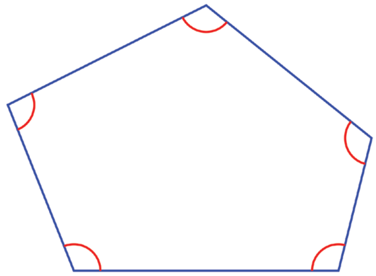
അപ്പോൾ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലെയും എല്ലാ കോണുകളുമെടുത്തു കൂട്ടിയാൽ, ചതുർഭുജത്തിലെ നാലു കോണുകളും കൂട്ടിയതുതന്നെ കിട്ടുമല്ലോ.

ഓരോ ത്രികോണത്തിന്റെയും കോണുകൾ കൂട്ടിയാൽ 180°; രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളാകുമ്പോൾ, ഇതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് $180° \times 2 = 360°$

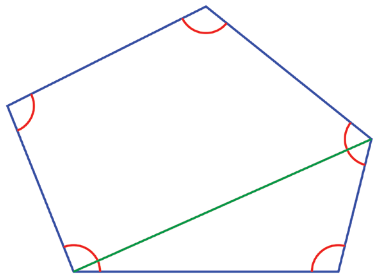
അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി ?

ഏതു ചതുർഭുജത്തിലും കോണുകളുടെയെല്ലാം തുക 360°.

ഇനി പഞ്ചഭുജമായാലോ ?



ഇങ്ങനെയൊരു വികർണ്ണം വരച്ചുനോക്കാം:



(ഏതു ബഹുഭുജത്തിലും അടുത്തടുത്തല്ലാത്ത രണ്ടു മൂലകളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകളെയെല്ലാം **വികർണ്ണങ്ങൾ** എന്നുതന്നെയാണ് പറയുന്നത്)

രണ്ടു കോണുകൾ രണ്ടായി മുറിഞ്ഞു; പഞ്ചഭുജം തന്നെ ഒരു ചതുർഭുജവും ഒരു ത്രികോണവുമായി.

മുറിഞ്ഞ കോണുകളിലെ താഴത്തെ ഭാഗങ്ങൾ ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളല്ലേ ?

മുകളിലെ ഭാഗങ്ങൾ ചതുർഭുജത്തിലെ കോണുകളും. അപ്പോൾ ചതുർഭുജത്തിലെയും ത്രികോണത്തിലെയും കോണുകളെല്ലാം കൂട്ടിയാൽ, പഞ്ചഭുജത്തിലെ കോണുകൾ അഞ്ചും കൂട്ടിയതായി.

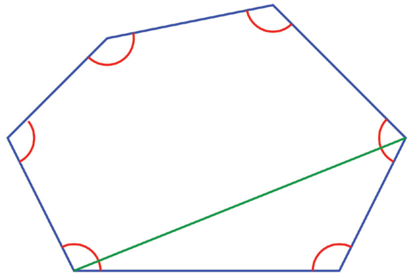
ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക $360°$

ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക $180°$

പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക $360° + 180° = 540°$

ഇതുപോലെ ഏതു ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെയും കോണുകളുടെ തുക ഊഹിക്കാമോ ?

സഹായത്തിന് ഒരു ചിത്രവുമാകാം:



ഷഡ്ഭുജത്തിനെ പഞ്ചഭുജവും ത്രികോണവും ചേർന്ന രൂപമായി കാണാമല്ലോ.

കോണുകളുടെ തുക $540° + 180° = 720°$

അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തു പറയാം ?

- ബഹുഭുജങ്ങളെ ത്രികോണം, ചതുർഭുജം, പഞ്ചഭുജം, ഷഡ്ഭുജം എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായെടുത്താൽ, ഒരു ബഹുഭുജത്തിൽ നിന്ന് മറ്റൊന്നിലേക്ക് നീങ്ങുമ്പോൾ ഒരു മൂല (ഒരു വശവും) കൂടുന്നു.
- ഈ മാറ്റത്തെ, ഒരു ത്രികോണം കൂടി ചേർത്തുവച്ചതായി കാണാം.
- കോണുകളുടെ തുക $180°$ കൂടും.

അപ്പോൾ, കോണുകളുടെ തുക ഇങ്ങനെ ക്രമമായി എഴുതാം:

	ബഹുഭുജം	വശങ്ങൾ	കോണുകളുടെ തുക
1	ത്രികോണം	3	$180°$
2	ചതുർഭുജം	4	$180° + 180° = 180° \times 2$
3	പഞ്ചഭുജം	5	$(180° \times 2) + 180° = 180° \times 3$
4	ഷഡ്ഭുജം	6	$(180° \times 3) + 180° = 180° \times 4$
5	സപ്തഭുജം	....	....
6	അഷ്ടഭുജം	....	....

ഇങ്ങനെ നോക്കുമ്പോൾ, 10 വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക എന്താണെന്ന് പറയാമോ ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

(i) ആദ്യം ത്രികോണം, രണ്ടാമത് ചതുർഭുജം, മൂന്നാമത് പഞ്ചഭുജം എന്നിങ്ങനെ ക്രമായി എടുത്താൽ, 10 വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജം (ദശഭുജം) എത്രാം സ്ഥാനത്താണ് ?

(ii) അപ്പോൾ മുകളിലെ പട്ടിക തുടർന്നാൽ, ദശഭുജത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക, $180°$ യുടെ എത്ര മടങ്ങാണ് ?

അങ്ങനെ 10 വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക $180° \times 8 = 1440°$ എന്നു കാണാം. ഏതു ബഹുഭുജത്തിലെയും കോണുകളുടെ തുക ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാമല്ലോ.

ഒരു ബഹുഭുജത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക, വശങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിൽ നിന്ന് 2 കുറച്ചതിനെ $180°$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ്

അല്പം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെ പറയാം;

n വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക $180° \times (n - 2)$

ഉദാഹരണമായി 20 വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക എങ്ങനെ കണക്കാക്കാം ?

$$\begin{aligned} 180^\circ \times (20 - 2) &= 180^\circ \times 18 \\ &= (18^2 \times 10)^\circ \\ &= 3240^\circ \end{aligned}$$

മറിച്ചൊരു ചോദ്യം: ഏതെങ്കിലും ബഹുഭുജത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക 900° ആകുമോ ?

ഏതു ബഹുഭുജത്തിലെയും കോണുകളുടെ തുക 180° യുടെ ഗുണിതമാണല്ലോ.

900 എന്ന സംഖ്യ 180 എന്ന സംഖ്യയുടെ ഗുണിതമാണോ ?

അതിന് 900 ത്തിനെ 180 കൊണ്ടു ഹരിച്ചു നോക്കണം.

ആദ്യം പൊതുഘടകങ്ങൾ ഒഴിവാക്കാം (അഞ്ചാംക്ലാസിലെ **സംഖ്യകൾക്കുള്ളിൽ** എന്ന പാഠത്തിന്റെ **പൊതുഘടകങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

900 നെയും 180 നെയും ഇങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതാം:

$$\begin{aligned} 900 &= 9 \times 10 \times 10 \\ 180 &= 9 \times 10 \times 2 \end{aligned}$$

അപ്പോൾ

$$900 \div 180 = 10 \div 2 = 5$$

അതായത്

$$900^\circ = 180^\circ \times 5$$

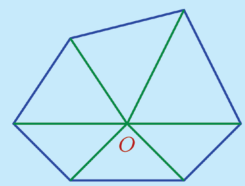
അപ്പോൾ കോണുകളുടെ തുക 900° ആയ ബഹുഭുജമുണ്ട്.

അതിനെത്ര വശങ്ങൾ ?

5 + 2 = 7 വശങ്ങൾ, അല്ലേ ?

വേറൊരു വിഭജനം

ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ ഉള്ളിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ശീർഷങ്ങളിലേക്ക് വരകൾ വരച്ചും അതിനെ ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കാം.



n വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജത്തിനെ ഇങ്ങനെ ഭാഗിച്ചാൽ, n ത്രികോണങ്ങൾ തന്നെ കിട്ടുമല്ലോ.

ഇവയുടെ കോണുകളുടെ തുക

$$= 180^\circ \times n.$$

ഈ കോണുകളിൽ, എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളുടെയും O യിലെ കോണുകളൊഴിച്ച്, മറ്റുള്ളവയുടെ തുക, ബഹുഭുജത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക തന്നെയാണ്. O യിലെ കോണുകളുടെ തുക 360° ആണെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ ബഹുഭുജത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക.

$$(180^\circ \times n) - (180^\circ \times 2) = 180^\circ \times (n - 2)$$

(1) ഒരു ബഹുഭുജത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക 1980° ആണ്. ഇതിനെക്കാൾ ഒരു വശം കൂടുതലുള്ള ബഹുഭുജത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക എന്താണ് ? ഒരു വശം കുറവായ ബഹുഭുജത്തിലോ ?

(2) 27 വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക എത്രയാണ് ?

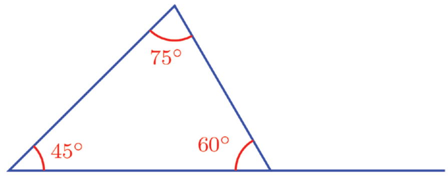
(3) ഒരു ബഹുഭുജത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക 8100° ആണ്. അതിന് എത്ര വശങ്ങളുണ്ട് ?

(4) ഏതെങ്കിലും ബഹുഭുജത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക 1000° ആകുമോ ? കാരണം വിശദമാക്കുക.

(5) 20 വശങ്ങളുള്ള ഒരു ബഹുഭുജത്തിലെ കോണുകൾക്കെല്ലാം ഒരേ അളവാണ്. ഓരോന്നും എത്ര ഡിഗ്രിയാണ് ?

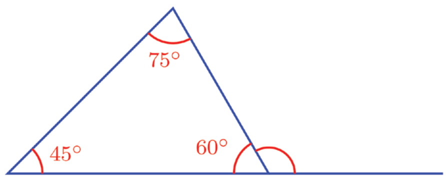
പുറംകോണുകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം അല്പം വലത്തോട്ട് നീട്ടിയിരിക്കുന്നു.

അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതു മൂലയിൽ, പുറത്ത് ഒരു കോൺ വന്നില്ലേ ?

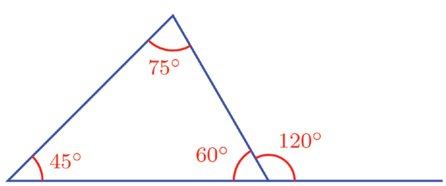


ഇങ്ങനെ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം നീട്ടുമ്പോൾ ത്രികോണത്തിനു പുറത്ത് ഒരു മൂലയിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോണിനെ ത്രികോണത്തിലെ ഒരു **പുറംകോൺ (Outer angle)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. അപ്പോൾ ഈ മൂലയിൽ ത്രികോണത്തിനകത്തുള്ള കോണിനെ **അകക്കോൺ (Inner angle)** എന്നും പറയാം.

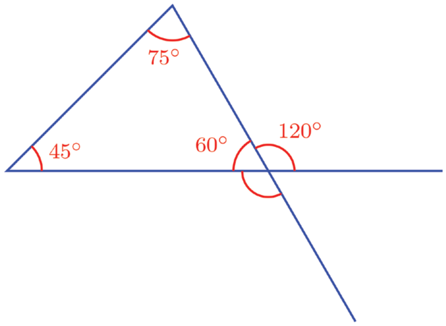
ചിത്രത്തിലെ പുറംകോണിന്റെ അളവെത്രയാണ് ?

ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശം, താഴത്തെ നീട്ടിയ വശത്തിൽ മുട്ടിയപ്പോൾ ഇരുഭാഗത്തും ഉണ്ടാകുന്ന കോണുകൾ ആണല്ലോ അകക്കോണും പുറംകോണും. അതിനാൽ ഇവയുടെ തുക 180° ആണ് (ആറാം ക്ലാസിലെ **വരകളും കോണുകളും** എന്ന പാഠത്തിലെ **വരകൾ ചേരുമ്പോൾ** എന്ന ഭാഗം).

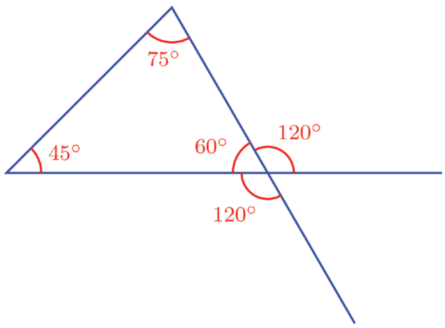
അപ്പോൾ പുറംകോൺ $180° - 60° = 120°$



ഇനി ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശം താഴോട്ട് നീട്ടിയാൽ വലതു മൂലയിൽത്തന്നെ മറ്റൊരു പുറംകോൺ ഉണ്ടാകുമല്ലോ.

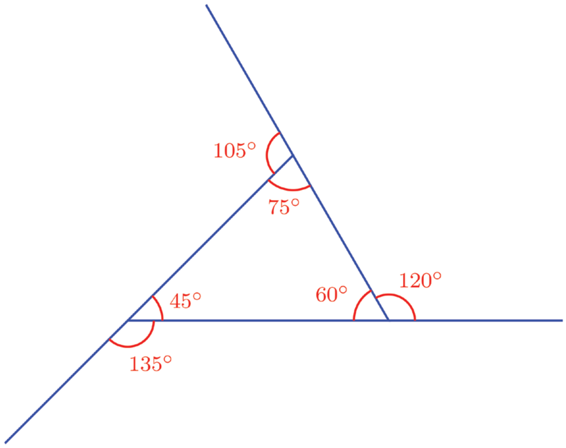


അതും 120° തന്നെയല്ലേ ? (എന്തുകൊണ്ട് ?)



അതായത്, 180° യിൽ നിന്ന് അകക്കോൺ കുറച്ചാൽ പുറംകോൺ കിട്ടും;

ഇതുപോലെ ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളിലും ഓരോ പുറംകോൺ വരയ്ക്കാമല്ലോ.



ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഓരോ മൂലയിലെയും അകക്കോണിന്റെയും പുറംകോണിന്റെയും തുക 180° ആയിരിക്കും

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യവും കാണാം. ത്രികോണത്തിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു മൂലകളിലെ അകക്കോണുകൾ കൂട്ടിനോക്കൂ:

ഉദാഹരണമായി, 45° + 60° = 105°

ഇത് മൂന്നാമത്തെ മൂലയിലെ പുറംകോണല്ലേ ?

വേറെ രണ്ടു അകക്കോണുകൾ കൂട്ടിനോക്കൂ.

ഏതു രണ്ടു മൂലകളിലെയും അകക്കോണുകൾ കൂട്ടിയാൽ, മൂന്നാം മൂലയിലെ പുറംകോൺ കിട്ടുന്നില്ലേ ? ഇത് എന്തുകൊണ്ടാണ് ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

(i) മൂന്ന് അകക്കോണുകളുടെയും തുക 180° ആയതിനാൽ, രണ്ട് അകക്കോണുകളുടെ തുക, 180° ൽ നിന്ന് മൂന്നാം കോൺ കുറച്ചതാണ്.

(ii) ഇത് മൂന്നാം മൂലയിലെ പുറംകോണിനു തുല്യമാണ്.

ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ അളവ് മാറ്റിയാലും, ഇതുപോലെ തന്നെ ചിന്തിക്കാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഇതു ശരിയാണ്. അതായത്, ത്രികോണത്തിലെ ഏതു രണ്ടു മൂലകളിലെ അകക്കോണുകൾ കൂട്ടിയാലും, മൂന്നാമത്തെ മൂലയിലെ പുറംകോൺ കിട്ടും.

ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെയും പറയാം:

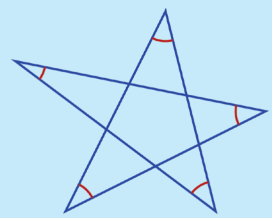
ഏതു ത്രികോണത്തിലും, ഒരു മൂലയിലെ പുറംകോൺ, മറ്റു രണ്ടു മൂലകളിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുകയാണ്

ഒരു കാര്യം കൂടി. മൂന്നു അകക്കോണുകളും, മൂന്നു പുറംകോണുകളുമായുള്ള ആറു കോണുകളും കൂട്ടിനോക്കൂ. 540° കിട്ടിയില്ലേ? കോണുകൾ മാറ്റി മറ്റൊരു ത്രികോണം വരച്ച്, ആറു കോണുകളും കൂട്ടിനോക്കൂ. എല്ലാ ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഈ തുക 540° തന്നെ ആകുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണ് ?

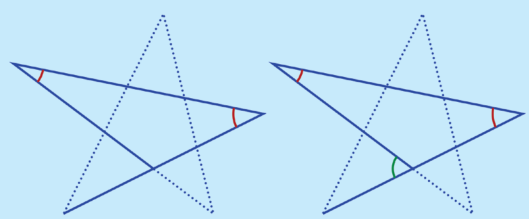
ആറു കോണുകളെ ഓരോ മൂലയിലെയും അകക്കോണിന്റെയും പുറംകോണിന്റെയും മൂന്നു ജോടികളാക്കി കൂട്ടി നോക്കൂ:

നക്ഷത്രക്കണക്ക്

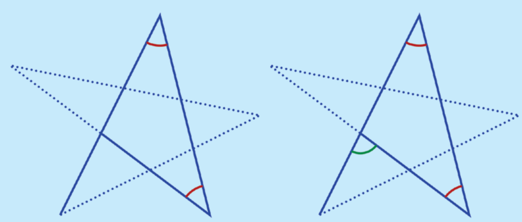
ഈ നക്ഷത്രത്തിന്റെ അഞ്ചു മൂലകളിലെയും കോണുകളുടെ തുക കണക്കാക്കണം:



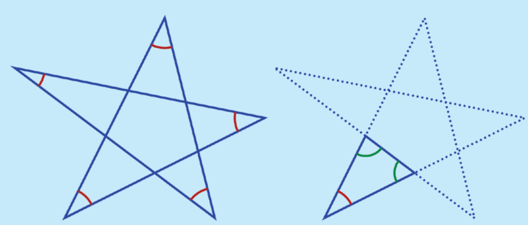
ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിലെ ആദ്യത്തേതിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണം മാത്രം നോക്കിയാൽ, അതിലെ അടയാളപ്പെടുത്തിയ കോണുകളുടെ തുക, രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ പച്ച നിറത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോണാണെന്നു കാണാം:



ഇതുപോലെ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളിലെ കോണുകളുടെ തുകയെയും ഒറ്റക്കോണായി കാണാം:



അങ്ങനെ നക്ഷത്രത്തിലെ അഞ്ചു കോണുകളുടെ തുക, ഒരു ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നു കോണുകളുടെ തുകയായി കാണാം:



അപ്പോൾ നക്ഷത്രക്കോണുകളുടെ തുക 180°

(i) ഓരോ ജോടിയുടെയും തുക 180°

(ii) മൂന്നു ജോടികളുടെയും തുക $180° \times 3 = 540°$

(iii) ആറു കോണുകളുടെയും തുക 540°

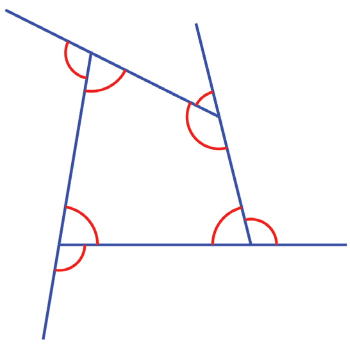
(iv) ഇതിൽ അകക്കോണുകളുടെ തുക 180°

(v) പുറംകോണുകളുടെ തുക $540° - 180° = 360°$

ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണുകൾ എന്തായാലും, ഈ രീതിയിൽ പുറംകോണുകളുടെ തുക 360° എന്നു തന്നെ കിട്ടും.

ഏതു ത്രികോണത്തിലും, ഓരോ മൂലയിലെയും ഒരു പുറംകോൺ വീതം എടുത്താൽ, അവയുടെ തുക 360° ആയിരിക്കും.

ത്രികോണങ്ങളിൽ ചെയ്ത പോലെ, ചതുർഭുജത്തിലും വശങ്ങൾ നീട്ടി പുറംകോണുകൾ ഉണ്ടാക്കാം.



ഇതിലും ഓരോ മൂലയിലെയും അകക്കോണിന്റെയും പുറംകോണിന്റെയും തുക 180° തന്നെയല്ലേ?

ഈ ചതുർഭുജത്തിലെ നാലു അകക്കോണുകളുടെയും നാലു പുറംകോണുകളുടെയും ആകെ തുക എത്രയാണ്?

ത്രികോണത്തിൽ ചെയ്തപോലെ, ഓരോ മൂലയിലെയും അകക്കോണും പുറംകോണും ജോടികളാക്കിയാൽ നാലു ജോടി; ഓരോ ജോടിയുടെയും തുക 180°; ആകെ $180° \times 4 = 720°$

ഇതിൽ അകക്കോണുകളുടെ തുക 360°

പുറംകോണുകളുടെ തുക $720° - 360° = 360°$

അപ്പോൾ ചതുർഭുജങ്ങളിലും, പുറംകോണുകളുടെ തുക 360° തന്നെ.

പഞ്ചഭുജമായാലോ ?

ചിത്രം വരയ്ക്കാതെ (അല്ലെങ്കിൽ മനസ്സിൽ സങ്കല്പിച്ചുകൊണ്ട്) ആലോചിക്കാം. ഓരോ മൂലയിലെയും അകക്കോണിന്റെയും പുറംകോണിന്റെയും തുക 180°; അങ്ങനെ അഞ്ചു ജോടികൾ. ആകെ $180° \times 5$.

ഇതിൽ അകക്കോണുകളുടെ തുക $180° \times (5 - 2) = 180° \times 3$

പുറംകോണുകളുടെ തുക

$$(180° \times 5) - (180° \times 3) = 180° \times (5 - 3)$$
$$= 180° \times 2$$
$$= 360°$$

ഏതു ബഹുഭുജത്തിലും ഇങ്ങനെ കണക്കുകൂട്ടാമല്ലോ.

പൊതുവായി n മൂലകളുള്ള ബഹുഭുജത്തിൽ, ഓരോ മൂലയിലേയും അകക്കോണും പുറംകോണും ജോടിയായെടുത്താൽ

ആകെ കോണുകളുടെ തുക $180° \times n$

അകക്കോണുകളുടെ തുക $180° \times (n - 2)$

പുറംകോണുകളുടെ തുക

$$(180° \times n) - (180° \times (n - 2)) = 180° \times (n - (n - 2))$$
$$= 180° \times 2$$
$$= 360°$$

(ഏഴാം ക്ലാസിലെ **കണക്കിലെ ചുരുക്കെഴുത്ത്** എന്ന പാഠത്തിലെ **കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും** എന്ന ഭാഗം)

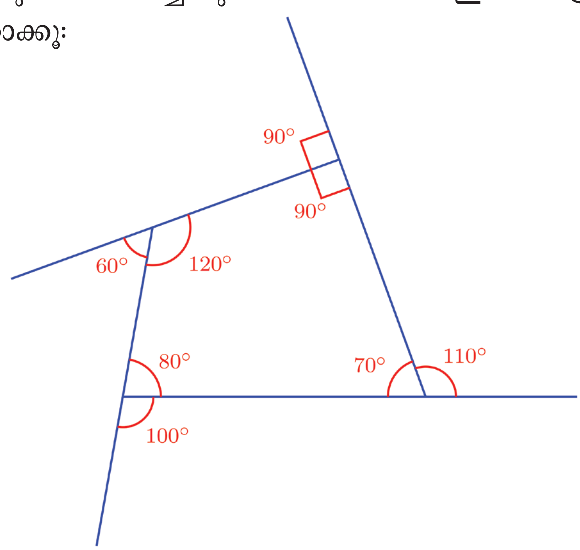
അതായത്,

ഏതു ബഹുഭുജത്തിലും, ഓരോ മൂലയിലേയും ഒരു പുറംകോൺ വീതമെടുത്തു കൂട്ടിയാൽ 360° കിട്ടും.

ഇത് അല്പം ചുരുക്കി, ഇങ്ങനെയും പറയാം;

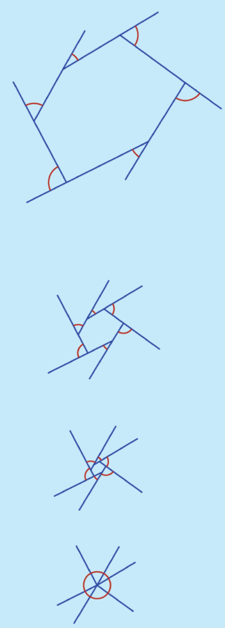
ഏതു ബഹുഭുജത്തിലും, പുറംകോണുകളുടെ തുക 360° ആണ്

ഇതുപയോഗിച്ചൊരു കണക്കാവാം. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



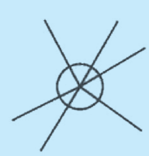
ചുരുങ്ങിച്ചുരുങ്ങി

ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ കോണുകൾ മാറാതെ വശങ്ങൾ ക്രമേണ ചെറുതാക്കാം.



ഒടുവിൽ ബഹുഭുജം തന്നെ ഇല്ലാതായി ഒരു ബിന്ദു മാത്രമാകുമ്പോഴോ ?

ബഹുഭുജത്തിന്റെ ബാഹ്യകോണുകളുടെ തുകയോ ?



ഏതെങ്കിലും രണ്ടു മൂലകളിലെ പുറംകോണുകളുടെ തുകയും, മറ്റു രണ്ടു മൂലകളിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുകയും നോക്കൂ.

ഉദാഹരണമായി, താഴത്തെ രണ്ടു പുറംകോണുകളെടുത്താൽ, തുക

$$100° + 110° = 210°$$

മുകളിലെ രണ്ടു മൂലകളിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുക

$$120° + 90° = 210°$$

ഇതുപോലെ മറ്റു ജോടികൾ എടുത്തുനോക്കൂ. തുകകൾ തുല്യമാണോ ?

മറ്റു ചതുർഭുജങ്ങളിലും ഇതു ശരിയാകുമോ ?

ചതുർഭുജത്തിലെ അകക്കോണുകൾ $a°$, $b°$, $c°$, $d°$ എന്നെടുക്കാം. അപ്പോൾ പുറംകോണുകൾ $180° - a°$, $180° - b°$, $180° - c°$, $180° - d°$

രണ്ടു മൂലകളിലെ പുറംകോണുകൾ $180° - a°$ യും $180° - d°$ യും എടുത്തുനോക്കാം;

അവയുടെ തുക

$$(180° - a°) + (180° - d°) = 360° - (a° + d°)$$

ചതുർഭുജത്തിലെ അകക്കോണുകളുടെയെല്ലാം തുക $360°$ ആണല്ലോ.

$$a° + b° + c° + d° = 360°$$

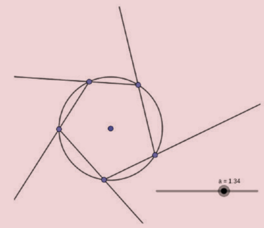
അപ്പോൾ

$$360° - (a° + d°) = b° + c°$$

$$(180° - a°) + (180° - d°) = b° + c°$$

അതായത്, രണ്ടു പുറംകോണുകളുടെ തുക, മറ്റു രണ്ടു മൂലകളിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുകയാണ്. കോണുകളുടെ ക്രമം മാറ്റിയാലും ഇതുതന്നെ കിട്ടുമല്ലോ.

min 0.01, max 2, increment = 0.01 ആകത്തക്കവിധം സ്ലൈഡർ a നിർമ്മിക്കുക. ആരം a ആയി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ അഞ്ചോ ആറോ കുത്തുകളിടുക. ഈ കുത്തുകൾ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ യോജിപ്പിക്കുക (ray tool ഉപയോഗിക്കാം).



ഇനി വൃത്തം മറച്ചു വയ്ക്കാം. Angle എടുത്ത് പുറംകോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. a എന്ന സംഖ്യ മാറ്റി നോക്കൂ.

ഏതു ചതുർഭുജത്തിലും, രണ്ടു മൂലകളിലെ പുറംകോണുകളുടെ തുക മറ്റു രണ്ടു മൂലകളിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണ്.

ത്രികോണങ്ങളിൽ ഒരു മൂലയിലെ പുറംകോൺ, മറ്റു രണ്ടു മൂലകളിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണെന്നു കണ്ടു. ചതുർഭുജത്തിൽ രണ്ടു മൂലകളിലെ പുറംകോണുകളുടെ തുക മറ്റു രണ്ടു മൂലകളിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യം എന്നും കണ്ടു.

അപ്പോൾ ഇനി അന്വേഷിക്കാവുന്ന ചില കാര്യങ്ങളുണ്ട്:

(i) പഞ്ചഭുജങ്ങളിൽ പുറംകോണുകളും അകക്കോണുകളും തമ്മിൽ ഇങ്ങനെ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ ?

(ii) ഷഡ്ഭുജങ്ങളിലായാലോ ?

(iii) ബഹുഭുജങ്ങളിലെല്ലാം ശരിയാകുന്ന ഇങ്ങനെയൊരു പൊതുതത്വം ഉണ്ടോ ?

(1) 18 വശങ്ങളുള്ള ഒരു ബഹുഭുജത്തിലെ അകക്കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണ്.
(i) അതിന്റെ ഓരോ പുറംകോണും എത്ര ഡിഗ്രിയാണ്?
(ii) അതിന്റെ ഓരോ അകക്കോണും എത്ര ഡിഗ്രിയാണ്?

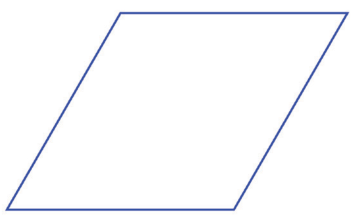
(2) (i) ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ ഓരോ മൂലയിലും ഒരു പുറംകോൺ വീതമെടുത്ത് കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന തുക, അകക്കോണുകളുടെയെല്ലാം തുകയ്ക്ക് തുല്യമായ ബഹുഭുജം ഏതാണ്?
(ii) പുറംകോണുകളുടെ തുക അകക്കോണുകളുടെ തുകയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാകുന്ന ബഹുഭുജം ഏതാണ്?
(iii) പുറംകോണുകളുടെ തുക അകക്കോണുകളുടെ തുകയുടെ പകുതിയാകുന്ന ബഹുഭുജം ഏതാണ്?
(iv) പുറംകോണുകളുടെ തുക അകക്കോണുകളുടെ തുകയുടെ മൂന്നിലൊന്നാകുന്ന ബഹുഭുജം ഏതാണ്?

സമബഹുഭുജങ്ങൾ

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ നീളമാണെങ്കിൽ കോണുകൾക്കും ഒരേ വലുപ്പമാണെന്ന് **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ; (**സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം). മറിച്ച് ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾക്കെല്ലാം ഒരേ വലുപ്പമാണെങ്കിൽ, വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നും കണ്ടു.

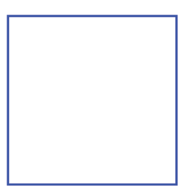
എന്നാൽ മറ്റു ബഹുഭുജങ്ങളിൽ, വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമായതുകൊണ്ട് കോണുകൾക്ക് ഒരേ വലുപ്പമാകണമെന്നില്ല; കോണുകൾക്ക് ഒരേ വലുപ്പമായതുകൊണ്ട്, വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാകണമെന്നുമില്ല.

ഉദാഹരണമായി ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിൽ വശങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ നീളമാണ്; കോണുകൾ തുല്യമാകണമെന്നില്ല. ഒരു ചതുരത്തിൽ കോണുകളെല്ലാം മട്ടമാണ്; വശങ്ങൾ തുല്യമാകണമെന്നില്ല.



സമചതുരമായാലോ?

വശങ്ങളും തുല്യം കോണുകളും തുല്യം.



പാഠത്തിന്റെ ആദ്യഭാഗത്ത് പറഞ്ഞതുപോലെ, വശങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ നീളവും, കോണുകൾക്കെല്ലാം ഒരേ വലുപ്പവും ആയ ബഹുഭുജങ്ങളെയാണ് സമബഹുഭുജങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നത്.

n വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക $180° \times (n - 2)$ ആണെന്നും, പുറംകോണുകളുടെ തുക $360°$ ആണെന്നും കണ്ടല്ലോ. സമബഹുഭുജത്തിൽ കോണുകൾക്കെല്ലാം ഒരേ വലുപ്പമാണല്ലോ. അതിനാൽ പുറംകോണുകൾക്കും ഒരേ വലുപ്പമാണ് (എന്തുകൊണ്ട് ?).

അപ്പോൾ സമബഹുഭുജങ്ങളിലെ ഒരോ അകക്കോണിന്റെയും പുറംകോണിന്റെയും വലുപ്പം കണക്കാക്കാം:

***n* വശങ്ങളുള്ള ഒരു സമബഹുഭുജത്തിൽ**

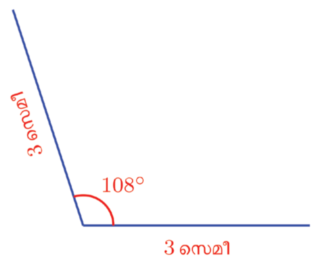
- **അകക്കോണുകൾ ഓരോന്നും** $180° \times \frac{n-2}{n}$
- **പുറംകോണുകൾ ഓരോന്നും** $360° \times \frac{1}{n}$

ഉദാഹരണമായി ഒരു സമപഞ്ചഭുജത്തിൽ, അകക്കോണുകളോരോന്നും

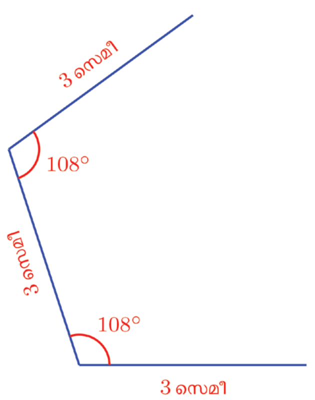
$$180° \times \frac{3}{5} = 108°$$

അപ്പോൾ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 3 സെന്റിമീറ്ററായ സമപഞ്ചഭുജം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

ആദ്യം 3 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ഒരു വര വരച്ച്, അതിന്റെ ഒരറ്റത്ത് 108° ചരിവിൽ 3 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വര വരയ്ക്കുക.

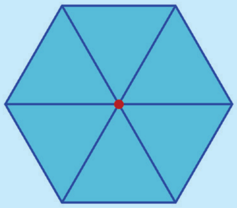


ഇനി രണ്ടാമത്തെ വരയുമായി 108° ചരിവിൽ 3 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വര വരയ്ക്കുക.



ചേർത്ത് വയ്ക്കാം

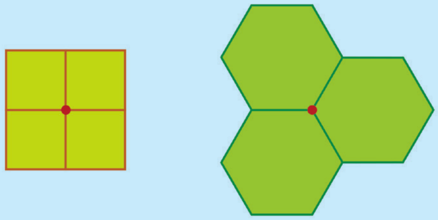
ചിത്രത്തിൽ 6 തുല്യ സമഭുജത്രികോണങ്ങൾ ഒരു ബിന്ദുവിന് ചുറ്റുമായി ചേർത്ത് വച്ചിരിക്കുന്നത് നോക്കൂ.



ഇതുപോലെ മറ്റ് ഏതെല്ലാം തുല്യമായ സമബഹുഭുജങ്ങൾ ഒരു ബിന്ദുവിന് ചുറ്റും ഇങ്ങനെ ചേർത്തു വയ്ക്കാം.

ഒരു ബിന്ദുവിന് ചുറ്റുമുള്ള കോൺ 360° ആണല്ലോ. തുല്യമായ സമബഹുഭുജങ്ങൾ ഒരു ബിന്ദുവിന് ചുറ്റും ചേർത്തു വയ്ക്കാൻ ബഹുഭുജത്തിന്റെ കോണിന്റെ അളവ് 360 ന്റെ ഘടകം ആയിരിക്കണം.

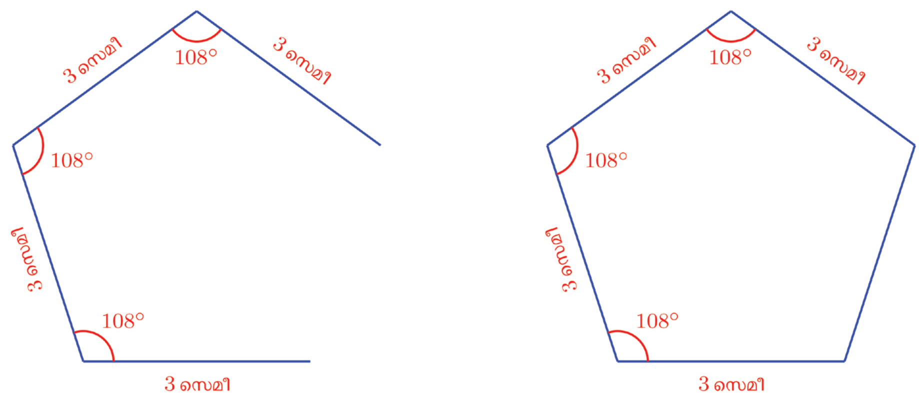
ചിത്രം നോക്കൂ.



ഇനി ഏതെങ്കിലും സമബഹുഭുജങ്ങളുണ്ടോ ?

സമബഹുഭുജങ്ങളല്ലെങ്കിലോ ?

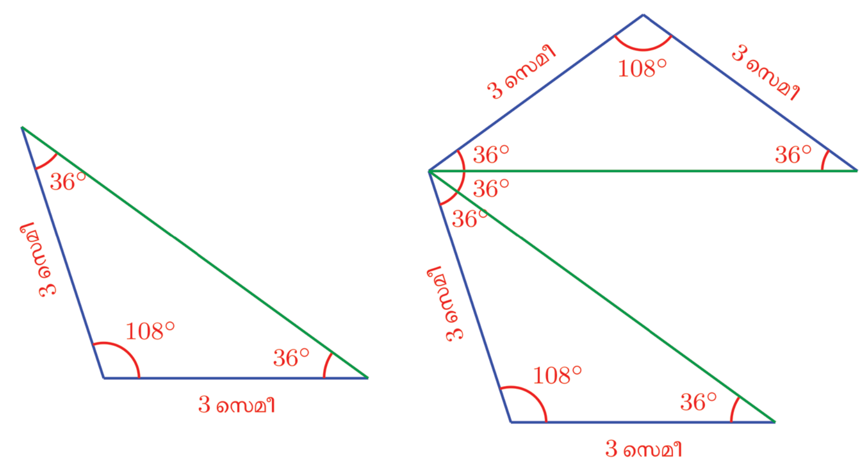
ഈ വരയുമായും 108° ചരിവിൽ, 3 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വര വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ അറ്റവും, ആദ്യത്തെ വരയുടെ അറ്റവും യോജിപ്പിക്കുക.



പഞ്ചഭുജമായി; സമപഞ്ചഭുജമായോ ?

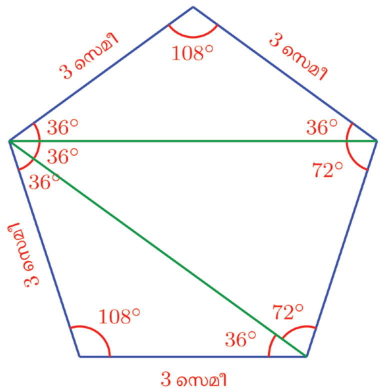
അവസാനം വരച്ച വരയുടെ നീളവും 3 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെയാണെന്നും, അവസാനമുണ്ടായ കോണുകൾ രണ്ടും 108° ആണെന്നും എങ്ങനെ ഉറപ്പിക്കും ?

കോണുകളുടെ കാര്യം ആദ്യം നോക്കാം. ആദ്യത്തെ രണ്ടു വരകൾ വശങ്ങളായി ഒരു സമപാർ ശ്വത്രികോണവും, മൂന്നാമത്തെയും നാലാമത്തെയും വശങ്ങളായി മറ്റൊരു സമപാർശ്വത്രികോണ വും വരയ്ക്കാമല്ലോ. അവയിലെ കോണുകളും കണക്കാക്കാം:



ഈ ത്രികോണങ്ങളിലെ രണ്ടു (നീല) വശങ്ങളുടെ നീളവും (3 സെന്റിമീറ്റർ) അവ ചേരുന്ന കോണും (108°) തുല്യമാണ്. അപ്പോൾ അവയുടെ മൂന്നാമത്തെ (പച്ച) വശങ്ങളുടെ നീളവും തുല്യമാണ് (**തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **രണ്ടു വശങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

അപ്പോൾ അവസാനത്തെ വര, മറ്റൊരു സമപാർശ്വ ത്രികോണത്തിന്റെ വശമാണ്. അതിലെ കോണുകളും കണക്കാക്കാം;



അവസാനം ഉണ്ടായ രണ്ടു കോണുകളും
36° + 72° = 108° തന്നെയാണെന്നു കിട്ടിയില്ലേ ?

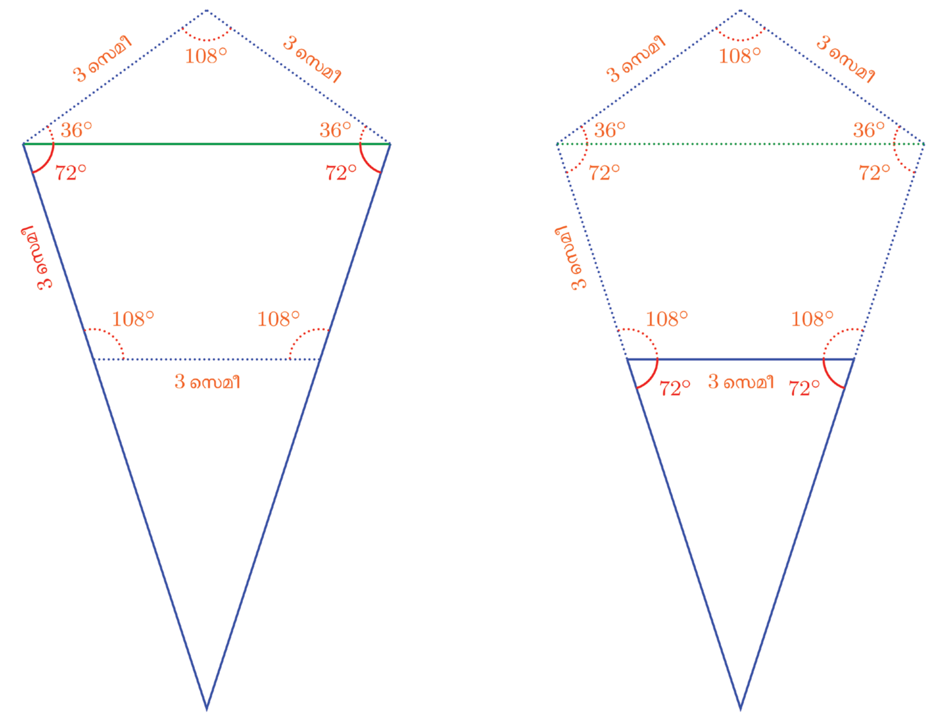
ഇനി അവസാനത്തെ വരയുടെ നീളവും 3 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെയാണെന്നു കാണാൻ, പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങൾ നീട്ടി കൂട്ടിമുട്ടിക്കുക. അപ്പോൾ രണ്ടു സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടും (എങ്ങനെ ?).

കോമ്പസ്

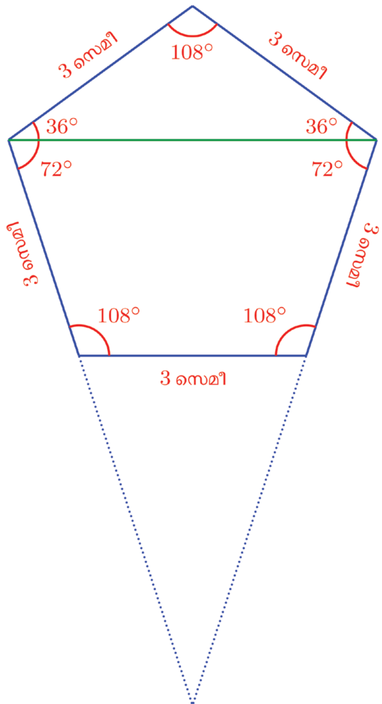
മട്ടങ്ങളോ, കോൺമാപിനിയോ ഉപയോഗിച്ചു കോണുകൾ അളക്കാതെ, കോമ്പസ് ഉപയോഗിച്ചും സമബഹുഭുജങ്ങൾ വരയ്ക്കാം. ഇങ്ങനെ സമഭുജത്രികോണവും, സമചതുരവും, സമഷഡ്ഭുജവും വരയ്ക്കുന്നത് പല ക്ലാസുകളിലായി കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

കോമ്പസ് ഉപയോഗിച്ച് സമപഞ്ചഭുജം വരയ്ക്കാൻ പല മാർഗങ്ങളുമുണ്ട്. ലളിതമായ ഒരു മാർഗം
www.cut-the-knot.org/pythagoras/Pentagon Construction.shtml
എന്ന വെബ്പേജിലുണ്ട്.

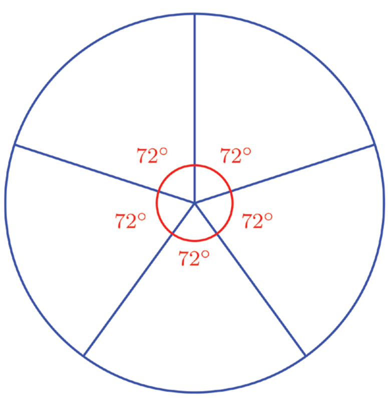
കോമ്പസും സ്കെയിലും മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് 17 വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജം വരയ്ക്കാമെന്ന്, പ്രസിദ്ധ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഗൗസ് അദ്ദേഹത്തിന്റെ പത്തൊമ്പതാം വയസിൽ തെളിയിച്ചു. ഇതിനെക്കുറിച്ചുള്ള കൂടുതൽ വിവരങ്ങൾ
en.wikipedia.org/wiki/Heptadecagon
എന്ന വെബ്പേജിലുണ്ട്.

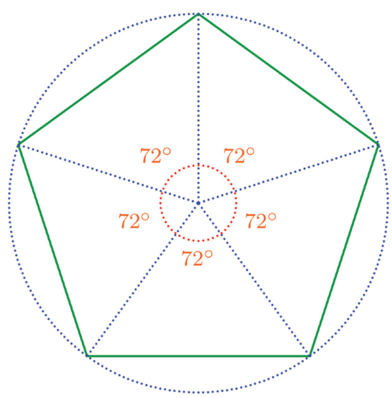


വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ തുല്യമായ വശങ്ങളുടെ നീളത്തിൽ നിന്ന്, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ തുല്യമായ വശങ്ങളുടെ നീളം കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളും തുല്യമാകണമല്ലോ. ഇടതുവശങ്ങളുടെ നീളം കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് 3 സെന്റിമീറ്ററാണ്; അപ്പോൾ വലതുവശങ്ങളുടെ നീളം കുറച്ചാലും 3 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ കിട്ടും:



സമപഞ്ചഭുജം വരയ്ക്കാൻ മറ്റൊരു വഴിയുണ്ട്. ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, കേന്ദ്രത്തിൽ $360° \times \frac{1}{5} = 72°$ വീതമുള്ള 5 കോണുകൾ വരയ്ക്കുക:





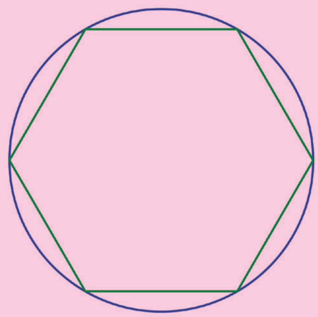
ഈ പഞ്ചഭുജത്തിലെ വശങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ നീളവും, കോണുകൾക്കെല്ലാം ഒരേ വലുപ്പവും ആകാൻ കാരണമെന്താണ്?

ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുമ്പോഴുള്ള പ്രശ്നം, വശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്ററാകാൻ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എന്തായിരിക്കണം എന്നു കണക്കാക്കാൻ അത്ര എളുപ്പമല്ല എന്നതാണ്.

(1) (i) വശങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ നീളവും, കോണുകൾക്ക് ഒരേ വലുപ്പമല്ലാത്തതും ആയ ഒരു ഷഡ്ഭുജം വരയ്ക്കുക.

(ii) കോണുകൾക്കെല്ലാം ഒരേ വലുപ്പവും, വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമല്ലാത്തതും ആയ ഒരു ഷഡ്ഭുജം വരയ്ക്കുക.

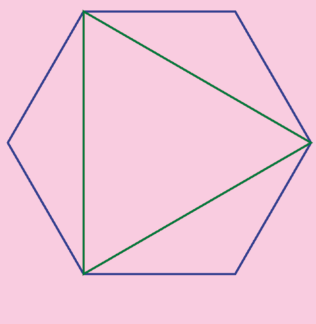
(2) മൂലകളെല്ലാം വൃത്തത്തിലായ ഒരു സമഷഡ്ഭുജമാണ് ചിത്രത്തിൽ. ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന് തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.



(3) വശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്ററായ സമാഷ്ടഭുജം (എട്ടു വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജം) വരയ്ക്കുക.

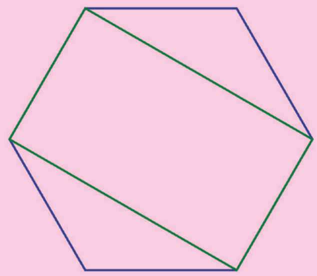
(4) 3 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തം വരച്ച്, മൂലകളെല്ലാം ഈ വൃത്തത്തിലായ സമാഷ്ടഭുജം വരയ്ക്കുക.

(5) ചിത്രത്തിൽ ഒരു സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ഒന്നിടവിട്ട മൂലകൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നു:



ഇതൊരു സമഭുജത്രികോണമാണോ ? എന്തുകൊണ്ട് ?

(6) ചിത്രത്തിൽ ഒരു സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ നാലു മൂലകൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ചതുർഭുജം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



ഈ ചതുർഭുജം ചതുരമാണോ ? എന്തുകൊണ്ട് ?

(7) 15 വശങ്ങളുള്ള ഒരു സമബഹുഭുജത്തിന്റെ ഓരോ അകക്കോണും പുറംകോണും കണക്കാക്കുക.

(8) ഒരു സമബഹുഭുജത്തിന്റെ ഒരു പുറംകോൺ 20° ആണ്. അതിന് എത്ര വശങ്ങളുണ്ട് ?

(9) ഒരു സമബഹുഭുജത്തിന്റെ ഒരു അകക്കോൺ 168°. അതിന് എത്ര വശങ്ങളുണ്ട് ?

5

സമവാക്യപരിഹാരം

കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും

സുഹറ പണപ്പെട്ടി തുറന്ന് എണ്ണിനോക്കുകയാണ്. "എത്ര രൂപയുണ്ട് ?", ഉമ്മ ചോദിച്ചു. "ഏഴുരൂപ കൂടി തന്നാൽ തികച്ചും അമ്പതു രൂപയാകും", സുഹറ ആഗ്രഹം പറഞ്ഞു.

സുഹറയുടെ പണപ്പെട്ടിയിൽ എത്ര രൂപയുണ്ട് ?

7 രൂപ കൂട്ടിയാൽ 50 രൂപയാകും. അപ്പോൾ പെട്ടിയിലുള്ളത് 50 നെക്കാൾ 7 കുറവ്:

$$50 - 7 = 43$$

(1) "ആറു മാർക്ക് കൂടി കിട്ടിയിരുന്നെങ്കിൽ", കണക്കു പരീക്ഷയ്ക്ക് നൂറിൽ നൂറു മാർക്കും ആയേനെ, രാജന്റെ സങ്കടം. എത്ര മാർക്കാണ് കിട്ടിയത് ?

(2) "5 വർഷം കഴിഞ്ഞാൽ, 18 വയസ്സാകും, വോട്ടു ചെയ്യാം", ലിസ്സി കണക്കുകൂട്ടി. ലിസ്സിക്ക് ഇപ്പൊഴെത്ര വയസ്സായി ?

(3) 123 നെ 321 ആക്കാൻ എത്ര കൂട്ടണം ?

(4) 432 നെ 234 ആക്കാൻ എത്ര കുറയ്ക്കണം ?

മറ്റൊരു കണക്ക്:

ഉണ്ണി വിഷുക്കൈനീട്ടം കിട്ടിയതിൽ നിന്ന് 8 രൂപയെടുത്ത് ഒരു പേന വാങ്ങി. 42 രൂപ മിച്ചമുണ്ട്. എത്ര രൂപയാണ് വിഷുക്കൈനീട്ടം കിട്ടിയത് ?

8 രൂപ കുറഞ്ഞപ്പോഴാണ് 42 രൂപയായത്. അപ്പോൾ കൈനീട്ടം കിട്ടിയത്, 42 നേക്കാൾ 8 കൂടുതൽ:

$$42 + 8 = 50$$

(1) ഗോപാലൻ കടയിലേക്ക് ഒരു കുല പഴം വാങ്ങി. അല്പം കേടുവന്ന 7 എണ്ണം മാറ്റിക്കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 46 എണ്ണമുണ്ട്. കുലയിൽ എത്ര പഴം ഉണ്ടായിരുന്നു ?

(2) വിമല 163 രൂപയ്ക്ക് സാധനങ്ങൾ വാങ്ങി. 337 രൂപ മിച്ചമുണ്ട്. എത്ര രൂപയാണ് കൈയിലുണ്ടായിരുന്നത് ?

(3) ഏതു സംഖ്യയിൽ നിന്ന് 123 കുറച്ചാലാണ് 321 ആകുന്നത് ?

ഗുണനവും ഹരണവും

ഒരു നിക്ഷേപ പദ്ധതിയിൽ ആറു വർഷം കൊണ്ട് നിക്ഷേപത്തുക രണ്ടു മടങ്ങാകും. അവസാനം പതിനായിരം രൂപ കിട്ടാൻ ഇപ്പോൾ എത്ര രൂപ നിക്ഷേപിക്കണം ?

നിക്ഷേപത്തുകയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് 10000; അപ്പോൾ നിക്ഷേപത്തുക 10000 ന്റെ പകുതി, 5000.

കച്ചവടത്തിലെ ലാഭം നാലുപേർ തുല്യമായി പങ്കുവെച്ചപ്പോൾ ജോസിന് 1500 രൂപ കിട്ടി. ആകെ ലാഭം എത്ര രൂപയാണ് ?

ലാഭത്തിന്റെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗമാണ് 1500; അപ്പോൾ ആകെ ലാഭം 1500 ന്റെ 4 മടങ്ങ് : $1500 \times 4 = 6000$.

(1) ഒരു സ്ഥാപനത്തിലെ മാനേജർക്ക് അവിടത്തെ പ്യൂണിന്റെ അഞ്ചിരട്ടി ശമ്പളമുണ്ട്. മാനേജർക്ക് മാസം 75000 രൂപയാണ് കിട്ടുന്നത്. പ്യൂണിന് മാസം എത്ര രൂപ കിട്ടും ?

(2) ഒരു വിനോദയാത്രയ്ക്കു പോയവർ, ആകെ ചെലവായ 12500 രൂപ തുല്യമായി വീതിക്കാൻ തീരുമാനിച്ചു; ഓരോരുത്തരും 2500 രൂപ കൊടുക്കണമെന്നു കണക്കാക്കി. എത്രപേരാണ് സംഘത്തിലുണ്ടായിരുന്നത് ?

(3) ഒരു സംഖ്യയെ 12 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചപ്പോൾ 756 കിട്ടി. ഏതു സംഖ്യയെയാണ് ഗുണിച്ചത് ?

(4) ഒരു സംഖ്യയെ 21 കൊണ്ട് ഹരിച്ചപ്പോൾ 756 കിട്ടി. ഏതു സംഖ്യയെയാണ് ഹരിച്ചത് ?

പലവിധ മാറ്റം

ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

രണ്ടു നോട്ടുപുസ്തകവും, ആറു രൂപയ്ക്ക് ഒരു പേനയും വാങ്ങിയപ്പോൾ 46 രൂപ ചെലവായി. ഒരു നോട്ടുപുസ്തകത്തിന്റെ വില എന്താണ് ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം. 6 രൂപയുടെ പേനയും കൂടി വാങ്ങിയപ്പോഴാണ് 46 രൂപയായത്. പേന വാങ്ങിയില്ലായിരുന്നുവെങ്കിലോ ?

40 രൂപയേ ആകുമായിരുന്നുള്ളു.

ഈ 40 രൂപ രണ്ടു നോട്ടുപുസ്തകങ്ങളുടെ വിലയാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഒരു നോട്ടുപുസ്തകത്തിന്റെ വില 20 രൂപ.

ഇനി തിരിച്ചുനോക്കിയാലോ ?

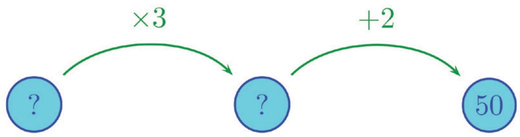
20 രൂപ വിലയുള്ള രണ്ടു നോട്ടുപുസ്തകങ്ങൾക്ക് 40 രൂപ, പേനയ്ക്ക് 6 രൂപ;

ആകെ 46 രൂപ.

ഇനി ഈ കണക്ക് നോക്കൂ:

> ഒരു സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങിനോട് രണ്ടു കൂട്ടിയപ്പോൾ 50 ആയി. സംഖ്യ എന്താണ്?

അറിയാത്തൊരു സംഖ്യയെ ആദ്യം 3 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, പിന്നെ 2 കൂട്ടിയപ്പോൾ 50 ആയി.



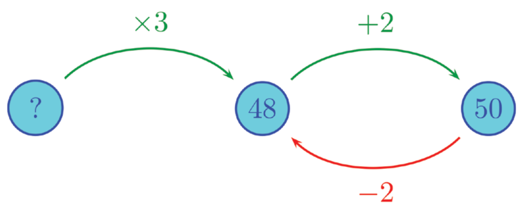
പ്രാചീന ഗണിതം

ഏതാണ്ട് ബി.സി.ഇ. മൂവായിരത്തോടടുത്ത കാലത്തു തന്നെ ഈജിപ്റ്റുകാർ പലതരം കാര്യങ്ങൾ എഴുതി സൂക്ഷിച്ചിരുന്നു. പപ്പൈറസ് എന്നു പേരുള്ള ചെടിയുടെ തണ്ടുകൾ ഉപയോഗിച്ചുണ്ടാക്കിയിരുന്ന താളുകളിലാണ് അക്കാലത്ത് എഴുതിയിരുന്നത്. ഇത്തരം അനേകം രേഖകൾ പുരാവസ്തുഗവേഷകർ കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്. അത്തരം രേഖകൾക്കും പപ്പൈറസ് എന്നു തന്നെയാണ് പറയുന്നത്.

ഈജിപ്തിലെ ഇത്തരം ഒരു പപ്പൈറസിൽ ഗണിത പ്രശ്നങ്ങളും അവ ചെയ്യാനുള്ള മാർഗങ്ങളുമാണ് ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. ഏതാണ്ട് ബി.സി.ഇ. 1650 ൽ എഴുതപ്പെട്ടതാണ് ഇതെന്ന് കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട്. ഇതിന്റെ തുടക്കത്തിൽത്തന്നെ ഇതെഴുതിയ ആൾ തന്റെ പേര് ആമോസ് എന്നാണെന്നും ഇരുന്നൂറ് വർഷത്തോളം പഴക്കമുള്ള ഒരു രേഖയിൽനിന്നും പകർത്തിയെഴുതുകയാണെന്നും പറയുന്നുണ്ട്. ബ്രിട്ടീഷ് മ്യൂസിയത്തിൽ സൂക്ഷിച്ചിട്ടുള്ള ഈ രേഖയെ ആമോസ് പപ്പൈറസ് എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത് (ഇത് കണ്ടെടുത്തത് അലക്സാണ്ടർ റിൻഡ് എന്ന ഗവേഷകനായതിനാൽ റിൻഡ് പപ്പൈറസ് എന്നും പറയാറുണ്ട്); സംഖ്യകളെയും രൂപങ്ങളെയും കുറിച്ചുള്ള പ്രശ്നങ്ങളാണ് ഇതിൽ ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്.

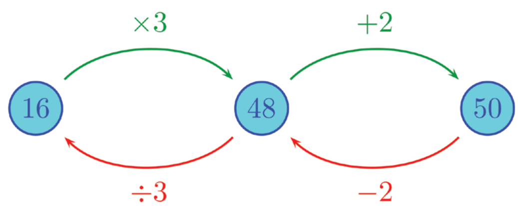
തുടങ്ങിയ സംഖ്യ തിരിച്ചു കിട്ടാൻ എന്തെല്ലാം ചെയ്യണം ?

അവസാനം 2 കൂട്ടിയപ്പോഴാണല്ലോ 50 ആയത്; അപ്പോൾ അതിനു മുമ്പു $50 - 2 = 48$ ആയിരുന്നു.



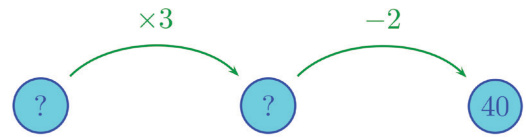
ഇനി 48 ൽ നിന്ന്, തുടങ്ങിയ സംഖ്യയിലെത്തുന്നതെങ്ങനെ ?

3 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചപ്പോഴാണ് 48 ആയത്. അപ്പോൾ തുടങ്ങിയ സംഖ്യ $48 \div 3 = 16$

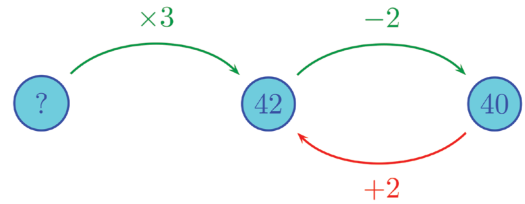


ഇപ്പോൾ ചെയ്ത കണക്ക് ഇങ്ങനെ മാറ്റിയാലോ?

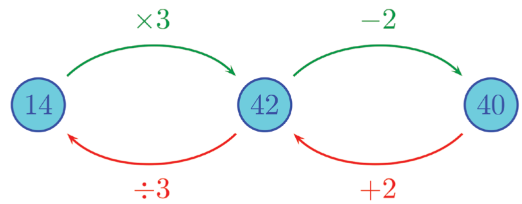
ഒരു സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങിൽ നിന്ന് രണ്ടു കുറച്ചപ്പോൾ 40 ആയി. സംഖ്യ എന്താണ് ?



ഇവിടെ അവസാനം 2 കുറയ്ക്കുന്നതിനു മുമ്പുള്ള സംഖ്യ 40 + 2 = 42;



ഇത്, 3 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയതാണ്; അപ്പോൾ അതിനും മുമ്പ് 42 ÷ 3 = 14 അതായത്, തുടങ്ങിയ സംഖ്യ 14.



ഇത്തരം കണക്കുകൾ ഇനി മനസ്സിൽത്തന്നെ ചെയ്യുമല്ലോ.

ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

ഒരു സംഖ്യയോട് 2 കൂട്ടി, 3 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചപ്പോൾ 60 ആയി. സംഖ്യ എന്താണ് ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

(i) അവസാനം 3 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചപ്പോഴാണ് 60 ആയത്; അപ്പോൾ അതിനു മുമ്പ് 60 ÷ 3 = 20

(ii) ആദ്യം 2 കൂട്ടിയപ്പോഴാണ് 20 ആയത്; അപ്പോൾ തുടങ്ങിയ സംഖ്യ 20 – 2 = 18

(1) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 50 മീറ്ററും, ഒരു വശം 5 മീറ്ററുമാണ്. മറ്റേ വശം എത്ര മീറ്ററാണ് ?

(2) അനിതയും കൂട്ടുകാരും പേന വാങ്ങി. 5 പേന ഒന്നിച്ചു വാങ്ങിയപ്പോൾ ആകെ വിലയിൽ നിന്ന് 3 രൂപ കുറവു കിട്ടി. അവർക്ക് 32 രൂപയാണ് ചെലവായത്. ഓരോന്നായി വാങ്ങിയിരുന്നെങ്കിൽ, ഓരോ പേനയ്ക്കും എത്ര രൂപ വീതം കൊടുക്കണമായിരുന്നു ?

(3) ചുവടെയുള്ള കണക്കുകളിലെല്ലാം, ഒരു സംഖ്യയിൽ ചില ക്രിയകൾ ചെയ്തതിന്റെ ഫലം പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു. ഓരോന്നിലും സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) രണ്ടു മടങ്ങിനോട് മൂന്നു കൂട്ടിയപ്പോൾ 101

(ii) മൂന്നു മടങ്ങിനോട് രണ്ടു കൂട്ടിയപ്പോൾ 101

(iii) രണ്ടു മടങ്ങിൽ നിന്ന് മൂന്നു കുറച്ചപ്പോൾ 101

(iv) മൂന്നു മടങ്ങിൽ നിന്ന് രണ്ടു കുറച്ചപ്പോൾ 101

(4) ഒരു സംഖ്യയെ 6 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 4 കൂട്ടിയപ്പോൾ 100 കിട്ടി. സംഖ്യ എന്താണ് ?

(5) ഒരു സംഖ്യയോട് 6 കൂട്ടി 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചപ്പോൾ 100 കിട്ടി. സംഖ്യ എന്താണ് ?

മടങ്ങും ഭാഗവും

ഒരു ചെറിയ കണക്ക്:

ഗോപുവിന് 3 നോട്ടു പുസ്തകവും, അനിയത്തി മീനയ്ക്ക് 2 നോട്ടു പുസ്തകവും വാങ്ങിയപ്പോൾ 100 രൂപയായി. ഒരു നോട്ടുപുസ്തകത്തിന്റെ വിലയെന്താണ് ?

ആകെ 5 എണ്ണമാണല്ലോ വാങ്ങിയത്. ആകെ വില 100 രൂപയും.

അപ്പോൾ ഒരെണ്ണത്തിന്റെ വില $100 \div 5 = 20$

ഈ കണക്കുതന്നെ, നോട്ടുപുസ്തകത്തിന്റെ വില എന്ന സംഖ്യമാത്രം ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാലോ ?

ഒരു സംഖ്യയുടെ 3 മടങ്ങും 2 മടങ്ങും കൂട്ടിയപ്പോൾ 100 ആയി. സംഖ്യ എന്താണ് ?

ഏതു സംഖ്യയുടെയും 3 മടങ്ങും 2 മടങ്ങും കൂട്ടിയാൽ 5 മടങ്ങാകുമല്ലോ.

അപ്പോൾ, സംഖ്യയുടെ 5 മടങ്ങ് 100; സംഖ്യ 100 ന്റെ $\frac{1}{5}$ ഭാഗം, 20.

സംഖ്യകൾ മാത്രമായി മറ്റൊരു കണക്ക്:

ഒരു സംഖ്യയുടെ 3 മടങ്ങിനോട് 10 കൂട്ടിയപ്പോൾ, സംഖ്യയുടെ 5 മടങ്ങായി. സംഖ്യ എന്താണ് ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

(i) 3 മടങ്ങിനേക്കാൾ 10 കൂടുതലാണ് 5 മടങ്ങ്

(ii) 5 മടങ്ങും 3 മടങ്ങും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 10

(iii) സംഖ്യയുടെ 2 മടങ്ങ് 10

(iv) സംഖ്യ, 10 ന്റെ പകുതി 5

വിലോമക്രിയ

ഒരു സംഖ്യയോട് 2 കൂട്ടിയ തുക അറിയാമെങ്കിൽ, സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാൻ 2 കുറയ്ക്കണം. സംഖ്യയിൽ നിന്ന് 2 കുറച്ചതാണ് അറിയാവുന്നതെങ്കിലോ? സംഖ്യ തിരിച്ചു കിട്ടാൻ 2 കൂട്ടണം. ഇതുപോലെ സംഖ്യയുടെ 2 കൊണ്ടുള്ള ഗുണനഫലത്തിൽ നിന്ന് സംഖ്യ കിട്ടാൻ 2 കൊണ്ട് ഹരിക്കുകയും, ഹരണഫലത്തിൽ നിന്ന് സംഖ്യ കിട്ടാൻ ഗുണിക്കുകയുമാണല്ലോ ചെയ്യേണ്ടത്.

ഈ രിതിയെക്കുറിച്ച്, സി.ഇ. പന്ത്രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഭാസ്കരാചാര്യർ അദ്ദേഹത്തിന്റെ **ലീലാവതി** എന്ന കൃതിയിൽ ചർച്ച ചെയ്യുന്നുണ്ട്. വിലോമക്രിയ എന്ന് അദ്ദേഹം വിളിക്കുന്ന ഈ മാർഗം പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്:

ഫലമറിയാമെങ്കിൽ സംഖ്യ കണക്കാക്കാൻ ഹരണത്തെ ഗുണനമാക്കുക, ഗുണനത്തെ ഹരണമാക്കുക, വർഗത്തെ വർഗമൂലമാക്കുക, വർഗമൂലത്തെ വർഗമാക്കുക.

(1) ഒരു സംഖ്യയുടെ 2 മടങ്ങും 7 മടങ്ങും കൂട്ടിയപ്പോൾ 27 കിട്ടി. സംഖ്യ എന്താണ്?

(2) ഒരു സംഖ്യയുടെ 12 മടങ്ങിനോട് 99 കൂട്ടിയപ്പോൾ സംഖ്യയുടെ 21 മടങ്ങായി. സംഖ്യ എന്താണ്?

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

ഒരു കുപ്പിയിൽ നിറച്ച് വെള്ളവും, അതിന്റെ നാലിലൊരു ഭാഗവും എടുത്തപ്പോൾ ഒരു ലിറ്ററായി. കുപ്പിയിൽ എത്ര വെള്ളം കൊള്ളും ?

കുപ്പിയിൽ നിറച്ച വെള്ളവും, അതിന്റെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗവും ചേർന്നാൽ, കുപ്പിയിൽ കൊള്ളുന്ന വെള്ളത്തിന്റെ $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ മടങ്ങാകുമല്ലോ. ഇത് 1 ലിറ്റർ എന്നാണ് പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്.

അതായത് കുപ്പിയിൽ കൊള്ളുന്ന വെള്ളത്തിന്റെ $\frac{5}{4}$ മടങ്ങ് 1 ലിറ്റർ.

അപ്പോൾ കുപ്പിയിൽ കൊള്ളുന്ന വെള്ളം, 1 ലിറ്ററിന്റെ $\frac{4}{5}$ ഭാഗം (ഏഴാം ക്ലാസിലെ **വിപരീതഭിന്നങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **തിരിച്ചും മറിച്ചും** എന്ന ഭാഗം).

അതായത് കുപ്പിയിൽ $\frac{4}{5}$ ലിറ്റർ, അഥവാ $1000 \times \frac{4}{5} = 800$ മില്ലിലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും.

ഈ കണക്കും സംഖ്യകൾ മാത്രം ഉപയോഗിച്ചു പറയാം:

ഒരു സംഖ്യയുടെ $\frac{5}{4}$ മടങ്ങ് 1 ആണെങ്കിൽ, സംഖ്യ എത്രയാണ്?

സംഖ്യ $1 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ എന്നു കണക്കാക്കുകയും ചെയ്യാം.

മറ്റൊരു കണക്ക്:

ഒരു പാത്രത്തിന്റെ മൂന്നിലൊരു ഭാഗം വെള്ളം നിറച്ചിട്ടുണ്ട്. ഒരു ലിറ്റർ കൂടി ഒഴിച്ചപ്പോൾ പാത്രം പകുതി നിറഞ്ഞു. പാത്രത്തിൽ ആകെ എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും ?

ഇത് സംഖ്യകൾ മാത്രമായി പറഞ്ഞാൽ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാകും.

ഒരു സംഖ്യയുടെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗത്തിനോട് 1 കൂട്ടിയപ്പോൾ $\frac{1}{2}$ ഭാഗമായി. സംഖ്യ എന്താണ് ?

$\frac{1}{2}$ ഭാഗവും $\frac{1}{3}$ ഭാഗവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമാണല്ലോ 1.

ഈ വ്യത്യാസം സംഖ്യയുടെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

അപ്പോൾ സംഖ്യയുടെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗം 1; സംഖ്യ 6

അതായത്, പാത്രത്തിൽ 6 ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും.

നമ്മുടെ നാട്ടിൽ ഏറെ പ്രചാരമുള്ള ഒരു പഴയ കണക്കു നോക്കാം:

പക്ഷിക്കൂട്ടത്തോട് കുട്ടി ചോദിച്ചു, "നിങ്ങളെത്ര പേർ" ? ഒരു പക്ഷി പറഞ്ഞു:

ഞങ്ങളും ഞങ്ങളോളവും

ഞങ്ങളിൽ പകുതിയും

അതിൽ പകുതിയും

ഒന്നും ചേർന്നാൽ നൂറാകും

എത്ര പക്ഷികളുണ്ടായിരുന്നു ?

പക്ഷികളുടെ എണ്ണം എന്ന സംഖ്യയിൽ, പക്ഷി പറഞ്ഞ ക്രിയകൾ ചെയ്തുനോക്കാം:

ഞങ്ങളും ഞങ്ങളോളവും	:	സംഖ്യയുടെ 2 മടങ്ങ്
ഞങ്ങളിൽ പകുതിയും	:	സംഖ്യയുടെ $2\frac{1}{2}$ മടങ്ങ്
അതിൽ പകുതിയും	:	സംഖ്യയുടെ $2\frac{3}{4}$ മടങ്ങ്
1 ഉം കൂടിച്ചേർന്നാൽ	:	സംഖ്യയുടെ $2\frac{3}{4}$ മടങ്ങിനോട് 1 കൂട്ടിയത്

അപ്പോൾ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാകും:

ഒരു സംഖ്യയുടെ $2\frac{3}{4}$ മടങ്ങിനോട് 1 കൂട്ടിയാൽ 100 ആകും. സംഖ്യ എന്താണ് ?

ആദ്യം തന്നെ, സംഖ്യയുടെ $2\frac{3}{4}$ മടങ്ങ്, $100 - 1 = 99$ എന്നു കണക്കാക്കാം. ഇനി $2\frac{3}{4}$ നെ ഇങ്ങനെ മാറ്റി എഴുതാം:

$$2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

അതായത് സംഖ്യയുടെ $\frac{11}{4}$ മടങ്ങ് 99

അപ്പോൾ സംഖ്യ

$$99 \times \frac{4}{11} = \frac{9 \times 11 \times 4}{11} = 9 \times 4 = 36$$

പക്ഷിക്കൂട്ടത്തിൽ 36 പക്ഷികൾ.

(1) ഒരു കയറിൽ നിന്ന് അതിന്റെ മൂന്നിലൊരു ഭാഗം മുറിച്ചു മാറ്റിയപ്പോൾ, മിച്ചമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ നീളം 10 മീറ്റർ. കയറിന് എന്ത് നീളമുണ്ടായിരുന്നു ?

(2) ഒരു പാത്രത്തിലുള്ള പാലിന്റെ പകുതിയും, മിച്ചമുള്ളതിന്റെ മൂന്നിലൊരു ഭാഗവും ഉപയോഗിച്ചു കഴിഞ്ഞപ്പോൾ, 5 ലിറ്റർ മിച്ചമുണ്ട്. പാത്രത്തിൽ എത്ര ലിറ്റർ പാൽ ഉണ്ടായിരുന്നു ?

ബീജഗണിതരീതി

ഇപ്പോൾ ചെയ്ത കണക്കുകളുടെയെല്ലാം പൊതുസ്വഭാവം എന്താണ്? ഏതോ ഒരു സംഖ്യയിൽ ചില ക്രിയകളെല്ലാം ചെയ്തപ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഫലം ഏതു സംഖ്യയാണെന്ന് പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. തുടങ്ങിയത് ഏതു സംഖ്യയിൽ നിന്നാണെന്നു കണ്ടുപിടിക്കണം.

എങ്ങനെയാണ് കണ്ടുപിടിച്ചത് ? ചെയ്ത ക്രിയകളുടേയെല്ലാം വിപരീതക്രിയകൾ പുറകോട്ട് (അവസാനം ചെയ്തത് ആദ്യം എന്ന ക്രമത്തിൽ) ചെയ്യുക. ഉദാഹരണമായി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

> റഷീദ 4 കിലോഗ്രാം വെണ്ടക്കയും 20 രൂപയ്ക്ക് മല്ലിയില, കറിവേപ്പില മുതലായവയും വാങ്ങിയപ്പോൾ 200 രൂപയായി. ഒരു കിലോഗ്രാം വെണ്ടക്കയുടെ വില എന്താണ്?

ആദ്യം ഇത് കണക്കിന്റെ ഭാഷയിൽ എഴുതാം.

> ഒരു സംഖ്യയെ 4 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് 20 കൂട്ടിയപ്പോൾ 200 കിട്ടി. സംഖ്യ ഏതാണ്?

എങ്ങനെയാണ് തുടങ്ങിയ സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് ? അവസാനം കൂട്ടിയ 20 ആദ്യം കുറയ്ക്കുക; ആദ്യം ഗുണിച്ച 4 കൊണ്ട് പിന്നീട് ഹരിക്കുക. അതായത്

$$(200 - 20) \div 4 = 180 \div 4 = 45$$

അങ്ങനെ ഒരു കിലോഗ്രാം വെണ്ടക്കയുടെ വില 45 രൂപയാണെന്നു കാണാം.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കുക:

> പത്തു മീറ്റർ നീളമുള്ള കമ്പി വളച്ച്, ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കണം. വീതിയേക്കാൾ ഒരു മീറ്റർ കൂടുതൽ നീളവും വേണം. നീളവും വീതിയും എത്രയാകണം?

ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, പത്ത് മീറ്ററാണല്ലോ. അത് നീളവും വീതിയും കൂട്ടിയതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്. ഇവിടെ നീളം വീതിയെക്കാൾ 1 മീറ്റർ കൂടുതലാണ്. അപ്പോൾ നീളവും വീതിയും കൂട്ടുകയെന്നാൽ, വീതിയും, വീതിയോട് 1 കൂട്ടിയതും തമ്മിൽ കൂട്ടുക എന്നാകും.

അപ്പോൾ പ്രശ്നത്തെ സംഖ്യകൾ മാത്രമുപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാലോ?

> ഒരു സംഖ്യയുടേയും, അതിനോട് 1 കൂട്ടിയതിന്റേയും തുകയുടെ 2 മടങ്ങ് 10 ആണ്. സംഖ്യ എന്താണ്?

അവസാനമെടുത്ത രണ്ടു മടങ്ങ് ഒഴിവാക്കിയാൽ ഇങ്ങനെ പറയാം:

> ഒരു സംഖ്യയുടേയും, അതിനോട് 1 കൂട്ടിയതിന്റേയും തുക 5; സംഖ്യ എന്താണ്?

ഏതു സംഖ്യയായാലും, അതും അതിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയതും തമ്മിൽ കൂട്ടുന്നത്, അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒന്നു കൂട്ടുന്നതിനു തുല്യമാണെന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമ്മയുണ്ടോ? (**ബീജഗണിതം** എന്ന പാഠത്തിലെ **സംഖ്യകളും ബീജഗണിതവും** എന്ന ഭാഗം).

ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതത്തിലെഴുതുന്നതാണ് സൗകര്യമെന്നും കണ്ടു.

x ഏതു സംഖ്യ ആയാലും $x + (x + 1) = 2x + 1$

ഇപ്പോൾ ആലോചിക്കുന്ന കണക്കിൽ ഇക്കാര്യം ഉപയോഗിക്കാം: ഈ കണക്കിലെ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ, ഈ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയാകും.

$2x + 1 = 5$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്തായിരിക്കണം ?

എന്താണിതിന്റെ അർഥം ?

ഒരു സംഖ്യയുടെ 2 മടങ്ങിനോട് 1 കൂട്ടിയപ്പോൾ 5; സംഖ്യ എന്താണ് ?

വിപരീതക്രിയകളിലൂടെ സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

$$(5 - 1) \div 2 = 2$$

അപ്പോൾ ചതുരത്തിന്റെ വീതിയും നീളവും 2 മീറ്ററും, 3 മീറ്ററുമാണെന്നു കിട്ടും.

ഇങ്ങനെയുള്ള കണക്കുകൾ, ആദ്യം മുതൽ തന്നെ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു ചെയ്യുന്നതാണ് ചിലപ്പോൾ സൗകര്യം.

ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

ഒരു ക്ലാസിലെ 25 കുട്ടികൾക്ക് പേന വാങ്ങാൻ 85 രൂപ ചെലവായി. 4 രൂപയുടെയും 3 രൂപയുടെയും പേനകളാണ് വാങ്ങിയത്. ഓരോന്നും എത്രയെണ്ണം ?

ആകെ 25 പേനയാണല്ലോ വാങ്ങിയത്.

അപ്പോൾ ഏതെങ്കിലും ഒരു തരം പേനയുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കിയാൽ, അത് 25 ൽ നിന്നു കുറച്ച്, മറ്റേ പേനയുടെ എണ്ണവും കിട്ടും.

ആദ്യം 4 രൂപ പേനകളുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കാൻ നോക്കാം. ഈ സംഖ്യ മാത്രം ഉപയോഗിച്ച്, കണക്ക് എങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം ?

പേര് വന്ന വഴി

അറബ് കൃതികളുടെ പരിഭാഷകളിലൂടെയാണ് നവോത്ഥാനകാല യൂറോപ്പിൽ ബീജഗണിതം പ്രചരിച്ചത്. ഇവയിൽ പ്രധാനം മുഹമ്മദ് അൽഖ്വാരിസ്മി എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്റെ കൃതികളാണ്.

സി.ഇ. എട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ് അൽഖ്വാരിസ്മി ജീവിച്ചിരുന്നത്.

ഒരു സംഖ്യയിൽ നിന്ന് 2 കുറച്ചപ്പോൾ 5 കിട്ടി എന്നതിൽ നിന്ന് സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാൻ 5 ഉം 2 ഉം കൂട്ടുകയാണല്ലോ ചെയ്യുന്നത്. ഇത്തരം ക്രിയകളെ **അൽജബർ** എന്ന അറബ് വാക്കുകൊണ്ടാണ് അൽഖ്വാരിസ്മി സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. "കൂട്ടിച്ചേർക്കുക" അല്ലെങ്കിൽ "പൂർവസ്ഥിതിയിലാക്കുക" എന്നാണ് ഈ വാക്കിന്റെ അർഥം. ബീജഗണിതത്തിന് ഇംഗ്ലീഷിൽ algebra എന്ന പേരു വന്നത് ഈ അറബ് വാക്കിൽ നിന്നാണ്.

ചിട്ടയായ ചുവടുകളിലൂടെ ഒരു പ്രശ്നം പരിഹരിക്കുന്ന പദ്ധതിക്ക് (വിശേഷിച്ചു കമ്പ്യൂട്ടറുകളിൽ) algorithm എന്നു പേരുണ്ട്. അൽഖ്വാരിസ്മി എന്ന വാക്കിൽ നിന്നാണ് ഇതുണ്ടായത്.

ഒരു സംഖ്യയുടെ 4 മടങ്ങും, 25 ൽ നിന്ന് ആ സംഖ്യ കുറച്ചതിന്റെ 3 മടങ്ങും കൂട്ടിയാൽ 85; സംഖ്യ എന്താണ്?

ഇത് വിപരീതക്രിയാരീതിയിൽ അഴിച്ചെടുക്കാൻ വിഷമമല്ലേ ?

കണക്ക് ബീജഗണിതത്തിലേക്ക് മാറ്റിയാലോ ?

4 രൂപാ പേനകളുടെ എണ്ണം x എന്നെടുത്ത് കണക്കിലെ സംഖ്യകളോരോന്നും ഇതുപയോഗിച്ച് എഴുതി നോക്കാം:

4 രൂപാ പേനകളുടെ എണ്ണം	:	x
അവയുടെ വില	:	$4x$
3 രൂപാ പേനകളുടെ എണ്ണം	:	$25 - x$
അവയുടെ വില	:	$3(25 - x)$
ആകെ വില	:	$4x + 3(25 - x)$

അപ്പോൾ ചോദ്യം എന്താണ് ?

$4x + 3(25 - x) = 85$ ആണെങ്കിൽ, x എന്താണ്?

ഇതിലെ $3(25 - x)$ എന്ന ഭാഗം ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാമല്ലോ.

$$3(25 - x) = (3 \times 25) - (3 \times x)$$
$$= 75 - 3x$$

ഇതുപയോഗിച്ച് $4x + 3(25 - x)$ നെയും മാറ്റാം:

$$4x + 3(25 - x) = 4x + 75 - 3x$$
$$= 4x - 3x + 75$$
$$= x + 75$$

ഇപ്പോൾ ചോദ്യം എന്തായി?

$x + 75 = 85$ ആണെങ്കിൽ, x എന്താണ് ?

ഒരു സംഖ്യയോട് 75 കൂട്ടിയാൽ 85 ആകുമെങ്കിൽ, സംഖ്യ $85 - 75 = 10$ അല്ലേ ?

അപ്പോൾ ഈ കണക്കിൽ $x = 10$

അതായത്, 4 രൂപാ പേന 10 എണ്ണം, 3 രൂപാ പേന $25 - 10 = 15$ എണ്ണം.

(1) 80 മീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം, വീതിയുടെ രണ്ടു മടങ്ങിനേക്കാൾ ഒരു മീറ്റർ കൂടുതലാണ്. അതിന്റെ വീതിയും നീളവും എത്രയാണ്?

(2) നൂറു രൂപ ചില്ലറയാക്കിയപ്പോൾ ഇരുപതിന്റേയും പത്തിന്റേയും നോട്ടുകളാണ് കിട്ടിയത്. ആകെ ഏഴു നോട്ടുകൾ. ഓരോന്നും എത്ര വീതം ?

(3) ഒരു പുസ്തകത്തിന്റെ വില, ഒരു പേനയുടെ വിലയേക്കാൾ 4 രൂപ കൂടുതലാണ്. ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില, ഈ പേനയുടെ വിലയേക്കാൾ 2 രൂപ കുറവുമാണ്. ഒരാൾ 5 പുസ്തകവും, 2 പേനയും 3 പെൻസിലും വാങ്ങി. ആകെ 54 രൂപയായി. ഓരോന്നിന്റേയും വില എന്താണ് ?

(4) കലണ്ടറിൽ നാലു സംഖ്യകളുള്ള ഒരു സമചതുരം അടയാളപ്പെടുത്തി, അതിലെ സംഖ്യകളെല്ലാം കൂട്ടിയപ്പോൾ 80 കിട്ടി. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

> അജയന് വിജയനേക്കാൾ പത്തു വയസ്സ് കൂടുതലാണ്. അടുത്ത വർഷം അജയന്റെ പ്രായം, വിജയന്റെ പ്രായത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാകും. ഇപ്പോൾ ഇവരുടെ പ്രായമെത്രയാണ് ?

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു തന്നെ തുടങ്ങാം. വിജയന്റെ ഇപ്പോഴത്തെ പ്രായം x എന്നെടുത്ത്, കണക്കിലെ സംഖ്യകളെല്ലാം ഇത് ഉപയോഗിച്ചെഴുതാം:

വിജയന്റെ പ്രായം : x

അജയന്റെ പ്രായം : $x + 10$

അടുത്ത വർഷം വിജയന്റെ പ്രായം : $x + 1$

അടുത്ത വർഷം അജയന്റെ പ്രായം : $x + 11$

അടുത്ത വർഷം വിജയന്റെ പ്രായത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് അജയന്റെ പ്രായം എന്നാണ് പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്.

അപ്പോൾ പ്രശ്നം എങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം ?

$2(x + 1) = x + 11$ ആണെങ്കിൽ, x എന്താണ് ?

ഇതിലെ $2(x + 1)$ നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാമല്ലോ.

$$2(x + 1) = 2x + 2$$

അപ്പോൾ ചോദ്യം എന്തായി ?

സമവാക്യങ്ങൾ

ഒരു സംഖ്യയുടെ 2 മടങ്ങിനോട് 1 കൂട്ടിയപ്പോൾ 9 കിട്ടി; ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതത്തിൽ എഴുതുന്നതെങ്ങനെ ?

$$2x + 1 = 9$$

ഈ സംഖ്യ 4 ആണെന്ന് എളുപ്പം കണക്കാക്കാമല്ലോ. അതായത് x ആയി 4 എന്നെടുത്താലേ മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യം ശരിയാകുകയുള്ളു. കണക്കിന്റെ ഭാഷയിൽ ഇതു പറയുന്നത്,

> $2x + 1 = 9$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം $x = 4$

ചില ബീജഗണിതസമവാക്യങ്ങളിൽ, അക്ഷരങ്ങളായി ഏതു സംഖ്യകളെടുത്താലും ശരിയാകും എന്നും കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഉദാഹരണമായി,

$$x + (x + 1) = 2x + 1$$

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$x - (y - z) = (x - y) + z$$

ഇത്തരം സമവാക്യങ്ങളെ **സർവസമവാക്യങ്ങൾ (Identities)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

$2x + 2 = x + 11$ ആണെങ്കിൽ, x എന്താണ് ?

ഇനിയോ ?

പലതരത്തിൽ തുടരാം.

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

(i) $2x$ എന്ന സംഖ്യയോട് 2 കൂട്ടിയപ്പോൾ $x + 11$ എന്ന സംഖ്യ കിട്ടി

(ii) $2x$ എന്ന സംഖ്യ $x + 11$ എന്ന സംഖ്യയിൽ നിന്ന് 2 കുറച്ചതാണ്

(iii) $2x = (x + 11) - 2$

(iv) $2x = x + 9$

അവസാനം കിട്ടിയ സമവാക്യത്തിന്റെ അർഥമെന്താണ് ?

x എന്ന സംഖ്യയോട് 9 കൂട്ടിയപ്പോൾ $2x$ ആയി; അതായത് x രണ്ടു മടങ്ങായി.

ഒരു സംഖ്യയോട് അതുതന്നെ കൂട്ടിയാലല്ലേ രണ്ടു മടങ്ങാകുക.

ഒൻപതിന്റെ കളി

9 ൽ അവസാനിക്കുന്ന ഏതെങ്കിലും രണ്ടക്ക സംഖ്യ എടുത്ത്, അക്കങ്ങളുടെ തുകയും ഗുണനഫലവും കൂട്ടി നോക്കൂ.

ഉദാഹരണമായി 29 എടുത്താൽ അക്കങ്ങളുടെ തുക $2 + 9 = 11$: ഗുണനഫലം $2 \times 9 = 18$

ഇവ തമ്മിൽ കൂട്ടിയാൽ $18 + 11 = 29$.

9 ൽ അവസാനിക്കുന്ന എല്ലാ രണ്ടക്ക സംഖ്യകൾക്കും ഇത് ശരിയാകുമോ ?

സംഖ്യ $10x + 9$ എന്നെടുത്തു നോക്കൂ.

9 അല്ലാത്ത മറ്റേതെങ്കിലും അക്കങ്ങളിൽ അവസാനിക്കുന്ന രണ്ടക്ക സംഖ്യകൾക്ക് ഈ സവിശേഷതയുണ്ടോ ?

$10x + y = x + y + xy$ എന്നതിൽനിന്ന് y കണ്ടുപിടിക്കാമോ ?

അപ്പോൾ x എന്ന സംഖ്യ 9 ആണ്.

അതായത്, വിജയന്റെ പ്രായം 9, അജയന്റെ പ്രായം $9 + 10 = 19$

മറ്റൊരു വിധത്തിലും ആലോചിക്കാം. പ്രശ്നത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം ഇതാണല്ലോ.

$$2x + 2 = x + 11 \text{ ആണെങ്കിൽ, } x \text{ എന്താണ് ?}$$

x ആയി ഏതോ സംഖ്യ എടുത്തപ്പോൾ $2x + 2$ എന്ന ക്രിയയും, $x + 11$ എന്ന ക്രിയയും ചെയ്തപ്പോൾ ഒരേ ഉത്തരം കിട്ടി എന്നാണല്ലോ ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ അർഥം.

അപ്പോൾ രണ്ടു ക്രിയകളിലും ഒരേ സംഖ്യ കുറയ്ക്കുകയും കൂടി ചെയ്താലും ഒരേ ഉത്തരം കിട്ടണ്ടേ ?

കുറയ്ക്കുന്നത് x ആയാലോ ?

$$(2x + 2) - x = x + 2$$
$$(x + 11) - x = 11$$

ഈ ഉത്തരങ്ങൾ ഒന്നുതന്നെയാണെന്നു കണ്ടല്ലോ. അതായത്

$$x + 2 = 11$$

ഇതിൽ നിന്ന് $x = 9$ എന്നു കാണാം.

ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

ആസിഡും വെള്ളവും ചേർന്ന ദ്രാവകത്തിൽ 60% ആസിഡ് ആണ്. 6 ലിറ്റർ ആസിഡ് കൂടി ഒഴിച്ചപ്പോൾ, ആസിഡ് 75% ആയി. ആദ്യം എത്ര ലിറ്റർ ആസിഡ് ഉണ്ടായിരുന്നു ?

ഇതിൽ ആദ്യം എത്ര ലിറ്റർ ദ്രാവകമുണ്ടായിരുന്നു എന്നു പറഞ്ഞിട്ടില്ല. ഇത് x ലിറ്റർ എന്നെടുക്കാം. ഇതിന്റെ 60% ആസിഡും, മിച്ചമുള്ള 40% വെള്ളവും ആണെന്നാണ് പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്. അതായത്,

ആകെ ദ്രാവകം	x ലിറ്റർ
ആസിഡ്	$\frac{60}{100}x = \frac{3}{5}x$ ലിറ്റർ
വെള്ളം	$\frac{40}{100}x = \frac{2}{5}x$ ലിറ്റർ

ഇനി 6 ലിറ്റർ ആസിഡ് ഒഴിച്ചുകഴിയുമ്പോൾ ഈ അളവുകൾ എങ്ങനെയാകും ?

ആകെ ദ്രാവകം	$x + 6$ ലിറ്റർ
ആസിഡ്	$\frac{3}{5}x + 6$ ലിറ്റർ
വെള്ളം	$\frac{2}{5}x$ ലിറ്റർ

ഇപ്പോൾ ആസിഡിന്റെ അളവ്, മൊത്തം ദ്രാവകത്തിന്റെ 75% ആയി എന്നാണ് പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്. അതായത്, ഇപ്പോൾ ആസിഡിന്റെ അളവ്

$$(x + 6) \times \frac{75}{100} = \frac{3}{4}(x + 6) \text{ ലിറ്റർ}$$

നേരത്തെ കണക്കു കൂട്ടിയതനുസരിച്ച്, ഇപ്പോൾ ആസിഡിന്റെ അളവ് $\frac{3}{5}x + 6$ ലിറ്റർ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ

$$\frac{3}{4}(x + 6) = \frac{3}{5}x + 6$$

ഇത് ഇങ്ങനെ എഴുതാമല്ലോ.

$$\frac{3}{4}x + 4\frac{1}{2} = \frac{3}{5}x + 6$$

അതായത്, $\frac{3}{4}x$ എന്ന സംഖ്യയോട് $4\frac{1}{2}$ കൂട്ടിയപ്പോൾ $\frac{3}{5}x + 6$ എന്ന സംഖ്യയായി. അപ്പോൾ ഇതിലെ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയിൽ നിന്ന് $4\frac{1}{2}$ കുറച്ചതല്ലേ ?

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}x &= \left(\frac{3}{5}x + 6\right) - 4\frac{1}{2}\\ &= \frac{3}{5}x + 1\frac{1}{2}\end{aligned}$$

എന്താണ് ഇതിന്റെ അർഥം ?

$\frac{3}{5}x$ നേക്കാൾ $1\frac{1}{2}$ കൂടുതലാണ് $\frac{3}{4}x$. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, $\frac{3}{4}x$ ഉം $\frac{3}{5}x$ ഉം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം $1\frac{1}{2}$ ആണ്.

$$\frac{3}{4}x - \frac{3}{5}x = 1\frac{1}{2}$$

$\frac{3}{4}x - \frac{3}{5}x$ എന്നത് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാമല്ലോ.

$$\frac{3}{4}x - \frac{3}{5}x = \frac{3}{20}x$$

അപ്പോൾ കണക്കിലെ സമവാക്യം ഇങ്ങനെയാകും:

$$\frac{3}{20}x = 1\frac{1}{2}$$

അതായത് x എന്ന സംഖ്യയുടെ $\frac{3}{20}$ ഭാഗം $1\frac{1}{2}$ ആണ്. അപ്പോൾ x എന്ന സംഖ്യ, $1\frac{1}{2}$ യുടെ $\frac{20}{3}$ മടങ്ങല്ലേ ? (ഏഴാം ക്ലാസിലെ **വിപരീതഭിന്നങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **മടങ്ങും ഭാഗവും** എന്ന ഭാഗം).

$$\begin{aligned} x &= 1\frac{1}{2} \times \frac{20}{3} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{20}{3} \\ &= \frac{3 \times 20}{2 \times 3} \\ &= 10 \end{aligned}$$

അപ്പോൾ ആദ്യം ആകെ 10 ലിറ്റർ ദ്രാവകമാണ് ഉണ്ടായിരുന്നത്.

(1) അപ്പുവിന്റെ അമ്മയുടെ പ്രായം, അപ്പുവിന്റെ പ്രായത്തിന്റെ ഒൻപതു മടങ്ങാണ്. ഒൻപതു വർഷം കഴിയുമ്പോൾ, ഇത് മൂന്നു മടങ്ങായി മാറും. ഇവരുടെ ഇപ്പോഴത്തെ പ്രായം എത്രയാണ് ?

(2) ഒരു ക്ലാസിലെ ആൺകുട്ടികളുടെയും പെൺകുട്ടികളുടെയും എണ്ണം തുല്യമാണ്. എട്ടു ആൺകുട്ടികൾ മാത്രം വരാതിരുന്ന ഒരു ദിവസം, ഈ ക്ലാസിലെ പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങായിരുന്നു. ആൺകുട്ടികളുടെയും പെൺകുട്ടികളുടെയും എണ്ണം എത്രയാണ് ?

(3) ആൺകുട്ടികളും പെൺകുട്ടികളും ഉള്ള ഒരു ക്ലാസിൽ 50% പെൺകുട്ടികളാണ്. 10 പെൺകുട്ടികൾ കൂടി വന്നപ്പോൾ പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം 60% ആയി. ക്ലാസിൽ ആദ്യം എത്ര കുട്ടികൾ ഉണ്ടായിരുന്നു ?

(4) വീണ്ടുമൊരു പഴങ്കണക്ക്. ഒരു കുളത്തിൽ താമരപ്പൂക്കൾ വിരിഞ്ഞു നിൽക്കുന്നു. പറന്നെത്തിയ കിളിക്കൂട്ടം, ക്ഷീണമകറ്റാൻ പൂക്കളിലിരുന്നു. ഒരു താമരയിൽ ഒരു കിളി വീതം ഇരുന്നപ്പോൾ ഒരു കിളിക്ക് ഇടമില്ലാതായി. ഒരു താമരയിൽ ഇരുകിളികളായി ചേർന്നിരുന്നപ്പോൾ, ഒരു താമര അധികമായി. താമരയെത്ര ? കിളിയെത്ര ?

6

പുതിയ സംഖ്യകൾ

നിറമുള്ള സംഖ്യകൾ

നീതുവും ഹരിയും അൻവറും ഒരു കളിയിലാണ്; സംഖ്യകൾ കൊണ്ടൊരു ചീട്ടുകളി. 1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ എഴുതിയ 50 ചീട്ടുകൾ, ഓരോ സംഖ്യയും 10 എണ്ണം വീതം; പകുതി ചീട്ടുകളിൽ സംഖ്യകൾ കറുത്ത നിറത്തിലും ബാക്കി പകുതി ചുവന്ന നിറത്തിലും എഴുതിയിരിക്കുന്നു.

ആദ്യം ഓരോരുത്തരും ഒരു കറുത്ത 5 എടുക്കുന്നു. ബാക്കി ചീട്ടുകളെല്ലാം ഇടകലർത്തി അട്ടിയായി നടുക്കു കമഴ്ത്തി വയ്ക്കുന്നു. ഇനി ഓരോരുത്തരും ഊഴം വച്ച് ഓരോ ചീട്ട് അട്ടിയിൽ നിന്നെടുക്കുന്നു. കിട്ടുന്നത് കറുത്ത സംഖ്യയാണെങ്കിൽ അത് കൂട്ടാം. ചുവന്ന സംഖ്യയാണെങ്കിൽ കുറയ്ക്കണം. ഇങ്ങനെ, കൂട്ടിയും കുറച്ചും കളി തുടരുന്നു. ആദ്യം 10 നേക്കാൾ കൂടുതൽ കിട്ടുന്നയാൾ ജയിക്കും.

ആദ്യം കിട്ടിയത് ഇങ്ങനെയാണ്:

നീതു 2 അൻവർ 1 ഹരി 3

അപ്പോൾ കളിയുടെ നിയമമനുസരിച്ച്, ഓരോരുത്തരുടെയും ഇപ്പോഴത്തെ സംഖ്യ എഴുതാം:

നീതു	5	7
അൻവർ	5	6
ഹരി	5	2

രണ്ടാം വട്ടം കിട്ടിയത് ഇങ്ങനെ:

നീതു 1 അൻവർ 3 ഹരി 3

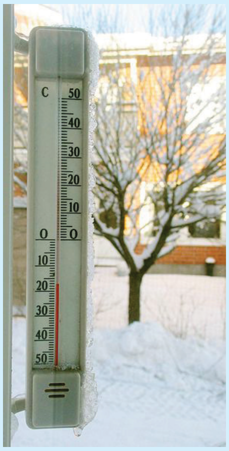
ന്യൂനതാപം

പത്രങ്ങളിലും ടെലിവിഷനിലും മറ്റും ഓരോ ദിവസവും വിവിധ സ്ഥലങ്ങളിലെ താപനിലകൾ പറയുന്നത് ശ്രദ്ധിച്ചിട്ടുണ്ടാവുമല്ലോ. ഉത്തരേന്ത്യയിലെ പല പ്രദേശങ്ങളിലേയും താപനില തണുപ്പുകാലത്ത് −1°C, −2°C എന്നെല്ലാം പറയാറുണ്ട്. എന്താണിതിന്റെ അർഥം?

വെള്ളം ഉറഞ്ഞ് കട്ടിയാകുന്ന താപനിലയെയാണ് പൂജ്യം ഡിഗ്രി സെൽഷ്യസ് (0°C) എന്നെടുത്തിരിക്കുന്നത്. ഇതിലും താഴെയുള്ള താപനിലകളെയാണ് ന്യൂനം ചേർത്തു പറയുന്നത്.

ഒരു കണ്ണാടിക്കുഴലിനുള്ളിലെ രസനാളം താപം കൂടുമ്പോൾ വികസിച്ച് ഉയരുകയും താപം കുറയുമ്പോൾ സങ്കോചിച്ച് താഴുകയും ചെയ്യും. ഇതുപയോഗിച്ചാണ് സാധാരണയായി താപം അളക്കുന്നത്. തണുപ്പേറിയ പ്രദേശങ്ങളിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന ഇത്തരം താപമാപിനികളിൽ പൂജ്യത്തിൽ ത്താഴെയും സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ടാകും.

ചിത്രത്തിലെ താപമാപിനിയിൽ കാണിക്കുന്നത്, −20°C നും −15°C നും ഇടയ്ക്കുള്ള താപനിലയാണ്.



ഇപ്പോൾ ഓരോരുത്തരുടെയും നില എങ്ങനെയെഴുതും?

നീതു	5	7	8
അൻവർ	5	6	3
ഹരി	5	2	

ഹരിയുടെ കാര്യത്തിൽ തർക്കമായി.

2 ൽ നിന്ന് 3 കുറയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല; അതിനാൽ തന്റെ ഇപ്പോഴത്തെ സംഖ്യ 0 എന്നെഴുതാം എന്നു ഹരി പറഞ്ഞു.

അങ്ങനെയല്ല, ഹരി കളിയിൽ തോറ്റു, ഇനി നീതുവും താനും മാത്രം കളിച്ചാൽ മതി എന്ന് അൻവർ.

അതുവേണ്ട, ഹരി ഇനിയും കളിക്കട്ടെ; അടുത്ത വട്ടം കിട്ടുന്ന സംഖ്യയിൽ നിന്ന് 1 കുറച്ചാൽ മതി എന്നായിരുന്നു നീതുവിന്റെ അഭിപ്രായം.

ഇതെല്ലാവരും സമ്മതിച്ചു. ഹരിയുടെ കളത്തിൽ "1 കുറയ്ക്കണം" എന്നെഴുതാമെന്നു തീരുമാനിച്ചു.

എന്നാൽപ്പിന്നെ അല്പം കൂടി ചുരുക്കി –1 എന്നെഴുതിയാൽപ്പോരേ എന്നായി അൻവർ. അതും എല്ലാവരും സമ്മതിച്ചു.

നീതു	5	7	8
അൻവർ	5	6	3
ഹരി	5	2	–1

അടുത്ത വട്ടം ഹരി രക്ഷപ്പെട്ടു.

നീതു 4 അൻവർ 5 ഹരി 3

കളിക്കാരുടെ ഇപ്പോഴത്തെ നില എഴുതാമോ?

നീതു	5	7	8	4
അൻവർ	5	6	3	
ഹരി	5	2	–1	

ശൈത്യം, അതിശൈത്യം

ഇന്ത്യയിൽ ഏറ്റവും തണുപ്പനുഭവപ്പെടുന്ന പ്രദേശം ലഡാക്കിലെ ദ്രാസ് എന്ന പട്ടണമാണ്. ഇവിടെ താപനില –60 °C വരെ താഴ്ന്നതായി രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.

ഭൂമിയിൽ ഏറ്റവും തണുപ്പനുഭവപ്പെടുന്നത് അന്റാർട്ടിക്കാ ഭൂഖണ്ഡത്തിലാണ്.

ഇവിടെയാണ് ഭൂമിയിലെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ താപനിലയായ –89°C രേഖപ്പെടുത്തിയത്.

ഹരിക്ക് ഇപ്പോൾ കിട്ടിയത് 3;

നേരത്തേ ഉണ്ടായിരുന്ന 1 ന്റെ കടം കുറച്ചാൽ 2.

അൻവറിന്റെ കാര്യമോ ?

3 ൽ നിന്ന് 5 കുറയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല. മുമ്പു ഹരിയുടെ കാര്യത്തിൽ ചെയ്തതുപോലെ അടുത്തതായി കിട്ടുന്ന സംഖ്യയിൽ നിന്ന് കുറച്ചാൽ മതി എന്നു തീരുമാനിച്ചു.

എത്ര കുറയ്ക്കണം ?

2 കുറയ്ക്കണം എന്നതിനെ മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ –2 എന്നെഴുതാം.

നീതു	5	7	8	4
അൻവർ	5	6	3	–2
ഹരി	5	2	–1	2

നാലാം വട്ടം കിട്ടിയ ചീട്ടുകൾ ഇവയാണ്:

നീതു 3 അൻവർ 2 ഹരി 5

ഇപ്പോഴത്തെ നില എഴുതാമോ ?

നീതു	5	7	8	4	
അൻവർ	5	6	3	–2	
ഹരി	5	2	–1	2	

പൂജ്യത്തിൽ താഴെ

ചീട്ടുകളിയിൽ 2 ൽ നിന്ന് 3 കുറയ്ക്കേണ്ടി വന്നപ്പോൾ അത് –1 എന്നെഴുതിയല്ലോ. ഇക്കാര്യം

$$2 - 3 = -1$$

എന്നെഴുതാം. എന്താണിതിന്റെ അർഥം ?

2 ൽ നിന്ന് 2 കുറച്ചാൽ 0 ആയി. ഇവിടെ കുറയ്ക്കേണ്ടത് 3 ആയതിനാൽ 1 കൂടി കുറയ്ക്കണം; ഇത് –1 എന്നെഴുതാം:

$$0 - 1 = -1$$

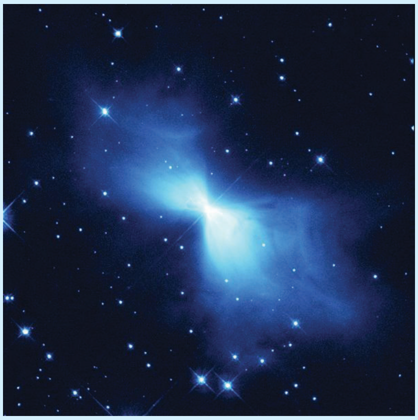
ഇതുപോലെ 3 ൽ നിന്ന് 5 കുറച്ചതെങ്ങനെയാണ് ?

3 ൽ നിന്ന് 3 കുറച്ചാൽ 0; ഇനിയെത്ര കുറയ്ക്കണം ?

$$0 - 2 = -2$$

ശൈത്യപരിധി

നമുക്കറിയാവുന്ന പ്രപഞ്ചം മുഴുവനായി എടുത്താൽ, ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ താപനില കണ്ടെത്തിയിട്ടുള്ളത് ഭൂമിയിൽനിന്ന് അഞ്ഞൂറുകോടിക്കോടി (5×10^{16}) കിലോമീറ്റർ അകലെയുള്ള ബൂമറാങ് നെബുല എന്നു പേരിട്ടിട്ടുള്ള ഒരു നക്ഷത്രപടലത്തിലാണ്. അത് –272.15°C ആണ്.



പ്രപഞ്ചത്തിൽ സ്വാഭാവികമായുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ താപനില ഇതാണെങ്കിലും ഇതിലും കുറഞ്ഞ താപനില പരീക്ഷണശാലകളിൽ കൃത്രിമമായി ഉണ്ടാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

എന്നാൽ, ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലെ താപത്തെക്കുറിച്ചുള്ള സിദ്ധാന്തങ്ങളനുസരിച്ച്, –273.15°C ഡിഗ്രി സെൽഷ്യസോ അതിൽ ക്കുറവോ ആയ താപനില ഉണ്ടാവാനോ ഉണ്ടാക്കാനോ സാധ്യമല്ല.

ഇങ്ങനെ ന്യൂനചിഹ്നം ചേർത്തെഴുതുന്ന സംഖ്യകളെ **ന്യൂനസംഖ്യകൾ (Negative numbers)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

ഒരു പരീക്ഷയിൽ 25 ചോദ്യങ്ങളുണ്ട്. ശരിയായ ഉത്തരങ്ങൾക്കെല്ലാം 2 മാർക്ക് വീതം കിട്ടും; തെറ്റായ ഉത്തരങ്ങളോരോന്നിനും 1 മാർക്ക് കുറയ്ക്കും.

ഉദാഹരണമായി 19 ഉത്തരം ശരിയും 6 ഉത്തരം തെറ്റുമാണെങ്കിൽ, ആകെ കിട്ടുന്ന മാർക്ക്

$$(2 \times 19) - 6 = 32$$

മറിച്ചായാലോ ?

ശരിയായ 6 ഉത്തരത്തിന് $(2 \times 6) = 12$ മാർക്ക് കിട്ടും. തെറ്റിപ്പോയ 19 ഉത്തരങ്ങൾക്ക് 19 മാർക്ക് കുറയും.

മാർക്ക് $12 - 19$

ഇതെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും ?

> **ന്യൂനധനം**
>
> സി.ഇ. ഏഴാം നൂറ്റാണ്ടു മുതൽ തന്നെ ഇന്ത്യയിൽ പണമിടപാടുകളിലെ കടം സൂചിപ്പിക്കാൻ ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. ഇക്കാലത്തും ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്.

12 ൽ നിന്ന് 12 കുറയ്ക്കുമ്പോൾ 0 ആകും; ഇനിയെത്ര കുറയ്ക്കണം ?

$$19 - 12 = 7$$

അപ്പോൾ

$$12 - 19 = 0 - 7 = -7$$

ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ന്യൂനവും ചിലപ്പോൾ വേണ്ടിവരും. ഈ കണക്കു നോക്കൂ.

ഒരു പരീക്ഷയിൽ 10 ചോദ്യങ്ങളുണ്ട്. ശരിയായ ഓരോ ഉത്തരത്തിനും 1 മാർക്ക്; തെറ്റായ ഓരോ ഉത്തരത്തിനും $\frac{1}{2}$ മാർക്ക് കുറയ്ക്കും. എല്ലാ ചോദ്യങ്ങൾക്കും ഉത്തരം എഴുതുകയും 3 ഉത്തരം മാത്രം ശരിയുമായ ഒരാൾക്ക് എത്ര മാർക്ക് കിട്ടും ?

ശരിയായ 3 ഉത്തരത്തിന് 3 മാർക്ക് കിട്ടും. തെറ്റായ 7 ഉത്തരങ്ങൾക്ക്, 7 ന്റെ പകുതി $3\frac{1}{2}$ മാർക്ക് കുറയും.

3 ൽ നിന്ന് 3 കുറച്ചാൽ 0. ഇനിയും $\frac{1}{2}$ കൂടി കുറയ്ക്കണം. അപ്പോൾ ആകെ മാർക്ക്

$$3 - 3\frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

ഈ പരീക്ഷയിൽ ഒരു ഉത്തരം മാത്രം ശരിയായ ആൾക്ക് എത്ര മാർക്ക് കിട്ടും?

$$1 - 4\frac{1}{2}$$

ഇതെങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

$$1 - 1 = 0$$

ഇനിയും കുറയ്ക്കേണ്ടത്

$$4\frac{1}{2} - 1 = 3\frac{1}{2}$$

അപ്പോൾ

$$1 - 4\frac{1}{2} = 0 - 3\frac{1}{2} = -3\frac{1}{2}$$

ന്യൂനസംഖ്യകളും കൂടി ഉപയോഗിച്ചു തുടങ്ങുമ്പോൾ $1, 2, 1\frac{1}{2}$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള (ന്യൂനമല്ലാത്ത) സംഖ്യകളെ **അധിസംഖ്യകൾ (Positive numbers)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

അപ്പോൾ 0 എന്ന സംഖ്യയോ ? അത് അധിസംഖ്യയുമല്ല, ന്യൂനസംഖ്യയുമല്ല.

ചെറിയ അധിസംഖ്യയിൽനിന്നു വലിയ അധിസംഖ്യ കുറയ്ക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ന്യൂനസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ആദ്യം പൂജ്യത്തിലെത്തിക്കുകയും പിന്നീട് പൂജ്യത്തിൽ നിന്നു കുറയ്ക്കുകയുമാണ് ചെയ്തത്. ഇതിനുപകരം നേരിട്ടു കണക്കാക്കിക്കൂടേ ?

ന്യൂന നിലകൾ

ഉയരം കൂടിയ കെട്ടിടങ്ങളിൽ ഒരു നിലയിൽ നിന്നു മറ്റൊന്നിലേക്കു പോകാൻ ലിഫ്റ്റ് എന്ന യന്ത്രമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ഇതിൽ വിവിധ നിലകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ എഴുതിയ ബട്ടനുകൾ ഉണ്ടാകും. ഇതമർത്തിയാൽ ഉദ്ദേശിക്കുന്ന നിലയിൽ എത്താം. ഒരു ലിഫ്റ്റിലെ ഇത്തരം ചില ബട്ടനുകളാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

ഇതിൽ –1, –2 എന്നീ ന്യൂനസംഖ്യകൾ എന്തിനാണ് ?

ഈ കെട്ടിടത്തിൽ തറനിരപ്പിനു താഴെ ചില നിലകളുണ്ട്. അവയിൽ ആദ്യത്തേതിനെ –1 എന്നും, അതിലും താഴെയുള്ള നിലയെ –2 എന്നും കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

മുകളിൽ എഴുതിയ കണക്കുകളെല്ലാം ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ.

$$2 - 3 = -1 \qquad 3 - 2 = 1$$
$$3 - 5 = -2 \qquad 5 - 3 = 2$$
$$12 - 19 = -7 \qquad 19 - 12 = 7$$
$$3 - 3\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad 3\frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$
$$1 - 4\frac{1}{2} = -3\frac{1}{2} \qquad 4\frac{1}{2} - 1 = 3\frac{1}{2}$$

ഇവയിൽ നിന്ന് എന്തു മനസ്സിലായി ?

അധിസംഖ്യകളിൽ ചെറുതിൽ നിന്ന് വലുതു കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്നത്, വലുതിൽ നിന്നു ചെറുതു കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്നതിന്റെ ന്യൂനമാണ്

ഇതു ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചും എഴുതാം.

x, y എന്ന ഏതെങ്കിലും രണ്ട് അധിസംഖ്യകളിൽ $x < y$ ആണെങ്കിൽ

$$x - y = -(y - x)$$

(1) ചുവടെപ്പറയുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $4 - 9$ (ii) $14 - 29$ (iii) $5 - 10$

(iv) $25 - 65$ (v) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$ (vi) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും

സംഖ്യകൾ കൊണ്ടുള്ള ചീട്ടുകളിയിൽ ഒരാളുടെ സംഖ്യ −2 ആണ് എന്നതിന്റെ അർഥം, ഇനി കിട്ടുന്നതിൽ നിന്ന് 2 കുറയ്ക്കണം എന്നാണല്ലോ. തുടർന്ന് അട്ടിയിൽ നിന്ന് കറുത്ത 2 കിട്ടിയാൽ അയാളുടെ സംഖ്യ

$$2 - 2 = 0$$

സംഖ്യ −2 ആയിരിക്കുമ്പോൾ 2 കൂട്ടുന്നതിനെ

$$-2 + 2$$

എന്നുമെഴുതാം. അതായത്,

$$-2 + 2 = 2 - 2 = 0$$

10 ചോദ്യങ്ങളുള്ള പരീക്ഷയിൽ, ശരിയായ ഉത്തരങ്ങൾക്കെല്ലാം 1 മാർക്ക് കൊടുക്കുകയും തെറ്റായ ഉത്തരങ്ങൾക്കെല്ലാം 1 മാർക്ക് കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

ആദ്യത്തെ 5 ഉത്തരം തെറ്റുകയും അടുത്ത 5 ഉത്തരം ശരിയാവുകയും ചെയ്താൽ എത്ര മാർക്ക് കിട്ടും ?

ശരിയായ 5 ഉത്തരത്തിന്റെ 5 മാർക്കിൽ നിന്ന് തെറ്റായ ഉത്തരങ്ങളുടെ 5 മാർക്ക് കുറച്ചാൽ, ആകെ മാർക്ക് 0.

ഉത്തരമെഴുതിയ മുറയ്ക്ക് കണക്കാക്കിയാൽ, ആകെ മാർക്ക് −5 + 5 എന്നെഴുതാം. അതായത്.

$$-5 + 5 = 5 - 5 = 0$$

ആദ്യത്തെ 4 ഉത്തരം തെറ്റും, അടുത്ത 6 എണ്ണം ശരിയുമാണെങ്കിലോ ?

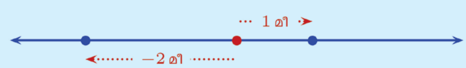
അത് −4 + 6 എന്നെഴുതാം. ശരിയായ ഉത്തരങ്ങൾക്കു കിട്ടിയ 6 മാർക്കിൽ നിന്ന് തെറ്റായ ഉത്തരങ്ങൾക്ക് നഷ്ടപ്പെടുന്ന 4 മാർക്ക് കുറച്ചാൽ 6 − 4 = 2. അപ്പോൾ

$$-4 + 6 = 6 - 4 = 2$$

ആദ്യത്തെ 6 എണ്ണം തെറ്റും, അടുത്ത 4 എണ്ണം ശരിയുമാണെങ്കിലോ?

ദിശമാറ്റം

ഒരു നേർവരയിലൂടെയുള്ള ചലനത്തെക്കുറിച്ച് പറയുമ്പോൾ, വരയിലെ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽനിന്ന് ഒരു ദിശയിലേക്കുള്ള അകലങ്ങളെ അധിസംഖ്യകൾകൊണ്ടും എതിർ ദിശയിലേക്കുള്ള അകലങ്ങളെ ന്യൂനസംഖ്യകൾ കൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കാറുണ്ട്.



ചിത്രത്തിൽ, ചുവന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് വലത്തോട്ടുള്ള അകലങ്ങൾ അധിസംഖ്യകളായും ഇടത്തോട്ടുള്ള അകലങ്ങൾ ന്യൂനസംഖ്യകളായും എടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ആദ്യം 3 മീറ്റർ വലത്തോട്ടു സഞ്ചരിച്ചശേഷം, 5 മീറ്റർ ഇടത്തോട്ടു സഞ്ചരിച്ചാൽ എത്തിച്ചേരുന്നത് ബിന്ദുവിന്റെ ഇടത്തോ വലത്തോ ? എത്ര അകലെ ?

ഇക്കാര്യം

$$3 - 5 = -2$$

എന്നെഴുതാം.

ആദ്യം 5 മീറ്റർ ഇടത്തോട്ടു സഞ്ചരിച്ചശേഷം, 3 മീറ്റർ വലത്തോട്ടു സഞ്ചരിച്ചാലോ?

$$-5 + 3 = -2$$

ആദ്യം 5 മീറ്റർ ഇടത്തോട്ട് സഞ്ചരിച്ചശേഷം വീണ്ടും 3 മീറ്റർ ഇടത്തോട്ടു തന്നെ സഞ്ചരിച്ചാലോ ?

ആകെ മാർക്ക് $-6 + 4$ എന്നെഴുതാം.

ശരിയായ ഉത്തരങ്ങൾക്കു കിട്ടിയ 4 മാർക്കിൽ നിന്ന്, തെറ്റായ ഉത്തരങ്ങൾക്ക് നഷ്ടപ്പെടുന്ന 6 മാർക്ക് കുറച്ചാൽ $4 - 6 = -2$ അപ്പോൾ

$$-6 + 4 = 4 - 6 = -2$$

10 ചോദ്യങ്ങളിൽ ശരിയായ ഉത്തരങ്ങൾക്ക് 1 മാർക്ക് കൊടുക്കുകയും തെറ്റായ ഉത്തരങ്ങൾക്ക് $\frac{1}{2}$ മാർക്ക് കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുന്ന പരീക്ഷയിൽ, അവസാനത്തെ 3 ഉത്തരം മാത്രമാണ് ശരിയായതെങ്കിൽ ആകെ മാർക്ക് എത്രയാണ്?

ആകെ മാർക്ക് $3 - 3\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ എന്നു നേരത്തേ കണ്ടിട്ടുണ്ട്. ഉത്തരങ്ങളുടെ മുറയ്ക്ക് മാർക്ക് കണക്കാക്കിയാൽ,

ആകെ മാർക്ക് $-3\frac{1}{2} + 3$ എന്നും പറയാം. അതായത്

$$-3\frac{1}{2} + 3 = 3 - 3\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

ഈ കണക്കുകളെല്ലാം ഒരുമിച്ചു നോക്കാം.

$$-2 + 2 = 2 - 2 = 0$$
$$-5 + 5 = 5 - 5 = 0$$
$$-4 + 6 = 6 - 4 = 2$$
$$-6 + 4 = 4 - 6 = -2$$
$$-3\frac{1}{2} + 3 = 3 - 3\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

ഇതിൽ നിന്ന് എന്തു മനസ്സിലാക്കാം?

ഒരു അധിസംഖ്യയുടെ ന്യൂനത്തിനോട് ഒരു അധിസംഖ്യ കൂട്ടുക എന്നതിന്റെ അർഥം, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയിൽ നിന്ന് ആദ്യ സംഖ്യ കുറയ്ക്കുക എന്നാണ്

ബീജഗണിതഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ

x, y **എന്ന ഏത് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും**

$$-x + y = y - x$$

ചുവടെപ്പറയുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $-4 + 9$ (ii) $-9 + 4$ (iii) $-15 + 8$

(iv) $-8 + 15$ (v) $-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ (vi) $-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

വേഗത്തിന്റെ ഗണിതം

ഭൂമിയിൽ നിന്ന് മേൽപ്പോട്ടെറിയുന്ന ഒരു വസ്തു ഉയർന്നുയർന്നു പോകുമ്പോൾ ഓരോ ക്ഷണത്തിലും വേഗം കുറയും; കുറഞ്ഞുകുറഞ്ഞ് വേഗം പൂജ്യമാകുമ്പോൾ താഴോട്ടു വീഴാൻ തുടങ്ങും. ഈ മടക്കയാത്രയിൽ വേഗം കൂടിക്കൂടിവരും. അവസാനം നിലത്തു വീഴും.

നേരെ മേൽപ്പോട്ടാണ് എറിയുന്നതെങ്കിൽ, ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിലാണ് വേഗം കുറയുന്നത്. ഉദാഹരണമായി, 49 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ നേരെ മേൽപ്പോട്ടെറിയുന്ന വസ്തുവിന്റെ വേഗം 1 സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോൾ $49 - 9.8 = 39.2$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ് ആകും; 2 സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോൾ $49 - (2 \times 9.8) = 29.4$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ് ആകും.

5 സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോൾ വേഗം

$$49 - (5 \times 9.8) = 0$$

ആകും. തുടർന്ന് ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ കൂടുന്ന വേഗത്തോടെ താഴോട്ട് വീഴാൻ തുടങ്ങും. എറിഞ്ഞതിനുശേഷം 7 സെക്കന്റ് ആകുമ്പോഴോ ?

വീഴ്ച തുടങ്ങി $7 - 5 = 2$ സെക്കന്റ് ആയി. അപ്പോൾ വേഗം പൂജ്യത്തിൽനിന്ന് 2×9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് കൂടി. അതായത് 19.6 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്.

ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് ചുരുക്കിയെഴുതാം: എറിഞ്ഞുകഴിഞ്ഞ് t സെക്കന്റ് ആകുമ്പോഴുള്ള വേഗം എത്രയാണ് ?

$t < 5$ ആണെങ്കിൽ, വേഗം

$$49 - 9.8\,t \text{ മീറ്റർ/സെക്കന്റ്}$$

$t > 5$ ആയാലോ? താഴേക്കുള്ള യാത്ര തുടങ്ങി $t - 5$ സെക്കന്റ് ആയി. അപ്പോൾ വേഗം

$$(t - 5) \times 9.8 = 9.8t - 49 \text{ മീറ്റർ/സെക്കന്റ്.}$$

വീണ്ടും കുറയ്ക്കാം

തെറ്റായ ഉത്തരങ്ങൾക്ക് 1 മാർക്ക് കുറയ്ക്കുന്ന പരീക്ഷയിൽ ആദ്യത്തെ 2 ഉത്തരങ്ങളും തെറ്റിയാൽ, ആകെ മാർക്ക് എത്രയായി ?

അടുത്ത ഉത്തരവും തെറ്റാണെങ്കിലോ?

3 ഉത്തരങ്ങൾ തെറ്റിയതിനാൽ മാർക്ക് –3 അല്ലേ ? ഇത് മറ്റൊരു വിധത്തിലും പറയാം. ആദ്യത്തെ രണ്ട് ഉത്തരം തെറ്റിയപ്പോൾ മാർക്ക് –2. അടുത്തതും തെറ്റിയതിനാൽ ഇനി 1 മാർക്ക് കൂടി കുറയ്ക്കണം, അതായത് –2 – 1. അപ്പോൾ

$$-2 - 1 = -3$$

അടുത്ത രണ്ട് ഉത്തരവും തെറ്റാണെങ്കിലോ ?

5 ഉത്തരം തെറ്റി; മാർക്ക് –5. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ നോക്കിയാൽ,

–3 ൽ നിന്ന് വീണ്ടും 2 കുറഞ്ഞു. അതായത് –3 – 2

ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$-3 - 2 = -5$$

> **ന്യൂനവേഗം**
>
> 49 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ മേൽപ്പോട്ട് എറിഞ്ഞ വസ്തുവിന്റെ വേഗം എഴുതിയത് രണ്ടു ബീജഗണിതവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാണല്ലോ.
>
> $t < 5$ ആണെങ്കിൽ $v = 49 - 9.8t$
>
> $t > 5$ ആണെങ്കിൽ $v = 9.8t - 49$
>
> മേലോട്ടുള്ള വേഗത്തെ അധിസംഖ്യകൊണ്ടും താഴോട്ടുള്ള വേഗത്തെ ന്യൂനസംഖ്യകൊണ്ടും സൂചിപ്പിച്ചാൽ, ഏതു സമയത്തെ വേഗം കണ്ടുപിടിക്കാനും
>
> $v = 49 - 9.8t$
>
> എന്ന ഒറ്റ ബീജഗണിതവാക്യം മതിയാകും. ഉദാഹരണമായി, എറിഞ്ഞ് 8 സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോൾ വേഗം
>
> $49 - (9.8 \times 8) = -29.4$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ്

അപ്പോൾ –5 – 3 എത്രയാണ് ?

–5 എന്നാൽ 0 നെക്കാൾ 5 കുറവ്; വീണ്ടും 3 കുറഞ്ഞാലോ ? ആകെ എത്ര കുറയും ? അതായത്

$$-5 - 3 = -(5 + 3) = -8$$

ഇതുപോലെ –5 – 7 കണക്കാക്കിക്കൂടേ ?

$$-5 - 7 = -(5 + 7) = -12$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

ഒരു അധിസംഖ്യയുടെ ന്യൂനത്തിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു അധിസംഖ്യ കുറച്ചാൽ, ഈ അധിസംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ ന്യൂനം കിട്ടും

ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതത്തിലാക്കിയാലോ ?

x, y എന്ന ഏത് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$-x - y = -(x + y)$$

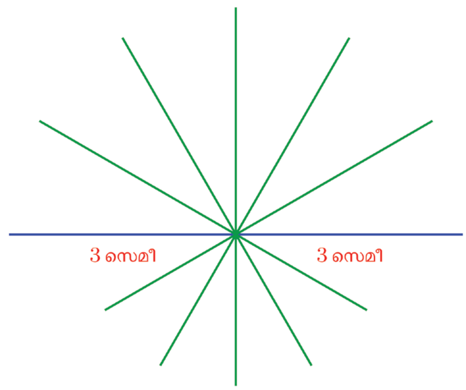
ചുവടെ പറയുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $-3 - 1$	(iv) $-7 - 8$	(vii) $8 - 12$	(x) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$
(ii) $-9 + 4$	(v) $-1 - 1$	(viii) $1\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2}$	(xi) $-2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}$
(iii) $-10 - 4$	(vi) $-10 + 20$	(ix) $-25 - 3\frac{1}{2}$	(xii) $-3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}$

7
സമഭാജികൾ

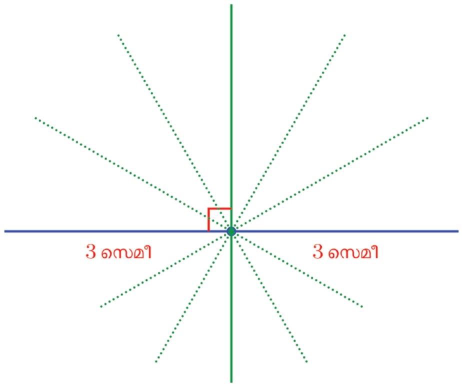
വരയുടെ സമഭാജികൾ

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



ഒരു വരയെ രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളായി മുറിക്കുന്ന വരകളെയെല്ലാം ആ വരയുടെ **സമഭാജികൾ (Bisectors)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

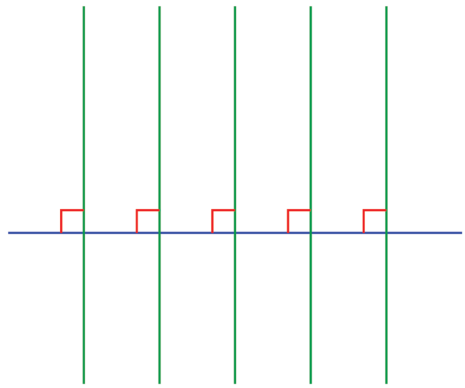
അവയിൽ ഒന്നു മാത്രമാണ്, വരയ്ക്ക് ലംബവും ആകുന്നത്.



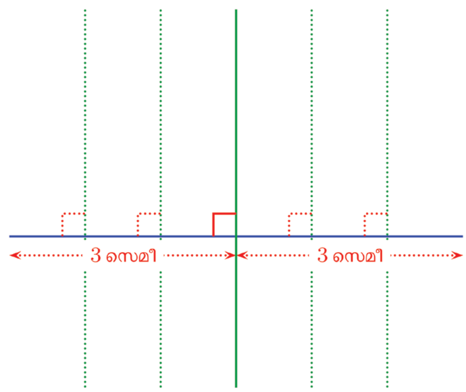
ഈ സമഭാജിയെ വരയുടെ **ലംബസമഭാജി (Perpendicular bisector)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇത് മറ്റൊരു തരത്തിലും പറയാം.

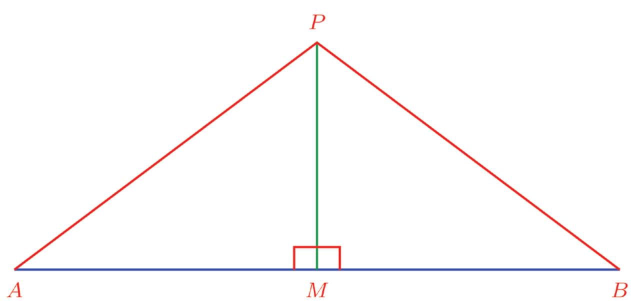
ഒരു വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിലൂടെയും വരയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കാമല്ലോ.



ഇവയിൽ ഒരു ലംബം മാത്രമാണ്, വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നത്; അതാണ് വരയുടെ ലംബസമഭാജി.



ഇനി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ. *AB* എന്ന വരയുടെ അറ്റങ്ങൾ, *AB* യുടെ ലംബസമഭാജിയിലെ *P* എന്ന ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.



AP, BP എന്നീ വരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു തോന്നുന്നില്ലേ ?

ഊഹം ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കാം.

AMP, BMP എന്നീ മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ കർണ്ണങ്ങളാണല്ലോ *AP* യും *BP* യും.

അപ്പോൾ പൈഥാഗറസ് തത്വമനുസരിച്ച്

$$AP^2 = AM^2 + MP^2$$

$$BP^2 = BM^2 + MP^2$$

(ഏഴാം ക്ലാസിലെ **സമചതുരങ്ങളും മട്ടത്രികോണങ്ങളും** എന്ന പാഠത്തിലെ **ചതുരവും സമചതുരവും** എന്ന ഭാഗം).

ഇവയിലെ AM, BM എന്നീ നീളങ്ങളെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം ?

AB യുടെ സമഭാജിയാണല്ലോ PM. അതിനാൽ, $AM = BM$. അപ്പോൾ AP, BP എന്നീ നീളങ്ങളോ ?

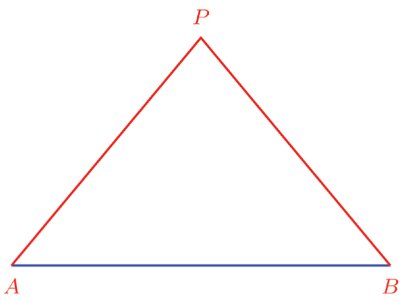
$$AP = BP$$

ഇപ്പോൾ കണ്ട കാര്യം ഒരു പൊതുതത്വമായി എഴുതാം:

ഒരു വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദുവും വരയുടെ അറ്റങ്ങളിൽ നിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലാണ്

അപ്പോൾ ഒരു ചോദ്യം: ഇത് തിരിച്ചു പറഞ്ഞാലും ശരിയാകുമോ ?

അതായത്, ഒരു വരയുടെ അറ്റങ്ങളിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ഏതു ബിന്ദുവും വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലെ ബിന്ദുവാണോ ?



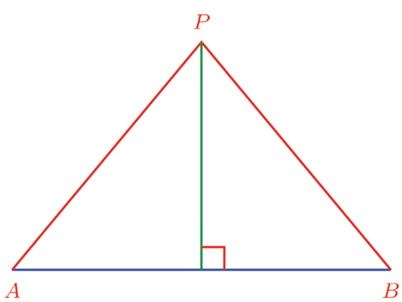
AB എന്ന ഒരു വരവരച്ച് Perpendicular Bisector ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് AB യിൽ ക്ലിക്കു ചെയ്താൽ ലംബസമഭാജി ലഭിക്കും. ഈ ലംബസമഭാജിയിൽ C എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി AC, BC എന്നീ വരകൾ വരച്ച് അവയുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. C യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

ചിത്രത്തിൽ AB എന്ന വരയുടെ അറ്റങ്ങളായ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ബിന്ദുവാണ് P.

AB യുടെ ലംബസമഭാജിയിലെ ബിന്ദുവാണോ P എന്നാണ് അറിയേണ്ടത്.

ഈ ചോദ്യംതന്നെ മറ്റൊരു വിധത്തിലാക്കാം: P യിൽ നിന്ന് AB യിലേക്കുള്ള ലംബം, AB യുടെ സമഭാജിയാണോ ?

ഈ ലംബം വരച്ചു നോക്കാം:



P എന്ന ബിന്ദു, *A* യിൽ നിന്നും *B* യിൽ നിന്നും ഒരേ അകലത്തിലാണല്ലോ; അതായത് *AP* = *BP*, അപ്പോൾ, *APB* എന്നത് സമപാർശ്വത്രികോണമാണ്. ഈ ത്രികോണത്തിലെ തുല്യവശങ്ങൾ ചേരുന്ന മൂലയായ *P* യിൽ നിന്നുള്ള ലംബം, എതിർവശമായ *AB* യെ സമഭാഗം ചെയ്യുമല്ലോ (**തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

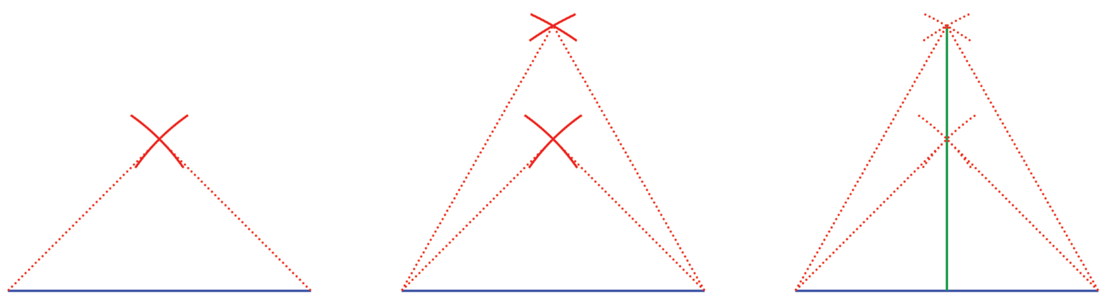
അതായത്, *P* യിൽ നിന്നുള്ള ലംബം *AB* യുടെ ലംബസമഭാജിയാണ്.

മുകളിൽ പറഞ്ഞ തത്വം തിരിച്ചു പറഞ്ഞാലും ശരിയാണ്.

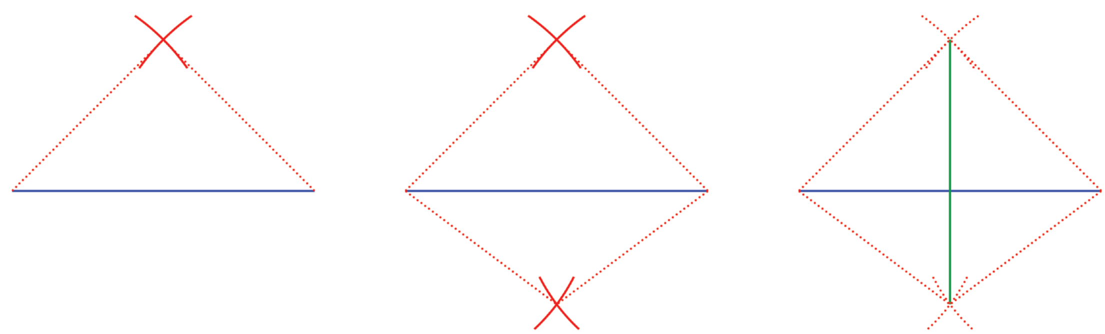
ഒരു വരയുടെ അറ്റങ്ങളിൽ നിന്ന് ഒരേ അകലത്തിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ഏതു ബിന്ദുവും വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലാണ്

min = 0, max = 10, increment = 0.01 ആകത്തക്കവിധം ഒരു Slider a നിർമ്മിക്കുക. AB എന്ന ഒരു വര വരച്ച് A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രമാക്കി a ആരത്തിൽ ഓരോ വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. വൃത്തങ്ങൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി അവയുടെ Trace നൽകുക. സ്ലൈഡറിന് Animation നൽകി നോക്കൂ.

ഇതനുസരിച്ച്, ഒരു വരയുടെ രണ്ടറ്റങ്ങളിൽ നിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ഇത്തരം രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താൽ, അവ രണ്ടും വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലാണ്. അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര തന്നെയാണ് വരയുടെ ലംബസമഭാജി (ഒരു വര വരയ്ക്കാൻ അതിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ മതിയല്ലോ).



ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത്, വരയുടെ ഇരുവശത്തുമാകാം:

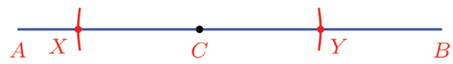


മട്ടമോ കോൺമാപിനിയോ ഉപയോഗിക്കാതെ ഒരു വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി ലംബം വരയ്ക്കാനും ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, ചിത്രത്തിലെ *AB* എന്ന വരയിലെ *C* എന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടി *AB* യ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കാം:

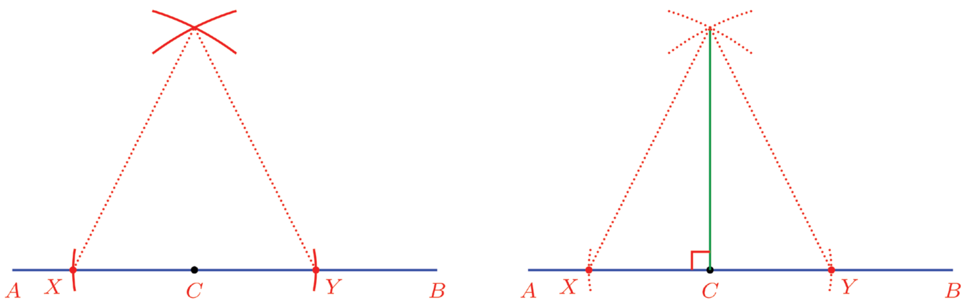
C മധ്യബിന്ദുവായ ഒരു ചെറിയ ഭാഗം AB യിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി, ആ ഭാഗത്തിന്റെ ലംബസമഭാജി വരച്ചാൽ, C യിൽക്കൂടി AB യ്ക്ക് ലംബമായ വരയാകുമല്ലോ.

അതിന് ആദ്യം AB യിൽ C യ്ക്ക് ഇരുവശത്തുമായി ഒരേ അകലത്തിൽ X, Y എന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്താം:



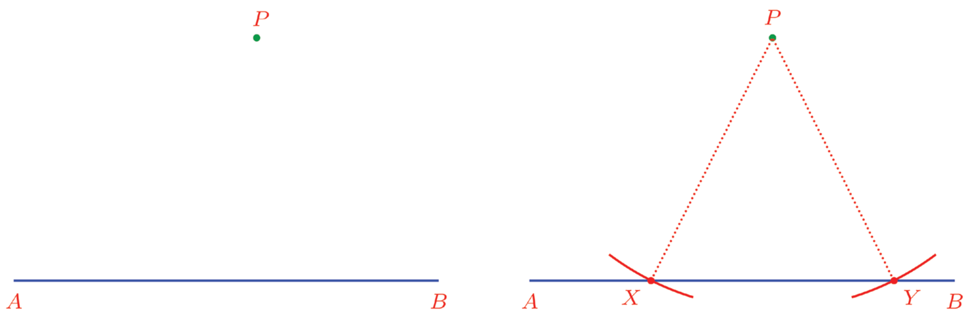
അപ്പോൾ C എന്ന ബിന്ദു XY യുടെ മധ്യബിന്ദുവാണ്; അതിനാൽ XY യുടെ ലംബസമഭാജി C യിൽക്കൂടി കടന്നു പോകും.

ഈ സമഭാജിയിലെ മറ്റൊരു ബിന്ദു കിട്ടാൻ, X ൽ നിന്നും Y ൽ നിന്നും ഒരേ അകലത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ മതിയല്ലോ. ഇനി C യിൽ കൂടി AB യ്ക്ക് ലംബമായ വര വരയ്ക്കാമല്ലോ ?



വരയിലല്ലാത്ത ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വരയിലേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കാനും ഇതുപോലൊരു വഴിയുണ്ട്.

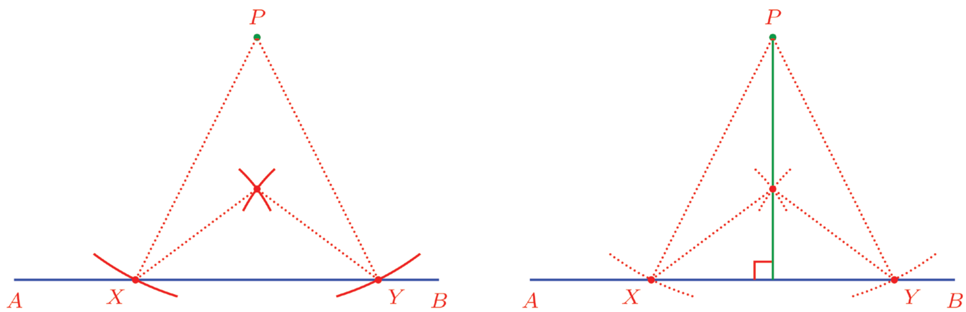
ആദ്യം ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ വരയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക:



ചിത്രത്തിൽ P യിൽ നിന്നും ഒരേ അകലത്തിലുള്ള രണ്ട് ബിന്ദുക്കളാണ് X, Y.

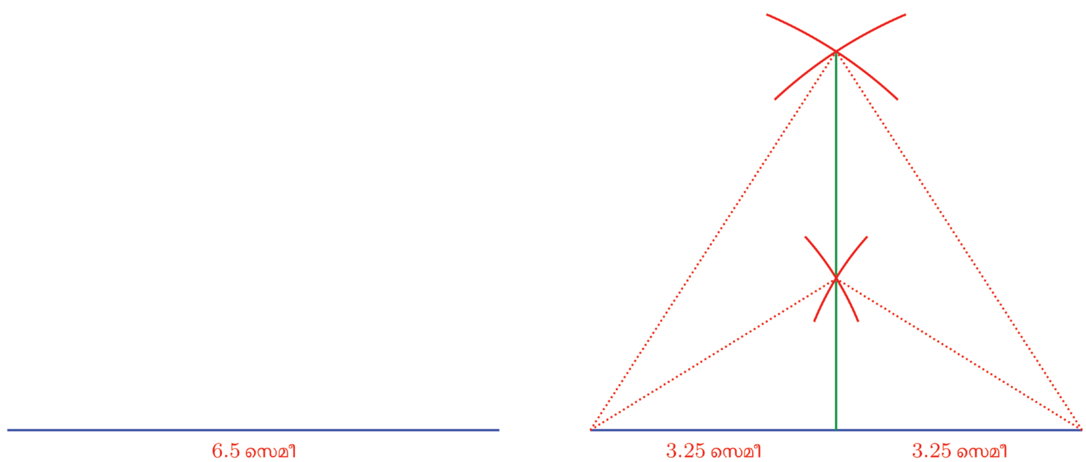
അപ്പോൾ XY യുടെ ലംബസമഭാജിയിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് P.

X ൽ നിന്നും Y ൽ നിന്നും ഒരേ അകലത്തിൽ മറ്റൊരു ബിന്ദുകൂടി അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ, അത് P യുമായി യോജിപ്പിച്ച്, XY യുടെ ലംബസമഭാജി വരയ്ക്കാം. ഈ സമഭാജി AB യ്ക്ക് ലംബവുമാണല്ലോ.

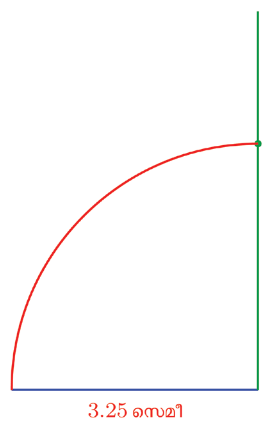


ഇനി ഇതെല്ലാം ഉപയോഗിച്ച്, വശങ്ങളുടെ നീളം 3.25 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമചതുരം വരയ്ക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

6.5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ഒരു വര വരച്ച്, അതിന്റെ ലംബസമഭാജി വരച്ചാൽ, 3.25 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വര കിട്ടും.

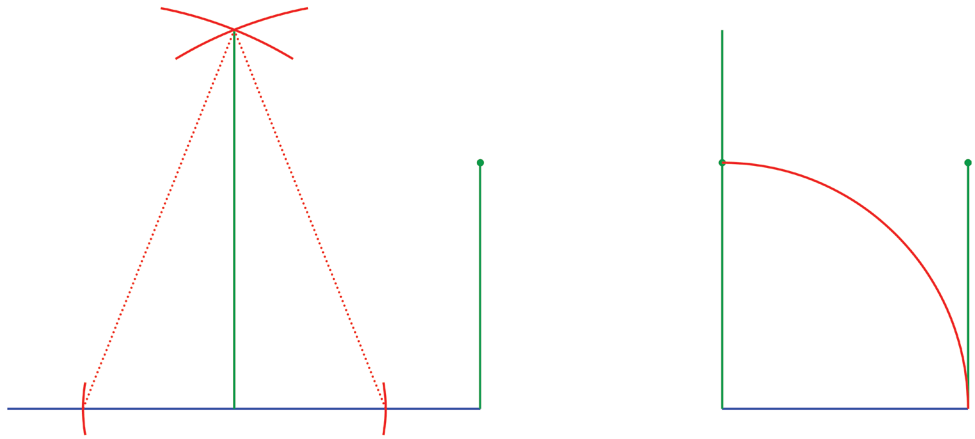


ഇനി ഈ ലംബസമഭാജിയിൽ, താഴത്തെ വരയുടെ പകുതി നീളം അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ, സമചതുരത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളായി.

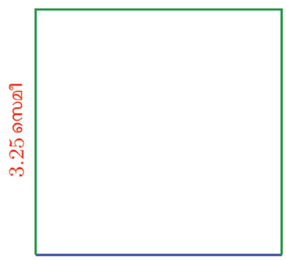


(ഇത്രയും ആയാൽ കോൺമാപിനിയോ മട്ടമോ ഉപയോഗിച്ച് ലംബം വരച്ച് സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ മുൻക്ലാസുകളിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇവയൊന്നും ഉപയോഗിക്കാതെയാണ് ഇവിടെ വരയ്ക്കുന്നത്).

മൂന്നാമത്തെ വശം കിട്ടാൻ, താഴത്തെ വശത്തിന്റെ ഇടത് അറ്റത്തുനിന്ന് ലംബം വരച്ച്, അതിലും താഴത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്താം (ലംബം വരയ്ക്കാൻ താഴത്തെ വര അല്പം ഇടത്തേയ്ക്ക് നീട്ടേണ്ടിവരും):



ഇനി ലംബങ്ങളുടെ മുകളറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ നമുക്കാവശ്യമുള്ള സമചതുരമായി. (എന്തുകൊണ്ട് ?).



ഈ സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ സ്കെയിലും കോമ്പസും മാത്രമാണ് ഉപയോഗിച്ചത് എന്നതു ശ്രദ്ധിക്കുക.

സ്കെയിലും കോമ്പസും മാത്രം ഉപയോഗിച്ച്, ചുവടെ പറയുന്നവ വരയ്ക്കുക:

(1) വശങ്ങളുടെ നീളം $4\frac{1}{4}$ സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമചതുരം.

(2) വശങ്ങളുടെ നീളം $5\frac{1}{4}$ സെന്റിമീറ്ററും $3\frac{1}{4}$ സെന്റിമീറ്ററും ആയ ചതുരം.

(3) വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 2.75 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമഭുജത്രികോണം.

(4) ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 4.5 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 9 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും ആയ ഒരു ത്രികോണം.

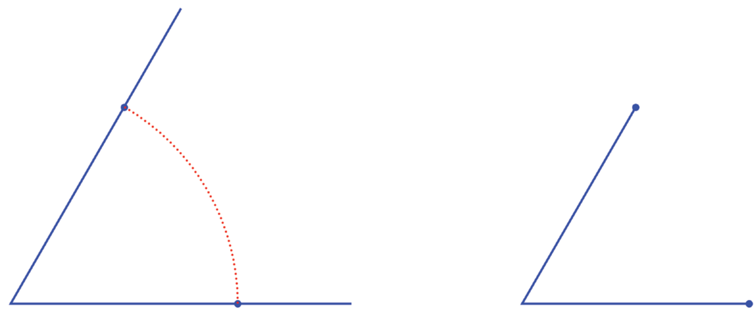
കയറും കണക്കും

പ്രാചീന ജ്യാമിതിയുടെ പ്രാമാണിക ഗ്രന്ഥമായ എലമെന്റ്സിനെക്കുറിച്ച് കേട്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇതിൽ വരകളും വൃത്തങ്ങളും ഉപയോഗിച്ച് വരയ്ക്കാവുന്ന രൂപങ്ങൾ മാത്രമേ യൂക്ലിഡ് പരിഗണിക്കുന്നുള്ളൂ. മറ്റൊരു രീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ നീളങ്ങളൊന്നും അടയാളപ്പെടുത്താത്ത വളവില്ലാത്ത ഒരു വടിയും (Straight edge) കോമ്പസും കൊണ്ട് വരയ്ക്കാവുന്ന രൂപങ്ങൾ മാത്രം. എന്തുകൊണ്ടാണിങ്ങനെ ? പണ്ടുകാലത്ത് നീളമളക്കാനും, വരയ്ക്കാനുമെല്ലാം ചരടോ കയറോ ആണ് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്. കയർ ഉപയോഗിച്ച് വരയ്ക്കാവുന്നത് വരയും വട്ടവുമാണ്. രണ്ട് കുറ്റികൾക്കിടയിൽ കയർ വലിച്ചു കെട്ടിയാൽ വരയായി. ഒരു കുറ്റി ഇളക്കി മറ്റേ കുറ്റിയ്ക്കു ചുറ്റും കറക്കിയാൽ വട്ടവും.

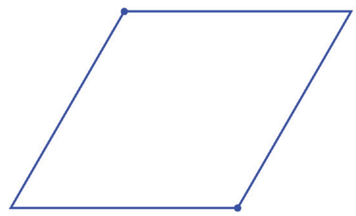
വിവിധ രൂപങ്ങൾ വരയ്ക്കാനുള്ള ഉപകരണങ്ങൾ നിർമ്മിക്കാൻ കഴിയുന്ന ഇന്ന് ഇത്തരം നിർമ്മിതികൾക്ക് ചരിത്രപരവും സൈദ്ധാന്തികവുമായ പ്രാധാന്യമേയുള്ളൂ.

സമഭുജസാമാന്തരികങ്ങൾ

ഒരു കോൺ വരച്ച്, അതിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളിലും ഒരേ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക;



ഇനി മുകളിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുവിലൂടെ വിലങ്ങനെയുള്ള വരയ്ക്കും, താഴത്തെ ബിന്ദുവിലൂടെ ചരിഞ്ഞ വരയ്ക്കും സമാന്തരമായ വരകൾ വരച്ച്, ഒരു ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക:

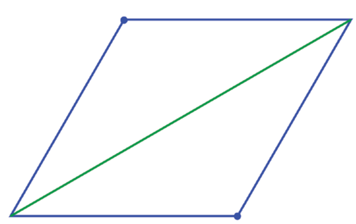


ഇത് ഒരു സാമാന്തരികമാണല്ലോ; അതിനാൽ എതിർവശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ് (**തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **രണ്ടു കോണുകൾ** എന്ന ഭാഗം).

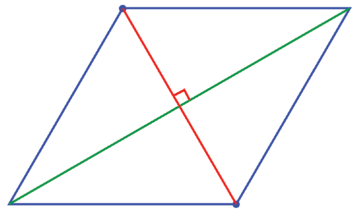
ആദ്യം വരച്ച രണ്ടു വശങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമല്ലേ ? അപ്പോൾ ഈ സാമാന്തരികത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണ്.

ഇങ്ങനെ വശങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ നീളമായ സാമാന്തരികത്തിന് **സമഭുജസാമാന്തരികം (Rhombus)** എന്നാണ് പേര്.

ഇതിന്റെ ഒരു വികർണ്ണം നോക്കിയാൽ, അതു കടന്നുപോകുന്ന മൂലകളിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലാണല്ലോ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളും ?



അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു മൂലകളും വികർണ്ണത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയിലാണ്; അഥവാ, അവ ചേർത്തു വരയ്ക്കുന്ന രണ്ടാമത്തെ വികർണ്ണമാണ് ആദ്യത്തെ വികർണ്ണത്തിന്റെ ലംബസമഭാജി:



ഇതുപോലെതന്നെ, ആദ്യം ചെറിയ വികർണ്ണം വരച്ച് തുടങ്ങിയാൽ, അതിന്റെ ലംബസമഭാജിയാണ് വലിയ വികർണ്ണം എന്നും കാണാം.

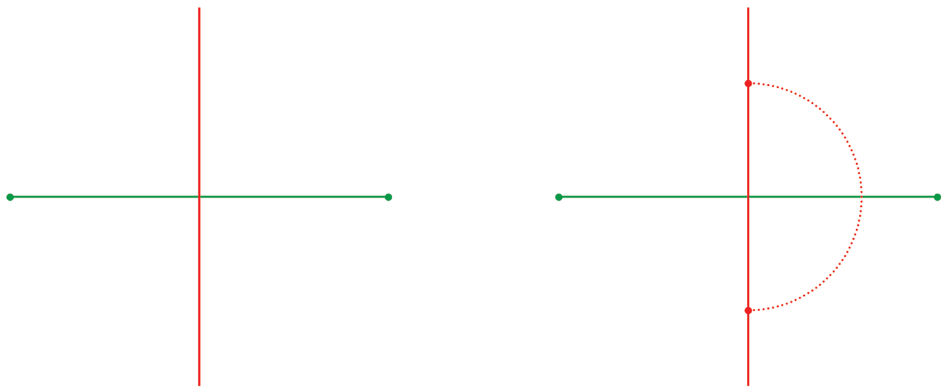
ഇത് ഒരു പൊതുതത്വമായി പറയാം:

ഏത് സമഭുജസാമാന്തരികത്തിലും വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബസമഭാജികളാണ്

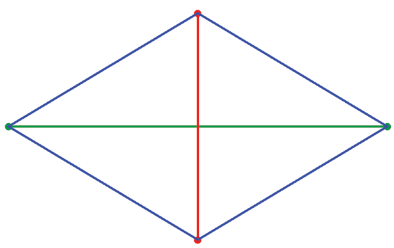
ഇവിടെ ചോദിക്കാവുന്ന ഒരു ചോദ്യമുണ്ട്:

വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബസമഭാജികളായ ഒരു ചതുർഭുജം വരച്ചാൽ, അതൊരു സമഭുജസാമാന്തരികമായിരിക്കുമോ ?

ആദ്യം ഇത്തരമൊരു ചതുർഭുജം വരച്ചു നോക്കാം. അതിന് ഒരു വരയും അതിന്റെ ലംബസമഭാജിയും വരയ്ക്കുക; മധ്യബിന്ദുവിന്റെ ഇരുവശത്തുമായി സമഭാജിയിൽ ഒരേ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക:



ഈ ബിന്ദുക്കൾ ആദ്യ വരയുടെ അറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ, വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യുന്ന ചതുർഭുജമായില്ലേ ?



ഇതൊരു സമഭുജസാമാന്തരികമാണോ എന്നാണ് ചോദ്യം.

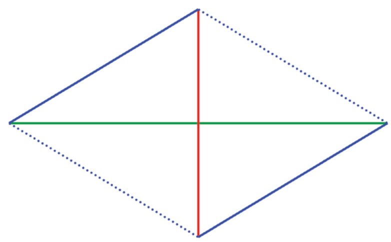
വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമായതിനാൽ, അവ ചതുർഭുജത്തെ നാലു മട്ടത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നുണ്ടല്ലോ.

ചുവന്ന വര പച്ച വരയെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നതിനാൽ, ത്രികോണങ്ങളിലെ പച്ച വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്; മറിച്ച്, പച്ച വര ചുവന്ന വരയെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നതിനാൽ, ത്രികോണങ്ങളിലെ ചുവന്ന വശങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണ്.

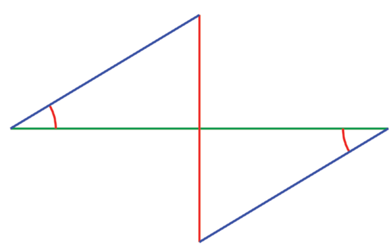
അപ്പോൾ പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്, ഈ നാലു ത്രികോണങ്ങളുടെയും കർണ്ണങ്ങളായ നാല് നീല വരകൾക്കും ഒരേ നീളമാണല്ലോ.

അതായത്, ഈ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ നീളമാണ്.

ഇനി ഈ ചതുർഭുജത്തിലെ എതിർവശങ്ങളുടെ ജോടികൾ സമാന്തരമാണോ എന്നു നോക്കണം. ഇടതു മുകളിലും, വലതു താഴെയുമുള്ള വശങ്ങൾ നോക്കാം:



ഇവ സമാന്തരമാണോ എന്നു നോക്കാൻ, ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണോ എന്നു നോക്കിയാൽ മതിയല്ലോ.



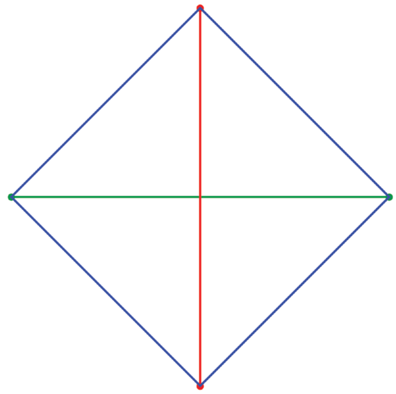
ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ വശങ്ങളായതിനാൽ, ഈ കോണുകൾ തുല്യമാണ്; അതിനാൽ നീല വരകൾ സമാന്തരവുമാണ്.

അപ്പോൾ ഈ ചതുർഭുജത്തിലെ ഒരു ജോടി എതിർവശങ്ങൾ തുല്യവും സമാന്തരവുമാണ്; അതിനാൽ അതൊരു സാമാന്തരികവുമാണ് (**തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **രണ്ടു വശങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം). ഇവിടെ കണ്ടത് എന്താണ് ?

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബസമഭാജികളാണെങ്കിൽ, ആ ചതുർഭുജം ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികമാണ്

വികർണ്ണങ്ങൾ തുല്യവും കൂടിയായാലോ ?

നാല് മട്ടത്രികോണങ്ങളും സമപാർശ്വമാകും. അപ്പോൾ ഓരോ മൂലയിലെ കോണും 90° ആകും. സമഭുജസാമാന്തരികം സമചതുരമാകും.



അപ്പോൾ സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ പുതിയൊരു മാർഗ്ഗമായി. വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമചതുരം വരച്ചുനോക്കൂ.

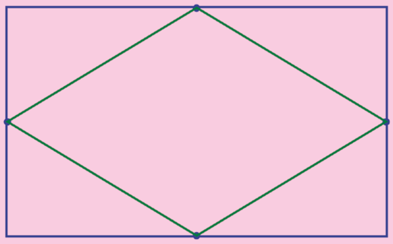
(1) വികർണ്ണങ്ങളുടെ നീളം ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നതായ സമഭുജസാമാന്തരികങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

(i) 6 സെന്റീമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ

(ii) 6.5 സെന്റീമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ

(iii) 6 സെന്റീമീറ്റർ, 4.5 സെന്റിമീറ്റർ

(2) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ചതുർഭുജം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



(i) ഈ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാണോ ? എന്തുകൊണ്ട് ?

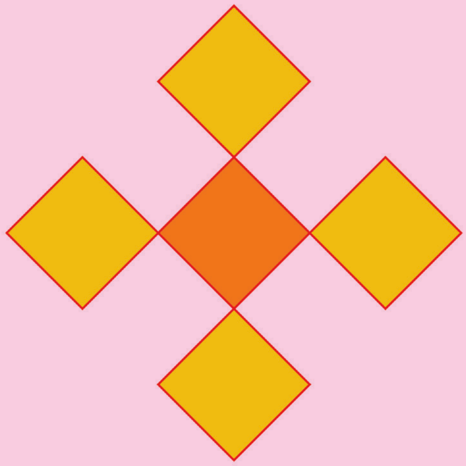
(ii) ഈ ചതുർഭുജം സമഭുജസാമാന്തരികമാണോ ? എന്തുകൊണ്ട് ?

(3) വികർണ്ണങ്ങളുടെ നീളം 6.5 സെന്റിമീറ്ററും, 4.5 സെന്റിമീറ്ററും ആയ സമഭുജസാമാന്തരികം വരയ്ക്കുക.

(4) ഏതു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെയും വികർണ്ണങ്ങൾ, അവ യോജിപ്പിക്കുന്ന മൂലകളിലെ കോണുകളെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു എന്നു തെളിയിക്കുക.

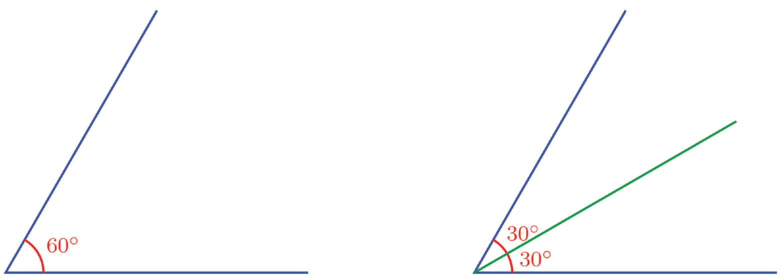
(5) വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം 7 സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

(6) ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കൂ.



കോണിന്റെ സമഭാജി

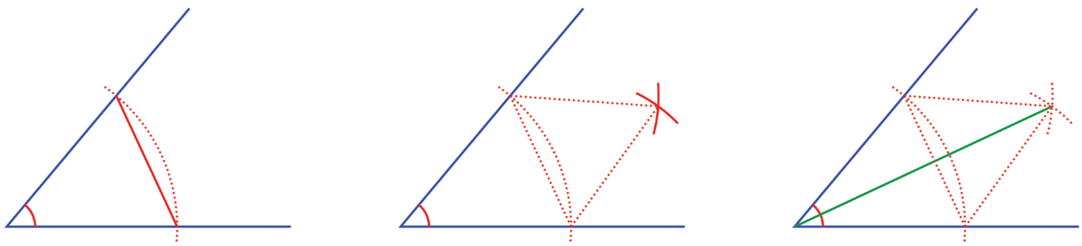
ഒരു കോണിനെ രണ്ടു തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന വരയെ, **കോണിന്റെ സമഭാജി (Angle bisector)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.



ഒരു കോണിന്റെ സമഭാജി വരയ്ക്കുന്നത് എങ്ങനെയാണ് ?

ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ തുല്യമായ വശങ്ങൾ ചേരുന്ന മൂലയിൽ നിന്ന് എതിർവശത്തേയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബം, മൂലയിലെ കോണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യും എന്നു കണ്ടല്ലോ.

കോണിന്റെ ഇരുവശത്തും, മൂലയിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിൽ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ സമപാർശ്വത്രികോണം കിട്ടും; കോണിന്റെ മൂലയിൽ നിന്ന് ഈ സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ എതിർവശത്തേയ്ക്ക് ലംബം വരച്ചാൽ, കോണിന്റെ സമഭാജിയും ആയി:

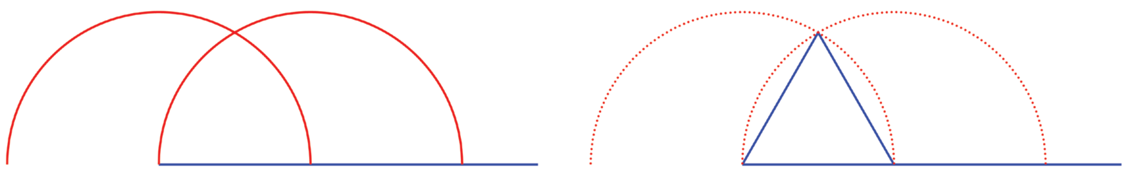


ഈ രീതിയിൽ സ്കെയിലും കോമ്പസും മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് 30° കോൺ എങ്ങനെ വരയ്ക്കുമെന്നു നോക്കാം.

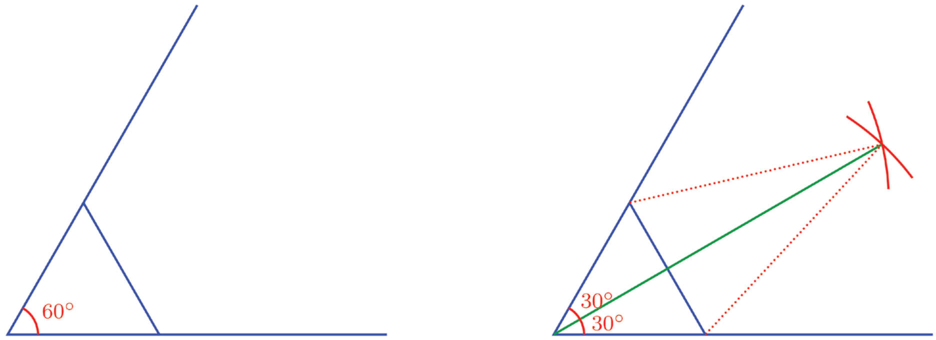
ആദ്യം 60° കോൺ വരയ്ക്കാം.

അതിന് ഒരു വര വരച്ച്, അതിന്റെ ഒരറ്റം മൂലയായ സമഭുജത്രികോണം വരച്ചാൽ മതിയല്ലോ

(ഏഴാം ക്ലാസിലെ **ത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **നക്ഷത്രചിത്രം** എന്ന ഭാഗം).



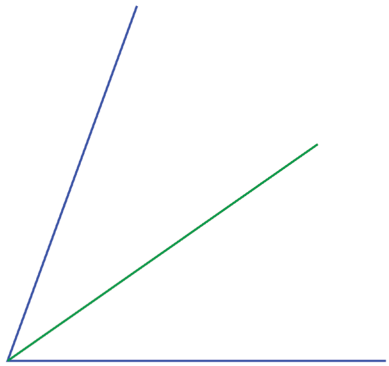
സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളെല്ലാം 60° ആയതിനാൽ, ആദ്യം വരച്ച വരയുടെ അറ്റത്ത് 60° കോണായി; അതിന്റെ സമഭാജി വരച്ചാൽ 30° കോണുമായി.

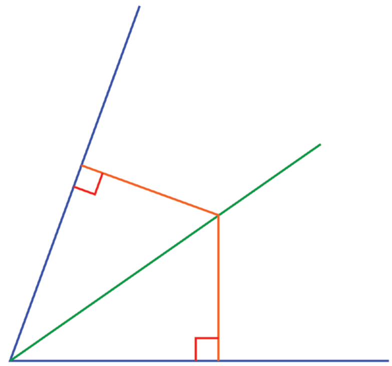


ഒരു വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദുവും വരയുടെ രണ്ടറ്റങ്ങളിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലാണെന്നും, മറിച്ച് ഒരു വരയുടെ രണ്ടറ്റങ്ങളിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിൽ കൂട്ടി മുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കളെല്ലാം ലംബസമഭാജിയിലാണെന്നും കണ്ടല്ലോ.

ഇതുപോലൊരു ഗുണം കോണുകളുടെ സമഭാജികൾക്കുമുണ്ട്.

അതു കാണാൻ, ഒരു കോണും, അതിന്റെ സമഭാജിയും വരയ്ക്കുക; സമഭാജിയിലെ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവിൽനിന്ന് കോണിന്റെ വശങ്ങളിലേക്ക് ലംബങ്ങളും വരയ്ക്കുക:

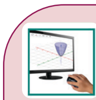




രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ മുകളിലും താഴെയുമായി രണ്ടു മട്ടത്രികോണമുണ്ടല്ലോ.

പച്ച വര, കോണിന്റെ സമഭാജി ആയതിനാൽ, ഈ ത്രികോണങ്ങളിലെ ഒരു ജോടി കോണുകൾ തുല്യമാണ്. രണ്ടും മട്ടത്രികോണമായതിനാൽ, മൂന്നാമത്തെ കോണുകളും തുല്യമാണ്.

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കർണ്ണമാണല്ലോ. അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള കോണുകളും തുല്യമാണ്. അപ്പോൾ ത്രികോണങ്ങളുടെ ചുവന്ന വശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

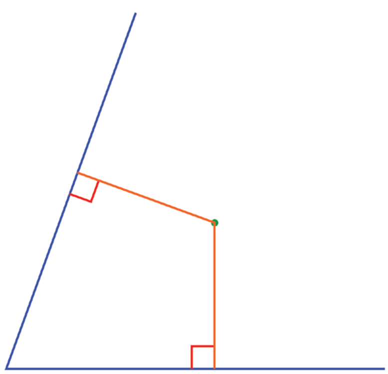


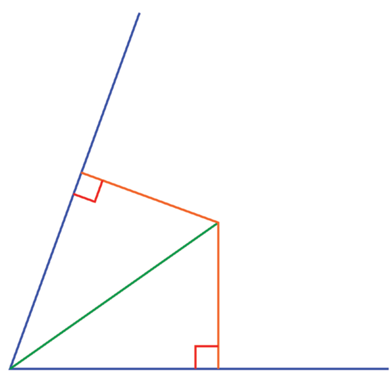
ഒരു കോൺ ABC വരയ്ക്കുക. Angle Bisector ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് A, B, C ഇവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്കു ചെയ്താൽ കോണിന്റെ സമഭാജി ലഭിക്കും. ഇതിൽ D എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി D യിൽ നിന്ന് കോണിന്റെ വശങ്ങളിലേക്ക് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഈ ലംബങ്ങൾ വശങ്ങളുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ E, F അടയാളപ്പെടുത്തുക. DE, DF എന്നീ വരകൾ വരച്ച് നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. D യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

അതായത്, സമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിൽനിന്നും വശങ്ങളിലേക്ക് ഒരേ ലംബദൂരമാണ്.

മറിച്ച്, കോണിന്റെ വശങ്ങളിൽനിന്ന് ഒരേ ലംബദൂരത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കൾ കോണിന്റെ സമഭാജിയിലായിരിക്കുമോ ?

അത്തരം ഒരു ബിന്ദു സങ്കല്പിച്ച് കോണിന്റെ മൂലയുമായി യോജിപ്പിച്ച് നോക്കാം.





ഇപ്പോഴും ഒരേ കർണ്ണമുള്ള രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടി. ഇവയുടെ ചുവന്ന വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളവുമാണ്. അപ്പോൾ പൈഥാഗറസ് തത്വമനുസരിച്ച്, മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണ്. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വശങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ നീളമായതിനാൽ, കോണുകൾക്കും ഒരേ വലുപ്പമാണ്. ത്രികോണങ്ങളുടെ ഇടതു മൂലകളിലെ കോണുകൾ, ആദ്യത്തെ കോണിനെ പച്ച വര ഭാഗിച്ചതാണല്ലോ. ഇവ തുല്യമായതിനാൽ, ഈ വര കോണിന്റെ സമഭാജിയാണ്.

അപ്പോൾ ഒരു കോണിന്റെ സമഭാജിയെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം ?

ഒരു കോണിന്റെ സമഭാജിയിലെ ബിന്ദുക്കളെല്ലാം കോണിന്റെ വശങ്ങളിൽനിന്ന് ഒരേ ലംബദൂരത്തിലാണ്; മറിച്ച്, ഒരു കോണിന്റെ വശങ്ങളിൽനിന്ന് ഒരേ ലംബദൂരത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളെല്ലാം കോണിന്റെ സമഭാജിയിലാണ്

(1) ചുവടെ പറയുന്ന കോണുകൾ വരയ്ക്കുക.

(i) $37\frac{1}{2}^{\circ}$ (ii) $62\frac{1}{2}^{\circ}$

(2) സ്കെയിലും കോമ്പസും മാത്രം ഉപയോഗിച്ച്, ചുവടെ പറയുന്നവ വരയ്ക്കുക.

(i) താഴെപ്പറയുന്ന കോണുകൾ

(a) 45° (b) 135° (c) 75° (d) 15°

(ii) ഒരു വശം 6 സെന്റിമീറ്ററും, അതിന്റെ അറ്റങ്ങളിലെ കോണുകൾ $67\frac{1}{2}^{\circ}$ യും $22\frac{1}{2}^{\circ}$ യും ആയ ത്രികോണം.

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ഭാഗം IV ക

മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ

51 ക. മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ - താഴെപ്പറയുന്നവ ഭാരതത്തിലെ ഓരോ പൗരന്റെയും കർത്തവ്യം ആയിരിക്കുന്നതാണ് :

(ക) ഭരണഘടനയെ അനുസരിക്കുകയും അതിന്റെ ആദർശങ്ങളെയും സ്ഥാപനങ്ങളെയും ദേശീയപതാകയെയും ദേശീയഗാനത്തെയും ആദരിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഖ) സ്വാതന്ത്ര്യത്തിനുവേണ്ടിയുള്ള നമ്മുടെ ദേശീയസമരത്തിന് പ്രചോദനം നൽകിയ മഹനീയാദർശങ്ങളെ പരിപോഷിപ്പിക്കുകയും പിൻതുടരുകയും ചെയ്യുക;

(ഗ) ഭാരതത്തിന്റെ പരമാധികാരവും ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും നിലനിർത്തുകയും സംരക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഘ) രാജ്യത്തെ കാത്തുസൂക്ഷിക്കുകയും ദേശീയസേവനം അനുഷ്ഠിക്കുവാൻ ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ അനുഷ്ഠിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ങ) മതപരവും ഭാഷാപരവും പ്രാദേശികവും വിഭാഗീയവുമായ വൈവിധ്യങ്ങൾക്കതീതമായി ഭാരതത്തിലെ എല്ലാ ജനങ്ങൾക്കുമിടയിൽ, സൗഹാർദവും പൊതുവായ സാഹോദര്യമനോഭാവവും പുലർത്തുക, സ്ത്രീകളുടെ അന്തസ്സിന് കുറവു വരുത്തുന്ന ആചാരങ്ങൾ പരിത്യജിക്കുക;

(ച) നമ്മുടെ സമ്മിശ്രസംസ്കാരത്തിന്റെ സമ്പന്നമായ പാരമ്പര്യത്തെ വിലമതിക്കുകയും നിലനിറുത്തുകയും ചെയ്യുക;

(ഛ) വനങ്ങളും തടാകങ്ങളും നദികളും വന്യജീവികളും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രകൃത്യാ ഉള്ള പരിസ്ഥിതി സംരക്ഷിക്കുകയും അഭിവൃദ്ധിപ്പെടുത്തുകയും, ജീവികളോട് കാരുണ്യം കാണിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ജ) ശാസ്ത്രീയമായ കാഴ്ചപ്പാടും മാനവികതയും, അന്വേഷണത്തിനും പരിഷ്കരണത്തിനും ഉള്ള മനോഭാവവും വികസിപ്പിക്കുക;

(ഝ) പൊതുസ്വത്ത് പരിരക്ഷിക്കുകയും ശപഥം ചെയ്ത് അക്രമം ഉപേക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഞ) രാഷ്ട്രം യത്നത്തിന്റെയും ലക്ഷ്യപ്രാപ്തിയുടെയും ഉന്നതതലങ്ങളിലേക്ക് നിരന്തരം ഉയരത്തക്കവണ്ണം വ്യക്തിപരവും കൂട്ടായതുമായ പ്രവർത്തനത്തിന്റെ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും ഉൽക്കൃഷ്ടതയ്ക്കുവേണ്ടി അധ്വാനിക്കുക;

(ട) ആറിനും പതിനാലിനും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ള തന്റെ കുട്ടിക്കോ തന്റെ സംരക്ഷണയിലുള്ള കുട്ടികൾക്കോ, അതതു സംഗതി പോലെ, മാതാപിതാക്കളോ രക്ഷാകർത്താവോ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനുള്ള അവസരങ്ങൾ ഏർപ്പെടുത്തുക.

കുട്ടികളുടെ അവകാശങ്ങൾ

പ്രിയമുള്ള കുട്ടികളേ,

നിങ്ങൾക്കുള്ള അവകാശങ്ങളെന്തെല്ലാമെന്ന് അറിയേണ്ടതില്ലേ? അവകാശങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള അറിവ് നിങ്ങളുടെ പങ്കാളിത്തം, സംരക്ഷണം, സാമൂഹികനീതി എന്നിവ ഉറപ്പാക്കാൻ പ്രേരണയും പ്രചോദനവും നൽകും. നിങ്ങളുടെ അവകാശങ്ങൾ സംരക്ഷിക്കാൻ ഇപ്പോൾ ഒരു കമ്മീഷൻ പ്രവർത്തിക്കുന്നുണ്ട്. കേരള സംസ്ഥാന ബാലാവകാശസംരക്ഷണ കമ്മീഷൻ എന്നാണ് അതിന്റെ പേര്. എന്തെല്ലാമാണ് നിങ്ങൾക്കുള്ള അവകാശങ്ങൾ എന്നു നോക്കാം.

- സംസാരത്തിനും ആശയപ്രകടനത്തിനുമുള്ള സ്വാതന്ത്ര്യം
- ജീവന്റെയും വ്യക്തിസ്വാതന്ത്ര്യത്തിന്റെയും സംരക്ഷണം
- അതിജീവനത്തിനും പൂർണ്ണവികാസത്തിനുമുള്ള അവകാശം
- ജാതി-മത-വർഗ-വർണ്ണ ചിന്തകൾക്കതീതമായി ബഹുമാനിക്കപ്പെടാനും അംഗീകരിക്കപ്പെടാനുമുള്ള അവകാശം
- മാനസികവും ശാരീരികവും ലൈംഗികവുമായ പീഡനങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള സംരക്ഷണത്തിനും പരിചരണത്തിനുമുള്ള അവകാശം
- പങ്കാളിത്തത്തിനുള്ള അവകാശം
- ബാലവേലയിൽനിന്നും ആപൽക്കരമായ ജോലികളിൽനിന്നുമുള്ള മോചനം
- ശൈശവവിവാഹത്തിൽനിന്നുള്ള സംരക്ഷണം
- സ്വന്തം സംസ്കാരം അറിയുന്നതിനും അതനുസരിച്ച് ജീവിക്കുന്നതിനുമുള്ള സ്വാതന്ത്ര്യം
- അവഗണനകളിൽനിന്നുള്ള സംരക്ഷണം
- സൗജന്യവും നിർബന്ധിതവുമായ വിദ്യാഭ്യാസ അവകാശം
- കളിക്കാനും പഠിക്കാനുമുള്ള അവകാശം
- സ്നേഹവും സുരക്ഷയും നൽകുന്ന കുടുംബവും സമൂഹവും ലഭ്യമാകാനുള്ള അവകാശം

നിങ്ങളുടെ ചില ഉത്തരവാദിത്വങ്ങൾ

- സ്കൂൾ, പൊതുസംവിധാനങ്ങൾ എന്നിവ നശിപ്പിക്കാതെ സംരക്ഷിക്കുക.
- സ്കൂളിലും പഠനപ്രവർത്തനങ്ങളിലും കൃത്യനിഷ്ഠ പാലിക്കുക.
- സ്കൂൾ അധികാരികളെയും അധ്യാപകരെയും മാതാപിതാക്കളെയും സഹപാഠികളെയും ബഹുമാനിക്കുകയും അംഗീകരിക്കുകയും ചെയ്യുക.
- ജാതി-മത-വർഗ-വർണ്ണ ചിന്തകൾക്കതീതമായി മറ്റുള്ളവരെ ബഹുമാനിക്കാനും അംഗീകരിക്കാനും സന്നദ്ധരാവുക.

ബന്ധപ്പെടേണ്ട വിലാസം:

കേരള സംസ്ഥാന ബാലാവകാശസംരക്ഷണ കമ്മീഷൻ

ശ്രീ ഗണേഷ്, റ്റി.സി. 14/2036, വാൻറോസ് ജംങ്ഷൻ,

കേരള യൂണിവേഴ്സിറ്റി പി.ഒ, തിരുവനന്തപുരം – 34

ഫോൺ 0471 – 2326603

ഇ- മെയിൽ childrights.cpcr@kerala.gov.in, rte.cpcr@kerala.gov.in

വെബ്സൈറ്റ് : www.kescpcr.kerala.gov.in

ചൈൽഡ് ഹെൽപ്പ് ലൈൻ - 1098, ക്രൈം സ്റ്റോപ്പർ - 1090, നിർഭയ – 1800 425 1400

കേരള പൊലീസ് ഹെൽപ്പ് ലൈൻ - 0471 – 3243000/44000/45000

*online **R.T.E Monitoring : www.nireekshana.org.in***